Emil Stoica

TRIGONOMETRIA

Elementele de bază
în rezolvarea de exerciții şi probleme

Culegere de exerciții şi probleme
aplicative

PENTRU GIMNAZIU ŞI LICEU

Redactare: Alina Scurtu
Tehnoredactare computerizată: Emil Stoica, Mihaela Ciufu

Date despre autor

Emil Stoica este autorul lucrărilor: *Calculatoare electronice şi sisteme de operare*, curs, 2 vol. (coautor, Facultatea de Cibernetică, 1972); *Baze logice pentru calculatoare numerice* (Editura Tehnică, Bucureşti, 1978); *Tomografia computerizată* (revista „Ştiinţă şi tehnică", 1989); *Algebra. Sinteze ale elementelor teoretice de bază* (Editura Odeon, Bucureşti, 1996); *Algebra. Ghid practic* (Editura Eikon, Cluj-Napoca, 2007); *Algebra* (Editura Corint, Bucureşti, 2009).

ISBN 978-973-135-426-2

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
STOICA, EMIL
Trigonometria: elementele de bază în rezolvarea de exerciţii şi probleme: culegere de exerciţii şi probleme aplicative: pentru gimnaziu şi liceu / Emil Stoica. - Bucureşti: Corint, 2009
Bibliogr.
ISBN 978-973-135-426-2

514.116(075.5)

Emil Stoica

TRIGONOMETRIA

Elementele de bază
în rezolvarea de exerciții şi probleme

Culegere de exerciții şi probleme aplicative

PENTRU GIMNAZIU ŞI LICEU

CORINT

În memoria profesorului SIMON PETRU

PREFAȚĂ

Dintotdeauna, şi mai ales în ultimii ani, s-a scris şi s-a publicat o mare varietate de culegeri de exerciții şi probleme care acoperă toate capitolele matematicii, atât pentru fixarea şi aprofundarea materialului expus în lecțiile predate în şcoli, cât şi pentru pregătirea examenelor de admitere la liceu, a examenului de bacalaureat sau a examenelor de admitere în diverse forme specializate de învățământ, inclusiv învățământul superior.

Aceste culegeri au fost şi sunt considerate materialul cel mai solicitat în pregătirea elevilor, practica rezolvării de exerciții şi probleme fiind de o indiscutabilă utilitate în vederea susținerii majorității formelor de examinare; această practică este şi obiectivul principal în toate formele de pregătire, individuală sau, mai ales, asistată (de tip „meditații”).

Rezolvarea de exerciții şi probleme constă însă în punerea în aplicare a unor instrumente care sunt furnizate doar de teoria matematicii, absolut şi evident indispensabile oricărei tentative de a aborda — fundamentat, creativ şi nu mecanic — practica rezolvării a ceea ce propun culegerile amintite.

Publicațiile sintetice de tip „Tabele şi formule matematice”, prin forma foarte concentrată a conținutului, nu pot constitui un material de studiu, fiind foarte utile doar după parcurgerea acestuia.

În aceste condiții (şi în mod curent), baza pregătirii teoretice a elevilor o constituie manualele şcolare, care urmăresc (cronologic, cu inevitabila dispersie) o programă analitică eşalonată pe toată perioada pregătirii şcolare.

În fața unui examen, elevii au la dispoziție şi utilizează în general, pentru partea teoretică, doar multitudinea manualelor şcolare; acestea oferă un bogat conținut informațional (foarte util primului contact), dar sunt de o eficiență redusă pentru un scop recapitulativ sau de sinteză, pentru aprofundare; la fel, în practica rezolvării de exerciții şi probleme.

În PARTEA I, lucrarea de față își propune să ofere, într-o formă compactă, dar nu sumară și evitând intenționat o prezentare sofisticată, sinteza elementelor teoretice de bază ale instrumentarului practic din TRIGONOMETRIE; la provocarea „CE” a culegerilor de exerciții și probleme se intenționează a se da răspunsul „CU CE” și „CUM”.

Scopul principal urmărit este punerea la dispoziția elevilor (și nu numai) a unui material ușor accesibil și unitar, sintetic, însă suficient de detaliat încât să poată constitui un material de însușire, de aprofundare sau de recapitulare — cu aplicare practică directă și prin studiu individual — a informațiilor furnizate în mai mulți ani de școlarizare.

Fără stăpânirea acestor informații (evident greșit catalogate uneori ca doar „teorie sterilă”), tentativa rezolvării practice de exerciții și probleme este un demers aproape inutil sau, cel mult, mecanic.

Prezentarea noțiunilor teoretice este însoțită de exemple și sugestii de aplicare, dându-se soluții sau metode de rezolvare a celor mai frecvent întâlnite cazuri în practica rezolvării de exerciții și probleme; din acest punct de vedere, lucrarea constituie un GHID PRACTIC aplicativ, care poate fi consultat și utilizat eficient chiar în timpul rezolvării unui exercițiu sau a unei probleme concrete.

În PARTEA a II-a sunt prezentate exerciții și probleme aplicative, cu indicații de rezolvare și răspunsuri corelate cu, și cu trimitere la PARTEA I, precum și exerciții și probleme aplicative fără indicații și răspunsuri.

Modul de prezentare vizează un nivel mediu de pregătire prealabilă, urmărind eficiența percepției, înțelegerea fondului noțiunilor (cu scop aplicativ în practica rezolvării de exerciții și probleme) și intenționând ca lucrarea să fie utilă cel puțin majorității cititorilor, atât în pregătirea școlară curentă, cât și, mai ales, în pregătirea premergătoare diverselor forme de testare sau examinare.

Autorul

CUPRINS

PARTEA I. Elementele de bază

PARTEA a II-a. Culegere de exerciţii şi probleme aplicative

PARTEA I. Elementele de bază

CONSIDERAŢII ŞI ELEMENTE PRELIMINARE

Matematica nu este abstractă! Abstractul este doar forma şi mediul în care matematica produce şi evoluează dar, dintotdeauna, matematica a plecat de la şi s-a întors – prin ceea ce a produs – la concretul fizic, fiind astfel un exponent al gândirii şi imaginaţiei intelectuale precum şi, poate, cel mai productiv instrument în evoluţia, dirijată de om, a lumii fizice.

Matematica realizează astfel legătura bi-sens dintre realul fizic concret şi „realul" abstract (având, ca fundamentare şi elemente de legătură, principiile logicii): se „inspiră" din concret, „creează" în abstract şi valorifică în acelaşi concret fizic de la care a pornit.

Având aceeaşi geneză şi evoluând în acelaşi fel, GEOMETRIA studiază (în esenţă, dar nu numai) figurile geometrice, ca ansamble de elemente geometrice. Pentru a răspunde necesităţilor practice, pe lângă analizarea calitativă a acestora, GEOMETRIA trebuie să dispună şi de posibilitatea determinării cantitative, prin calcul, a măsurii elementelor geometrice, componente ale figurilor geometrice şi intercorelate, ca măsuri, în ansamblul acestora.

TRIGONOMETRIA s-a născut şi s-a dezvoltat în GEOMETRIE, iniţial ca parte integrantă a acesteia şi asigurând acestei discipline matematice instrumente şi mijloace de calcul puternice, care permit determinarea cantitativă a măsurii tuturor elementelor unei figuri geometrice, fiind cunoscute măsurile unora dintre aceste elemente şi nu cu necesitate elemente identice tipologic.

Deşi relativ limitate, GEOMETRIA dispunea de instrumente de calcul cantitativ şi fără aportul TRIGONOMETRIEI (relaţii metrice, etc). Două exemple, comune, în acest sens:

1. fiind cunoscute măsurile a două unghiuri ale unui triunghi se poate determina, prin calcul aritmetic, măsura celui de-al treilea unghi, suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi fiind constantă (180^{o});

2. fiind cunoscute lungimile a două laturi ale unui triunghi dreptunghic, se poate determina, prin calcul algebric, lungimea laturii a treia, prin teorema lui Pitagora.

În ambele cazuri sunt implicate elemente geometrice identice tipologic (doar unghiuri sau doar segmente de dreaptă).

Cunoscând, ca măsuri, doar unghiurile unui triunghi, triunghiul este nedeterminat, problema având o infinitate de soluţii (toate triunghuri asemenea); determinarea printr-o eventuală soluţie unică impune precizarea măsurii a cel puţin unui element liniar (latură).

Suntem deci frecvent în situaţia de a calcula măsurile unor unghiuri şi segmente de dreaptă cunoscând (fiind date) măsuri ale celorlalte unghiuri şi/sau segmente de dreaptă într-o figură geometrică.

În acest moment intervine TRIGONOMETRIA prin definirea **funcţiilor trigonometrice**, ca propriu fundament (dezvoltat ulterior) şi ca prim pas în abordarea şi soluţionarea unei astfel de situaţii.

Prin modul, deloc întâmplător, în care sunt definite funcţiile trigonometrice, acestea realizează în esenţă:

– alocarea unui număr abstract, adimensional (fără „unitate de măsură”) fiecărei măsuri de arc / unghi (cu „unitate de măsură”), pe care o reflectă univoc, iar acest număr poate fi utilizat ca atare în calcule;

– legătura între măsuri de arce / unghiuri şi lungimi de segmente, permiţând corelarea cantitativă între cele două tipuri de elemente, liniare şi unghiulare.

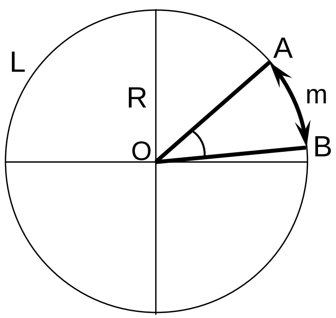
Tot nu întâmplător şi deoarece figurile geometrice pot fi descompuse într-un număr (finit sau infinit) de triunghiuri, funcţiile trigonometrice se definesc într-un triunghi şi se referă, în primă instanţă, la triunghiuri (de unde şi etimologia cuvântului „TRIGONOMETRIE”).

NOTĂ: în cazul multor probleme de geometrie, rezolvarea trigonometrică poate fi mai simplă şi mai rapidă decât rezolvarea geometrică!

Evoluând nu doar ca resursă pentru GEOMETRIE, ci şi în interiorul său, TRIGONOMETRIA şi-a dobândit propria personalitate şi statutul entitativ în matematică, având aplicabilitate şi în alte discipline ale acesteia (vezi ALGEBRA, numerele complexe).

Unităţile de măsură pentru arce / unghiuri

Se consideră un cerc de rază R (oarecare), cu centrul în punctul O.



Notăm cu L lungimea acestui cerc.

Pentru oricare cerc şi independent de raza sa R, raportul $\frac{L}{R}$ este constant şi valoric acelaşi, având

$$\frac{L}{R} = 2\pi \quad (L = 2\pi R; \quad \pi = \frac{\text{Lungime cerc}}{\text{Diametru cerc}} = 3{,}1415928 \ldots).$$

În cercul dat considerăm:

un arc de cerc, $\overset{\frown}{AmB}$;

unghiul la centru $\widehat{AOB}$, care subîntinde arcul de cerc $\overset{\frown}{AmB}$.

Avem (pentru orice arc şi unghi la centru care îl subîntinde):

$$\text{măsura } (\widehat{AOB}) = \text{măsura } (\overset{\frown}{AmB})$$

Unităţile de măsură pentru arce sunt (orice R, implicit L):

– arcul de 1 grad (1^o),
arcul a cărui lungime este $\frac{L}{360}$;

– arcul de 1 radian (1 rad),
arcul a cărui lungime este egală cu lungimea razei R.

Rezultă că măsura unui cerc este de 360^o sau 2π rad.

Unităţile de măsură pentru unghiuri sunt:

– unghiul de 1 grad (1^o),
unghiul la centru care subântinde arcul de 1 grad;

– unghiul de 1 radian (1 rad),
unghiul la centru care subântinde arcul de 1 radian.

Submultiplii arcului / unghiului de 1 grad (1^o) sunt:
arcul / unghiul de 1 minut (1')
arcul / unghiul de 1 secundă (1")
cu: 1 grad (1^o) = 60 x [1 minut (1')] = 60 x [60 x 1 secundă (1")]

De notat: considerând oricâte cercuri concentrice cu raze R (şi, implicit, lungimi $L = 2\pi R$) diferite, un unghi la centru subîntinde în cercurile respective arce de lungimi diferite (dependente de raza R), dar cu aceeaşi măsură, exprimată în grade sau în radiani.

Cunoscând măsurile α şi β (exprimate în grade sau radiani) a, respectiv, două arce / unghiuri date, se definesc cele două arce / unghiuri ca fiind:

„complementare”, dacă: $\alpha + \beta = 90^o$ sau $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ rad;

„suplementare”, dacă: $\alpha + \beta = 180^o$ sau $\alpha + \beta = \pi$ rad.

Funcţii

În sens matematic, funcţia este un procedeu bine determinat, prin care, pornind de la elementele unei mulţimi, se creează / generează elemente care aparţin unei noi mulţimi. Funcţia stabileşte astfel o corespondenţă determinată între cele două mulţimi.

Considerând elementele $a \in A$, printr-un procedeu, simbolizat f, se generează elementele $b \in B$, dependente de elementele a prin procedeul f, ceea ce se scrie:

$$\mathbf{b = f(a)}$$

Relaţia de mai sus conţine trei componente:

elementele „sursă”: a ....

.... procedeul: f ....

.... elementele „destinaţie”: b

(b rezultă din aplicarea lui f asupra lui a).

Condiţia de unicitate: oricărui element a i se asociază, prin f, un element unic b.

Pentru funcţia f se definesc:

– variabila independentă, orice element din mulţimea A;
– variabila dependentă / valoarea funcţiei, orice element din mulţimea B;

– domeniul de definiţie al funcţiei, mulţimea A;
– codomeniul / domeniul de valori ale funcţiei, mulţimea B.

Se spune:

funcţia f este definită pe A, cu valori în B,

şi se scrie $\mathbf{f : A \rightarrow B}$

De notat: condiţiile de existenţă ale procedeului / funcţiei impun restricţii asupra domeniului de definiţie; întotdeauna, primul pas în analiza unei funcţii date este stabilirea domeniului său de definiţie!

Funcţia inversă a unei funcţii date $f : A \rightarrow B$ se notează cu f^{-1} şi este funcţia $\mathbf{f^{-1} : B \rightarrow A}$ adică este procedeul prin care, cunoscând o valoare b a funcţiei, se determină valoarea variabilei independente a care a generat-o prin f.

Logaritmarea; logaritmul

$\log_a P = n$ astfel încât (deoarece) $a^n = P$.

$\log_a P = \log_b P$ implică $a = b$

$\log_a A = \log_a B$ implică $A = B$

$\log_a 1 = 0$ ($a^0 = 1$ pentru orice a)

$\log_a a = 1$ ($a^1 = a$ pentru orice a)

$$\log_a (A \times B) = \log_a A + \log_a B$$

deci: $\log_a A^m = m \log_a A$ şi implicit: $\log_a \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \log_a A$

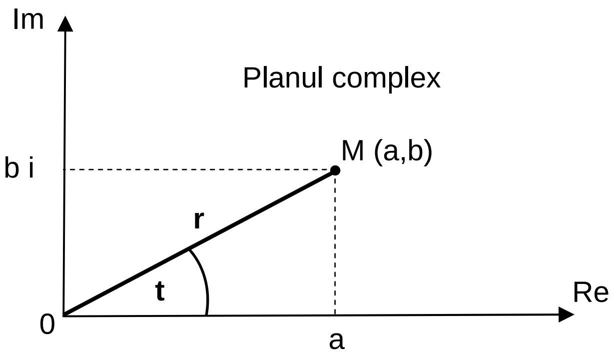
$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

Numere complexe

$$\mathbf{i} = \sqrt{(-1)}$$, unitatea imaginară.

Forma algebrică a numerelor complexe

$$z = a + b\,i$$



Rezultă: $a = \mathbf{r} \cos \mathbf{t}$ şi $b = \mathbf{r} \sin \mathbf{t}$

respectiv $\mathbf{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$ şi $\mathbf{t} = \mathrm{arctg}\, \frac{b}{a}$

Aceste relaţii permit conversia coordonatelor polare
„modul” **r**, „argument” **t**
în coordonate carteziene
(a, b)
şi reciproc, deci

$$z = a + b\,i = \mathbf{r} \cos \mathbf{t} + i\, \mathbf{r} \sin \mathbf{t} = \mathbf{r}\,(\cos \mathbf{t} + i \sin \mathbf{t}).$$

Forma de scriere

$$z = \mathbf{r}\,(\cos \mathbf{t} + i \sin \mathbf{t})$$

reprezintă forma trigonometrică a numerelor complexe.

Puterile naturale ale unităţii imaginare i:

$$i^0 = 1;\ i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i$$
$$i^4 = 1;\ i^5 = i;\ i^6 = -1;\ i^7 = -i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$i^n = i^r \quad \text{cu} \quad r = 0, 1, 2, 3 \quad \text{pentru orice } n \in N$$

Operaţii în forma algebrică

Dacă $z = a + b i$, $z^* = a - b i$ este „conjugatul" lui z.

$z \times z^* = a^2 + b^2$

adică $z \times z^* \in R$ şi $z \times z^* \geq 0$.

$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\, i = a + b\, i$

$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i = a + b\, i$

$z = z_1 / z_2 = z_1 z_2^* / z_2 z_2^* = z_1 z_2^* / (a_2^2 + b_2^2) =$

$= [(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, i] / (a_2^2 + b_2^2)] =$

$= \underbrace{[(a_1 a_2 + b_1 b_2) / (a_2^2 + b_2^2)]}_{a} + \underbrace{[(a_2 b_1 - a_1 b_2) / (a_2^2 + b_2^2)]}_{b}\, i =$

$= a + b\, i.$

$z_1 = z_2$ implică $a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$.

Pentru un număr real $a \in R$ avem:

$a > 0 \quad r = |a|,\ t = 0;$

$a < 0 \quad r = |a|,\ t = \pi$

Pentru un număr imaginar bi avem:

$b > 0 \quad r = |b|,\ t = \pi / 2;$

$b < 0 \quad r = |b|,\ t = 3\pi / 2$