MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Amalia Mărășescu, Bianca Vișan
Design copertă: Ionuț Broștianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 7-a / coord.: Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu, ... - Pitești : Cartea Românească Educațional, 2018
Index
ISBN 978-606-94581-6-7

I. Gologan, Radu (coord.)
II. Cicu, Ion (coord.)
III. Negrescu, Alexandru (coord.)
51

Cartea Românească EDUCAȚIONAL

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)
Petru Marian Braica Adrian Bud

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a VII-a

(2012 – 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Prefață

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii românești. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 și nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniți matematicieni, și-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibile elevilor cu drag de matematică. Așa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă și azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintașilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei Matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie și nu neapărat olimpici.** În plus, nu am pretins ca problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes și vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile și creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan

Președintele Societății de Științe Matematice din România

PARTEA I

ARITMETICĂ TEORIA NUMERELOR

Capitolul I.1.
NUMERE ÎNTREGI

I.1.1. OPERAŢII. MODUL

1. Calculați $|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-2010|$, ştiind că $1005 \le x \le 1006$.

Argentina Dobrescu, Câmpulung Muscel **(S:E12.361)**

2. Aflați numerele întregi x, y pentru care $||x-3|+|y-2x||=3$.

* * * **(S:E13.310)**

3. Calculați media aritmetică a numerelor: $A=(-1)^0 \cdot 1+(-1)^1 \cdot 2+(-1)^2 \cdot 3+\ldots+$ $+(-1)^{2013} \cdot 2014+(-1)^{2014} \cdot 2015$ şi $B=1+2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$.

Vasile Uleanu, Curtea de Argeş **(S:E14.261)**

4. Demonstrați că numărul $a=2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 2014$ se scrie ca produs de 504 numere naturale consecutive.

Laura Vucan şi *Gheorghe Molea*, Curtea de Argeş **(S:E14.262)**

5. Se dau numerele: $a=\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+\ldots+\sqrt{3^{2016}}$, $b=3+3^2+3^3+\ldots+3^{2016}$, $c=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}-1$. Arătați că c este pătrat perfect.

Luca Tuță, Buzău **(S:E15.144)**

I.1.2. DIVIZIBILITATE. ECUAŢII ÎN $\mathbb{Z}$

1. Pentru n număr natural construim numerele $a=2n+1$, $b=3n+2$, $c=4n+3$. Demonstrați că $\frac{[a,b]+[b,c]}{2}$ este pătrat perfect, cel puțin egal cu 4. (Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y.)

Argentina Dobrescu, Câmpulung Muscel **(S:E12.364)**

2. În luna ianuarie 2011 salariul unei persoane era de 2700 lei. În cursul anului ea beneficiază de o singură majorare salarială de 20%. Stabiliți în care lună a anului se aplică această majorare salarială, ştiind că venitul salarial pe anul 2011 a fost de 35100 lei.

Marian Teler, Costeşti, Argeş **(S:E12.407)**

3. La 1.01.2012 două persoane au salariul lunar de 2700 lei, respectiv 2600 lei. Pe parcursul anului, prima persoană beneficiază de o mărire de salariu de 20%, iar cea de-a doua de o mărire de 15%. Stabiliți în ce luni ale anului se aplică aceste majorări, astfel încât veniturile lor pe anul 2012 să fie egale.

Marian Teler, Costeşti, Argeş **(S:E12.410)**

4. Determinați cel puțin două valori ale numărului rațional pozitiv n pentru care $\sqrt{115n+23}$ este număr rațional.

Viorel Alb, Moisei, Maramureş **(S:E12.441)**

5. Demonstrați că, pentru orice n număr natural, este adevărată relația: $\sqrt{2^n+7}$ + + $\sqrt{3^n+10}$ + $\sqrt{7^n+3}$ $\notin \mathbb{N}$.

Bogdan Zetea, Sighetu Marmației **(S:E12.442)**

6. Arătați că numărul $A = (a + 259)^{2012} - (a + 111)^{2012}$ se divide cu 37, pentru orice a număr natural.

Elisabeta Stanciu şi *Daniel Stanciu*, Beclean, Bistrița-Năsăud **(S:E12.485)**

7. Dacă x, y, z sunt numere întregi cu proprietatea că $2x - 3y - 10z = 0$, demonstrați că $y(x + z)(x + y)$ este un multiplu de 30.

Nazeli Boicescu, Brăila **(S:E12.501)**

8. a) Scrieți numărul 504 ca sumă de trei numere consecutive şi ca produs de trei numere consecutive.

b) Arătați că dacă un număr natural nenul poate fi scris ca produs de trei numere consecutive, atunci el poate fi scris şi ca sumă de trei numere consecutive.

Constantin Apostol, Rm. Sărat **(S:E12.563)**

9. Aflați cardinalul mulțimii: $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x = \dfrac{n^2+21n}{n-1},\, n \in \mathbb{N},\, n \neq 1 \right\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova **(S:E12.568)**

10. Determinați elementele mulțimii: $M = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x = \dfrac{n^4-3}{n^2-3},\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Dumitru Săvulescu, Bucureşti **(S:E12.570)**

11. Fie numărul $A = \dfrac{1}{9}n^2(n^2-1)^2(3n^2+n-2)+4$, unde n este număr natural nenul. Arătați că numărul A este multiplu de 4.

Vasile Tarciniu, Odobeşti, Vrancea **(S:E12.689)**

12. Determinați numerele naturale n pentru care $n + 2$ este cel mai mare divizor comun al numerelor $5n + 13$ şi $4n + 11$.

Nicolae Secelean, Sibiu **(S:E12.690)**

13. Arătați că $\sqrt{2008^{2009}+2009^{2010}+2010^{2011}+2011^{2012}+2012^{2013}}$ este număr irațional.

Anca Mihiş, Baia Mare **(S:E13.21)**

14. Fie numerele întregi a, b, c, astfel încât $20a - 7c = 15b$. Arătați că produsul $(a + b) \cdot c$ este divizibil cu 35.

Maria Petrescu, Bucureşti **(S:E13.106)**

15. Suma cifrelor unui număr natural P este 5. Demonstrați că $\sqrt{P}$ este număr irațional.

Victor Nicolae, Bucureşti **(S:E13.190)**

16. Arătați că există a un număr natural, astfel încât $A = 5^{3n+a} \cdot 3^{3n+1} + 1$ este divizibil cu 7.

Argentina Dobrescu, Câmpulung Muscel **(S:E13.341)**

17. Găsiți două numere naturale, ştiind că diferența pătratelor lor este 1805, iar cel mai mare divizor comun al lor este 19.

Simona Pavel, Câmpulung Muscel **(S:E13.342)**

PARTEA a II-a

ALGEBRĂ

Capitolul II.1.
NUMERE REALE

II.1.1. NUMERE RAŢIONALE. NUMERE IRAŢIONALE

1. Arătați că mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle| x = \dfrac{4a+1}{4a-3}, a \in \mathbb{N} \right\}$ şi $B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \middle| y = \dfrac{5b+3}{5b-2}, b \in \mathbb{N} \right\}$ sunt disjuncte.

Virginia Tică-Diaconu, Câmpulung Muscel **(S:E12.366)**

2. Determinați numerele raționale a şi b pentru care: $3(a - \sqrt{7}b) = \sqrt{7}(1-a) + b$.

Vasile Tarciniu, Odobeşti, Vrancea **(S:E12.688)**

3. Aflați numerele raționale a şi b, ştiind că $|a-2| + \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = |b+3|\sqrt{2}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova **(S:E14.67)**

4. Se consideră numărul natural nenul n şi numărul $A_n = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} - \ldots - \dfrac{1}{2^n}}$.

a) Arătați că $A_2 + A_4 + \ldots + A_{2012}$ este număr rațional, iar $A_1 + A_3 + \ldots + A_{2013}$ este număr irațional.

b) Calculați $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{2013}$.

Ion Voicu, Răduleşti, Ialomița **(S:E14.107)**

5. Arătați că numărul $a_n = \sqrt{19^n + 2014}$ nu este rațional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Adriana Niță şi *Nicolae Niță*, Curtea de Argeş **(S:E14.265)**

6. Rezolvați ecuația $\dfrac{x+4}{1} + \dfrac{x+12}{3} + \dfrac{x+28}{5} + \ldots + \dfrac{x+4(n^2-n+1)}{2n-1} = n^2$, unde n este un număr natural nenul.

Ion Safta, Piteşti **(S:E14.304)**

7. Fie x număr real, astfel încât $2x^2 + 5x + 6$ şi $3x^2 + 4x + 5$ sunt numere raționale. Arătați că x este număr rațional.

Vasile Scurtu, Bistrița **(S:E14.305)**

8. Demonstrați că pentru orice n număr natural, numărul $\sqrt{2013^n + 2015}$ este irațional.

Matei Tincă, elev, Bucureşti **(S:E15.24)**

9. Demonstrați că numărul $a = \sqrt{9-\sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7}) \cdot (9 + \sqrt{77})$ este natural.

Luca Tuță, Buzău **(S:E15.29)**

10. Pentru n număr natural nenul definim numărul $A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3} + \sqrt{1+3+5} + \ldots + \sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

a) Arătați că numărul $\sqrt{8A+1}$ este rațional, pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

b) Arătați că numărul $\sqrt{2A+1}$ este irațional, pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Horațiu Morar, Bistrița **(S:E15.188)**

11. Dacă $a = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2^{n+1}}}}}}$, determinați numărul natural n, astfel încât numărul $b = \sqrt{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}$ să fie rațional.

Horațiu Morar, Bistrița **(S:E15.190)**

12. Fie a, b, c numere raționale nenule, astfel încât oricare două sunt diferite între ele. Ştiind că $c = a + b$, calculați $\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}\right)$.

Mihai Vijdeluc şi *Vasile Ienuțaş*, Baia Mare **(S:E15.223)**

13. Vom numi „număr egiptean”, un număr natural egal cu suma numitorilor unor numere raționale pozitive, distincte, cu numărătorul 1, suma acestor numere raționale fiind, la rândul său, un număr natural. De exemplu, 11 este un număr egiptean, deoarece $11 = 2 + 3 + 6$ şi $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = 1$.

a) Arătați că 24 este un număr egiptean.

b) Arătați că orice număr de forma $\dfrac{n(n+2)}{3}$, unde $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, este număr egiptean.

George-Florin Şerban, Brăila **(S:E15.265)**

14. Arătați că $\sqrt{2010n+\dfrac{n(n^2+11)}{2}+2012} \notin \mathbb{Q}$, oricare ar fi n număr natural.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila **(S:E15.267)**

15. a) Arătați că există numere naturale nenule a şi b pentru care $\sqrt{13a^2+b^2}$ este număr rațional.

b) Arătați că, pentru orice numere naturale nenule a şi b, numerele $\sqrt{13a^2+b^2}$ şi $\sqrt{a^2+13b^2}$ nu pot fi simultan raționale.

Ion Neață, Slatina **(S:E16.24)**

16. Se consideră numerele naturale m şi n astfel încât $2^m + 3^n$ este multiplu de 5. Arătați că fracția $\dfrac{2^n+3^m}{3^{2p+3}-2^{2p+1}}$ este reductibilă, pentru orice număr natural p.

Ion Neață, Slatina **(S:E16.25)**

17. Determinați numerele reale a, b, $c > 0$ pentru care $a + b + c + ab + bc + ca = 6\sqrt{abc}$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:E16.61)**

PARTEA a III-a

GEOMETRIE

Capitolul III.1.
TRIUNGHIUL

III.1.1. CALCULUL MĂSURILOR UNOR UNGHIURI. COLINIARITATE

1. Fie unghiul ascuțit XOY şi P un punct în interiorul său. Notăm cu M şi N simetricele lui P față de OX, respectiv OY. Ştiind că $MN = OP \cdot \sqrt{2}$, calculați măsura unghiului XOY.

Cristina Vijdeluc şi *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare **(S:E12.484)**

2. În triunghiul ABC se ştie $m(\sphericalangle A) = 2x + 30°$ şi $m(\sphericalangle B) = 8x - 60°$. Determinați x, dacă triunghiul este dreptunghic.

*** * * (S:E12.601)**

3. Pe ipotenuza BC a triunghiului ABC se iau punctele D şi E, astfel încât $[BD] \equiv [AB]$ şi $[CE] \equiv [AC]$. Aflați măsura unghiului DAE.

*** * * (S:E12.602)**

4. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) se construieşte bisectoarea unghiului C, care intersectează înălțimea AD ($D \in BC$) în P. Arătați că triunghiul APE este isoscel.

*** * * (S:E12.603)**

5. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) construim BD înălțime ($D \in (AC)$). Fie E un punct pe dreapta BD, astfel încât $D \in (BE)$ şi $BD = DE$.

a) Arătați că triunghiul ABE este isoscel.

b) Arătați că $AE \parallel BC$.

*** * * (S:E12.604)**

6. Fie AB un segment şi P un punct aparținând segmentului AB, diferit de mijlocul segmentului. Pe perpendicularele în A şi B pe dreapta AB se iau, de aceeaşi parte a lui AB, punctele M, respectiv N, astfel încât $[AM] \equiv [BP]$ şi $[BN] \equiv [AP]$.

a) Arătați că $\Delta APM \equiv \Delta BNP$.

b) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului MNP.

*** * * (S:E12.606)**

7. Un triunghi ABC are $m(\sphericalangle B) = 15°$ şi $m(\sphericalangle C) = 30°$. Aflați măsura unghiului format de înălțimea din A şi bisectoarea unghiului A.

*** * * (S:E12.607)**

8. Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului echilateral ABC se iau punctele M, N, respectiv P, astfel încât lungimile segmentelor AM, BN şi CP să fie egale. Dacă $MC \cap PB = \{E\}$, $AN \cap PB = \{F\}$ şi $MC \cap AN = \{G\}$, arătați că triunghiul EFG este echilateral.

*** * * (S:E12.609)**

9. În triunghiul isoscel ABC ($AC = BC$) cu $m(\sphericalangle C) = 40°$, mediatoarea segmentului AC intersectează dreapta AB în Q, iar pe BC în P. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului PQC.

*** * * (S:E12.610)**

10. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi BE ($E \in AC$) bisectoarea unghiului ABC, construim AD ($D \in [BC]$), astfel încât $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AMB$, unde M este intersecţia lui BE cu bisectoarea unghiului DAC. Aflaţi măsura unghiului ADB.

Constantin Apostol, Rm. Sărat **(S:E12.643)**

11. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), înălţimea din B se intersectează cu bisectoarea exterioară a unghiului C în D. Dacă $\{E\} = AD \cap BC$ şi $m(\sphericalangle A) = 36°$, arătaţi că $BD = AD$ şi $DC = DE$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău **(S:E13.29)**

12. În triunghiul ABC, AD ($D \in BC$) este înălţime. Ştiind că $3 \cdot AB = 2 \cdot DC$ şi $AC^2 = 12 \cdot BD^2$, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Constantin Apostol, Rm. Sărat **(S:E13.144)**

13. Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, ştiind că punctele A, O şi I sunt coliniare şi că $m(\sphericalangle BIC)$ este cu $36°$ mai mare decât $m(\sphericalangle BOC)$. (Am notat cu O centrul cercului circumscris triunghiului şi cu I centrul cercului înscris în triunghi.)

Constantin Apostol, Rm. Sărat **(S:E13.146)**

14. În triunghiul ascuţitunghic ABC, fie B' şi C' picioarele înălţimilor din B şi, respectiv, C, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$. Dacă M este mijlocul laturii BC iar triunghiul $MB'C'$ este echilateral, determinaţi măsura unghiului BAC.

Grigore Dumitru, Măcin **(S:E13.184)**

15. Fie punctele M şi N mijloacele laturilor (AB), respectiv (CD), ale paralelogramului $ABCD$, unde $\{O\} = AC \cap BD$, iar punctele O_1 şi O_2 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv BCD. Ce condiţie trebuie să îndeplinească paralelogramul $ABCD$, astfel încât punctele M, O_1, O_2, O şi N să fie coliniare?

Anton Apostoaie, Botoşani **(S:E13.267)**

16. Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $AB \perp AC$, şi punctul E mijlocul segmentului (BD), unde $D \in (AC)$, astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = 15°$. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle DEC$.

Artur Bălăucă, Botoşani **(S:E13.269)**

17. Considerăm triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle ABC) = 80°$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 60°$. Pe latura (BC) se iau punctele M şi N, astfel încât $m(\sphericalangle BAM) = 20°$ şi $m(\sphericalangle NAC) = 10°$. Arătaţi că $(MB) \equiv (NC)$.

Artur Bălăucă, Botoşani **(S:E13.270)**

18. Se dă triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 90°$. Fie punctul $M \in (BC)$ şi P, respectiv Q simetricele punctului M faţă de AB, respectiv AC.

a) Arătaţi că punctele P, A, Q sunt coliniare.

b) Dacă $AM \perp BC$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 15°$, aflaţi perimetrul triunghiului MPQ, în funcţie de lungimile laturilor triunghiului dreptunghic ABC.

Daniela Tilincă şi *Adriana Mihăilă*, Brăila **(S:E14.21)**

19. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, $AB = 2 \cdot DC$. Notăm mijloacele diagonalelor AC şi BD cu E, respectiv F. Dacă $EM \parallel AD$, $M \in BD$, $FN \parallel BC$, $N \in AC$, şi P este mijlocul lui AB, arătaţi că:

a) punctele D, E, P sunt coliniare; b) $MN = \dfrac{AB}{8}$.

Concursul „Micul matematician”, Negreşti-Oaş **(S:E14.104)**

20. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle AOE$, astfel încât $\sphericalangle AOE$ este alungit şi $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{n+2}=\frac{m(\sphericalangle BOC)}{n+3}=\frac{m(\sphericalangle COD)}{n+4}=\frac{m(\sphericalangle DOE)}{n+5}$, unde n este număr natural şi $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ divide pe 120. Fie $(OM$, $(ON$, $(OP$, $(OQ$ respectiv bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle MON$. Aflați $m(\sphericalangle POQ)$.

Geanina Dumitraşcu, Brăila **(S:E14.226)**

21. Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 puncte în plan distincte, oricare trei necoliniare. Notăm $A_1A_3 \cap A_2A_5 = \{M\}$, $A_1A_3 \cap A_2A_4 = \{N\}$, $A_2A_4 \cap A_3A_5 = \{P\}$, $A_1A_4 \cap A_3A_5 = \{Q\}$, $A_2A_5 \cap A_1A_4 = \{R\}$. Calculați $m(\sphericalangle MA_1R) + m(\sphericalangle MA_2N) + m(\sphericalangle NA_3P) + m(\sphericalangle PA_4Q) + m(\sphericalangle QA_5R)$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila **(S:E14.228)**

22. Fie triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 36°$. În interiorul triunghiului ABC se consideră punctul M, astfel încât $m(\sphericalangle MBC) = 24°$ şi $m(\sphericalangle MCB) = 30°$. Fie $\{N\} = AM \cap BC$. Determinați $m(\sphericalangle ANC)$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila **(S:E14.229)**

23. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle B) = 40°$ şi $m(\sphericalangle C) = 80°$, pe bisectoarea $[BD$, $D \in AC$, a unghiului $\hat{B}$ se ia punctul E, astfel încât $[DE] \equiv [AB]$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle AED$.

Ion Tudor, Băbana, Argeş **(S:E14.302)**

24. Pe laturile AB şi BC ale triunghiului echilateral ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $[BD] \equiv [BE]$. Dacă O este mijlocul lui (AD) şi $\{F\} = EO \cap AC$, arătați că $[EA] \equiv [DF]$.

Eugeniu Blăjuț, Bacău **(S:E14.306)**

25. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Perpendiculara în A pe AC se intersectează cu perpendiculara în B pe AB în D, iar $E \in (AD)$, astfel încât $\Delta ABD \equiv \Delta CAE$. Ştiind că $EB \perp BC$, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

Maranda Linț şi *Dorin Linț*, Deva, Hunedoara **(S:E14.344)**

26. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte trapezul $BCEF$ cu $CE \parallel BF$ şi $BF = EF$, astfel încât $[AE \cap [DF = \{B\}$. Fie M mijlocul laturii $[CE]$ şi P, Q punctele în care paralela prin E la AF intersectează latura $[BC]$ şi, respectiv, diagonala $[AC]$.

a) Stabiliți natura triunghiului ACF.

b) Demonstrați că punctele A, M şi P sunt coliniare.

Aurel Adam, Roşiorii de Vede **(S:E15.110)**

27. În exteriorul triunghiului oarecare ABC se construiesc triunghiurile ACP şi ABR, astfel încât $(CP) \equiv (BR)$ şi $(BP) \equiv (CR)$. Dacă $CP \cap BR = \{S\}$, demonstrați că:

a) $PR \parallel CB$;

b) $ST \perp PR$, unde $\{T\} = BP \cap CR$.

Mihaela Baltă, Brăila **(S:E15.262)**

28. Fie $ABCD$ un paralelogram şi $AC \cap BD = \{O\}$. Construim pătratele $AOPQ$ şi $DOST$, astfel încât Q şi S se află de o parte şi de alta a dreptei BD. Demonstrați că punctele Q, O, T sunt coliniare dacă şi numai dacă $ABCD$ este romb.

Daniela Stănică şi *Nicolae Stănică*, Brăila **(S:E15.269)**

PARTEA a IV-a

COMBINATORICĂ

Capitolul IV.1.
METODE DE NUMĂRARE

IV.1.1. COMBINATORICA MULŢIMILOR

1. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 14, 15\}$. Dați un exemplu de două submulțimi B, C ale lui A, astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

i) $B \cap C = \varnothing$; ii) $B \cup C = A$; iii) card $B = 7$ şi card $C = 8$;

iv) suma pătratelor elementelor lui B este egală cu suma pătratelor elementelor lui C.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş **(S:E14.61)**

IV.1.2. PROBLEME DIVERSE

1. În punctele A, B, C, D, M, N, P, Q, O sunt scrise numerele de la 1 la 9, astfel încât numărul scris în M reprezintă media aritmetică a numerelor din A şi B, cel din N este media aritmetică a numerelor din B şi C, numărul din P este media aritmetică a numerelor din C şi D, iar numărul din Q reprezintă media aritmetică a numerelor din D şi A. Numărul din O este media aritmetică a numerelor din M, N, P şi Q. Arătați că numărul din O este egal cu 5 şi prezentați o astfel de situație.

Concursul „Laurențiu Panaitopol”, Giurgiu, 2015 **(S:E15.182)**

2. Arătați că nu există numere întregi x pentru care numerele $\frac{2x+3}{5}$ şi $\frac{3x+1}{5}$ să fie simultan întregi.

Nicolae Ivăşchescu, Canada **(S:E15.301)**

Capitolul IV.2.
PRINCIPIUL CUTIEI

1. Arătați că, oricum am aşeza 626 puncte în interiorul unui triunghi echilateral de latură 1, există cel puțin două puncte astfel încât distanța dintre ele să fie cel mult 0,04.

Augustini Moraru şi *Daciana Moraru*, Arad **(S:E12.522)**

2. Demonstrați că, printre 2025 numere naturale distincte, există 729 numere a căror sumă este divizibilă cu 9.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila **(S:E14.224)**

3. Fie a, b, c trei numere naturale impare. Arătați că cel puțin două dintre numerele a^4, b^4, c^4 au suma sau diferența multiplu al lui 10.

Daniel Stanciu şi *Elisabeta Stanciu*, Beclean **(S:E15.221)**

Capitolul IV.3.
INVARIANŢI

IV.3.1. PRINCIPIUL PARITĂŢII

1. Determinați numerele naturale a, b şi numărul prim p, ştiind că $a^2 + a = p^{2^b} + 2$.

Pavel Rîncu, Bozovici, Caraş-Severin **(S:E15.63)**

2. Fie mulțimea $A = \{2k + 3p \mid k, p \in \mathbb{Z}\}$. Calculați $\mathbb{Z} \setminus A$.

Gheorghe Râmbu, Baia Mare **(S:E15.224)**

IV.3.2. PROBLEME DIVERSE

1. Fie a, b, c numere raționale, astfel încât $ab + bc + ca = 1$. Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$.

Nastasia Chiciudean, Bistrița **(S:E13.66)**

2. Fie numărul $n = \underbrace{999...9}_{k \text{ cifre}}$, cu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

a) Pentru $k = 9$, calculați suma cifrelor numărului n^2.

b) Arătați că, pentru $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, suma cifrelor numărului n este egală cu suma cifrelor numărului n^2.

Maranda Linț şi *Dorin Linț*, Deva, Hunedoara **(S:E14.348)**

3. Se consideră numărul $a_n = 18\underbrace{77...77}_{}889$, cu n număr natural, şi c_n câtul împărțirii numărului a_n la 13.

a) Arătați că a_n se divide cu 13 pentru oricare n.

b) Determinați n pentru care $s(a_n) = 2s(c_n)$, unde $s(m)$ reprezintă suma cifrelor numărului m.

Marius Burtea, Alexandria **(S:E15.107)**

PARTEA I. ARITMETICĂ. TEORIA NUMERELOR

CAPITOLUL I.1. NUMERE ÎNTREGI

I.1.1. OPERAŢII. MODUL

1. (S:E12.361) Are loc $1005 \leq x \leq 1006 \Rightarrow x - k \geq 0$, pentru $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 1005\}$, deci $|x - k| = x - k$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, 1005\}$, iar pentru $k \in \{1006, \ldots, 2010\}$, $x - k \leq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow |x - k| = k - x$. Prin urmare, $|x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 2010| = x - 1 + x - 2 + \ldots +$ $+ x - 1005 + 1006 - x + 1007 - x + \ldots + 2010 - x = (1006 - 1) + (1007 - 2) + \ldots +$ $+ (2010 - 1005) = 1005 \cdot 1005 = 1005^2$.

2. (S:E13.310) Discuție pe cazuri. $||x - 3| + |y - 2x|| = 3 \Leftrightarrow |x - 3| + |y - 2x| = \pm 3$.

Deoarece modulul nu este negativ $\Rightarrow |x - 3| + |y - 2x| = 3$. $|x - 3| = \begin{cases} -x + 3, & x < 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$.

Cazul I. Dacă $x < 3 \Rightarrow -x + 3 + |y - 2x| = 3 \Leftrightarrow |y - 2x| = x$. Dacă $x < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții. Dacă $x \in [0, 3) \Rightarrow y - 2x = \pm x \Rightarrow$ (1) $y - 2x = x \Rightarrow y = 3x \Rightarrow S_1 = \{(0, 0); (1, 3); (2, 6)\}$ şi (2) $y - 2x = -x \Rightarrow y = x \Rightarrow S_2 = \{(0, 0); (1, 1); (2, 2)\}$.

Cazul II. Dacă $x \geq 3 \Rightarrow x - 3 + |y - 2x| = 3 \Leftrightarrow |y - 2x| = 6 - x$. Dacă $x > 6 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții. Dacă $x \in [3, 6] \Rightarrow y - 2x = \pm(6 - x) \Rightarrow$ (3) $y - 2x = 6 - x \Rightarrow y = x + 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_3 = \{(3, 9); (4, 10); (5, 11); (6, 12)\}$ şi (4) $y - 2x = -6 + x \Rightarrow y = 3x - 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_4 = \{(3, 3); (4, 6); (5, 9); (6, 12)\}$.

Deci $S = \{(0, 0); (1, 1); (1, 3); (2, 2); (2, 6); (3, 3); (3, 9); (4, 6); (4, 10); (5, 9); (5, 11); (6, 12)\}$.

3. (S:E14.261) $A = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \ldots - 2014 + 2015 = \underbrace{(-1) + \ldots + (-1)}_{2014:2=1007} +$ $+ 2015 = -1007 + 2015 = 1008$, $B = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = 2 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{10} =$ $= 2^2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = \ldots = 2^{10} + 2^{10} = 2^{11} = 2048$. $m_a(A, B) = (A + B) : 2 = (1008 +$ $+ 2048) : 2 = 504 + 1024 = 1528$.

4. (S:E14.262) Avem succesiv $a = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1007 = 2^{503} \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot$ $\cdot \ldots \cdot 1007) = 2^{503} \cdot \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1006 \cdot 1007}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1006} = \dfrac{\cancel{2^{503}} \cdot 1007!}{\cancel{2^{503}} \cdot 503!} = 504 \cdot 505 \cdot \ldots \cdot 1007$ (produs de $1007 - 503 = 504$ factori consecutivi).

5. (S:E15.144) Folosim formula $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. Calculăm: $a = \sqrt{3} +$ $+ (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 + \ldots + (\sqrt{3})^{2016} = \sqrt{3}\,[1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 + \ldots + (\sqrt{3})^{2015}] =$ $= \sqrt{3} \cdot \dfrac{(\sqrt{3})^{2016} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{3^{1008} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 1)(3^{1008} - 1)}{2}$ şi $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots +$ $+ 3^{2016} = 3(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2015}) = 3 \cdot \dfrac{3^{2016} - 1}{2} = 3 \cdot \dfrac{(3^{1008} - 1)(3^{1008} + 1)}{2}$. Rezultă că

$$c = \frac{\cancel{3} \cdot \frac{\cancel{(3^{1008}-1)}(3^{1008}+1)}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{(\sqrt{3}+1)}\,\cancel{(3^{1008}-1)}}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{3}+1}}{\cancel{\sqrt{3}}} - 1 = 3^{1008} = (3^{1004})^2 \text{ pătrat perfect.}$$

I.1.2. DIVIZIBILITATE. ECUAŢII ÎN $\mathbb{Z}$

1. (S:E12.364) Dacă $d \mid a = 2n + 1$ şi $d \mid b = 3n + 2 \Rightarrow d \mid 3a - 2b = 6n + 3 - 6n - 4 = -1$, deci $(a, b) = 1$, prin urmare $[a, b] = a \cdot b$. Dacă $d \mid b = 3n + 2$ şi $d \mid c = 4n + 3 \Rightarrow d \mid 4b - 3c = 12n + 8 - 12n - 9 = -1$, deci $(b, c) = 1$, prin urmare $[b, c] = b \cdot c$. Evaluând $\frac{[a,b]+[b,c]}{2} = \frac{ab+bc}{2} = \frac{b(a+c)}{2} = \frac{(3n+2)(2n+1+4n+3)}{2} = \frac{(3n+2)(6n+4)}{2} = (3n + 2)^2 \geq (3 \cdot 0 + 2)^2 = 4$, pentru $n \geq 0$.

2. (S:E12.407) Să notăm cu n, $n \in \mathbb{N}^*$, numărul de luni în care se menține majorarea cu 20%. Venitul salarial se poate exprima: $2700 \cdot 12 + n \cdot 20\% \cdot 2700 = 35100 \Leftrightarrow 3240 + 54n = 3510 \Leftrightarrow 54n = 270$, cu soluția $n = 5$. Deci majorarea salarială a avut loc începând cu luna a opta, adică luna august.

3. (S:E12.410) Fie n şi m numărul de luni în care au primit majorarea salarială prima, respectiv a doua persoană. Din condiția de egalitate a veniturilor avem: $2700 \cdot 12 + n \cdot 20\% \cdot 2700 = 2600 \cdot 12 + m \cdot 15\% \cdot 2600 \Rightarrow 1200 + n \cdot 20 \cdot 27 = m \cdot 15 \cdot 26$, adică $120 + n \cdot 54 = m \cdot 39 \mid : 3 \Rightarrow 40 + n \cdot 18 = 13m$ (1) $\Rightarrow m$ este număr par, $m \leq 12$. Fie $m = 2k$. Revenind, $20 + 9n = 13k \Rightarrow 18 + 9n = 9k + (4k - 2)$, care implică $4k - 2 \in \mathcal{M}_9 \Rightarrow (\exists)\, p \in \mathbb{N}$ cu $4k - 2 = 9p$, $4k = 8p + (p + 2)$, deci $p + 2 \in \mathcal{M}_4$, $p + 2 = 4x$ sau $p = 4x - 2$, $x \in \mathbb{N}$; revenind, $m = 18x - 8$, $m \in \mathbb{N}$, însă $m \leq 12$; convine $x = 1$, deci $m = 10$. În (1): $40 + 18n = 130$, deci $18n = 90$ sau $n = 5$. Deci primul primeşte majorări salariale în ultimele 5 luni ale anului, iar al doilea primeşte majorări salariale în ultimele 10 luni.

4. (S:E12.441) Putem alege $n = \frac{22}{5}$ şi obținem $\sqrt{115 \cdot \frac{22}{5} + 23} = \sqrt{23(22+1)} = 23 \in \mathbb{Q}$ sau $n = \frac{23 \cdot 4 - 1}{5}$ şi obținem $\sqrt{115 \cdot \frac{23 \cdot 4 - 1}{5} + 23} = \sqrt{23 \cdot (23 \cdot 4 - 1 + 1)} = \sqrt{23^2 \cdot 2^2} = 46 \in \mathbb{Q}$. În general, pentru $k \in \mathbb{N}$, se poate alege $n = \frac{23 \cdot k^2 - 1}{5} \in \mathbb{Q}$ şi obținem $23 \cdot k \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

5. (S:E12.442) Vom demonstra că cel puțin un termen al sumei nu e rațional. Pentru $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, $u(2^{4k} + 7) = u(6 + 7) = 3$, deci $\sqrt{2^n + 7} \notin \mathbb{N}$. Pentru $n = 4k + 1$, $u(3^n + 10) = 3$, deci $\sqrt{3^n + 10} \notin \mathbb{N}$. Pentru $n = 4k + 2$, $u(7^n + 3) = 2$, deci $\sqrt{7^n + 3} \notin \mathbb{N}$.