TARTALOM

1. SZÁMHALMAZOK 5
1.1. Valós számok 5
1.2. A komplex számok halmaza 33
Kitűzött feladatok 74

2. FÜGGVÉNYEK ÉS EGYENLETEK 92
2.1. Függvények. Ismétlés 92
2.2. Injektív, szürjektív, bijektív függvények 113
2.3. Sajátos számfüggvények 131
Kitűzött feladatok 204

3. SZÁMLÁLÁSI MÓDSZEREK 232
3.1. A matematikai indukció módszere 232
3.2. A kombinatorika alapszabályai 240
3.3. Függvények számlálása 245
3.4 Véges rendezett halmazok 246
3.5. Permutációk 246
3.6. Variációk 251
3.7. Kombinációk 254
3.8. Newton binomiális képlete 265
Kitűzött feladatok 272

4. PÉNZÜGYI MATEMATIKA 287
4.1. Pénzügyi matematika 287
4.2. A matematikai statisztika elemei 303
4.3. A valószínűségszámítás alapjai 311
4.4. Valószínűségi változók 338
Kitűzött feladatok 354

5. GEOMETRIA 362
5.1. Descartes-féle koordináták a síkban 362
5.2. Két pont távolsága 365
5.3. Műveletek kötött vektorokkal. Egy vektor koordinátái 367
5.4. Az egyenes egyenlete 374
5.5. Két síkbeli egyenes párhuzamosságának feltétele 385
5.6. Három pont kollinearitása 387
5.7. Két egyenes merőlegességének feltétele 388
5.8. Távolságok és területek 389
Kitűzött feladatok 394

Ismétlő tesztek 402

ÚTMUTATÁSOK ÉS EREDMÉNYEK 419

MATEMATIKUSOK ÉS FELFEDEZÉSEIK

Az alábbi táblázat olyan matematikusokat tartalmaz, akik döntő mértékben járultak hozzá a X. osztályban tanult matematikai elméletek felfedezéséhez.

Időszak	**Név**	**Felfedezés**
1202	Leonardo Fibonacci (1170?–1250?)	Főműve: Liber Abacci Fibonacci sorozata rekurencia képlettel: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n \geq 3$. A sorozat általános tagjának képlete: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n \geq 1.$
1614 1624	John Neper (1550–1617) skót matematikus Henry Briggs (1556–1630) angol matematikus	„Description des merveilleuses règles des logarithmes et de leur usage...” c. művében elsőként használta a logaritmus fogalmát. Elkészítette az első tízes alapú logaritmustáblát.
1637 1797 1806	René Descartes (1596–1650) francia matematikus Carl Wessel (1745–1818) norvég matematikus Jean Argand (1768–1822) svájci matematikus Karl Friedrich Gauss (1777–1855)	Az analitikus geometria felfedezője. A komplex számokat tanulmányozva bevezette a „valós rész” és „képzetes rész” fogalmakat. $z = x + \mathrm{i}y$ ($\mathrm{i}^2 = -1$), $x = \mathrm{Re}\,(z)$, $y = \mathrm{Im}\,(z)$. A $z = x + \mathrm{i}y$ komplex számot az $\overrightarrow{OM}(x, y)$ helyzetvektorral ábrázolta. A $z = x + \mathrm{i}y$ komplex számot a Descartes-féle koordinátarendszer $M(x,y)$ pontjával ábrázolta. (Ox = valós tengely, Oy = képzetes tengely) Megadta a komplex számokkal végzett műveletek mértani értelmezését.
XVII– XVIII. század	Blaise Pascal (1623–1662) Jacob Bernoulli (1654–1705) Laplace (1749–1827) Poisson (1781–1840) Csebisev (1821–1894) Markov (1856–1922) Hincsin (1894–1959) A.N. Kolmogorov (1903–1982)	A valószínűségszámítás elméletének megalapozói, első kidolgozói.

1. SZÁMHALMAZOK

Ebben a fejezetben két fontos számhalmazzal foglalkozunk: a valós számok halmazával és a komplex számok halmazával.

A valós számok esetében megvizsgáljuk a pozitív számok valós kitevőjű hatványainak tulajdonságait. Részletezzük a magasabb kitevőjű gyökök tulajdonságait illetve a rájuk vonatkozó műveleti szabályokat. Értelmezzük egy pozitív szám logaritmusát, megadva a logaritmusokkal végezhető műveletek tulajdonságait.

A második halmazra vonatkozóan ismertetjük egy komplex szám két lehetséges megadási módját: az algebrai illetve a trigonometriai alakot. Bemutatjuk a velük végezhető műveletek geometriai interpretációit: az algebrai alakban megadott komplex számok esetén a vektorműveletekkel való analógiát adjuk meg, trigonometriai alak esetén pedig a geometriai transzformációkra hivatkozunk.

- Valós számok 5
- Természetes kitevőjű hatványok . . . 5
- Racionális kitevőjű hatványok 7
- Irracionális, valós kitevőjű hatványok 10
- Az n-edik gyök 12
- Logaritmusok 24
- A komplex számok halmaza 33
- Komplex számok algebrai alakja 33
- Komplex számok geometriai ábrázolása 49
- Komplex számok trigonometriai alakja 56
- Komplex szám n-edik gyökei 68
- Kitűzött feladatok 74

1.1. Valós számok

1.1.1. Természetes kitevőjű hatványok

Először felevelenítjük egy valós szám hatványának fogalmát abban az esetben, amikor a hatványkitevő természetes szám. Ha $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a következő értelmezést használjuk:

Értelmezés. Az a szám n-edik **hatványán** az a-nak önmagával vett n-szeres szorzatát értjük és a^n -nel jelöljük (olvasd: „a az n-ediken”), tehát

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-szer}.$$

a^n =**hatvány**, a = **hatványalap**, n =**hatványkitevő**.
Ha $a \neq 0$, $a^0 = 1$; 0^0 nem értelmezett; $a^1 = a$.

A továbbiakban felsoroljuk a természetes kitevőjű hatványok fontosabb tulajdonságait.

1) **Azonos alapú hatványok szorzása:**

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n},\ x \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Azonos alapú hatványok szorzásánál az alapot változatlanul hagyjuk és a kitevőket összeadjuk.

2) **Azonos alapú hatványok osztása:**

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n},\ x \neq 0,\ m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n.$$

Azonos alapú hatványok osztásakor az alapot változatlanul hagyjuk és a kitevőket kivonjuk egymásból (az osztandó kitevőjéből vonjuk ki az osztó kitevőjét).

3) **Szorzat hatványozása:**

$$(xy)^n = x^n y^n,\ x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Szorzatot úgy emelünk hatványra, hogy a tényezőket a megadott hatványra emeljük és az így kapott hatványokat összeszorozzuk.

4) **Tört hatványozása:**

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Törtet úgy hatványozunk, hogy a megadott hatványa emeljük mind a számlálót, mind a nevezőt.

5) **Hatvány hatványozása:**

$$(x^m)^n = x^{mn},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Hatvány hatványozásakor az alapot változatlanul hagyjuk és a kitevőket összeszorozzuk.

Példák

1) $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$; **2)** $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$; **3)** $(2 \cdot 3)^6 = 2^6 \cdot 3^6$;

4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$; **5)** $(3^2)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6$.

6) Határozzuk meg azon n természetes számokat, amelyekre

a) $4 < 2^n < 16$; b) $\dfrac{1}{8} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^n > \dfrac{1}{32}$

Megoldás. a) Az egyenlőtlenség-sorozatot a $2^2 < 2^n < 2^4$ alakba írhatjuk át. Mivel a hatványalapok megegyeznek (mindhárom hatvány esetében 2) és 1-nél nagyobbak, következik, hogy $2 < n < 4$. Tehát $n = 3$.

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^n > \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$. Innen $3 < n < 5$, vagyis $n = 4$.

1.1.2. Negatív egész kitevőjű hatványok

Emlékezzünk a valós számok negatív egész kitevőjű hatványának az értelmezésére!

Értelmezés. A nullától különböző a valós szám $(-n)$-edik $(n \in \mathbb{N}^*)$ hatványán az $\frac{1}{a^n}$ valós számot értjük és a^{-n}-nel jelöljük.

Az $n = 1$ esetben az $a^{-1} = \frac{1}{a}$ számot az a inverzének (vagy fordítottjának) nevezzük.

A negatív egész kitevőjű hatványok tulajdonságai megegyeznek a természetes kitevőjű hatványoknak az előzőekben már felsorolt tulajdonságaival, annyi különbséggel, hogy az azonos alapú hatványok osztásánál (2. tulajdonság) nem szükséges az $m \geq n$ kikötés, érvényes marad minden $m,\ n$ egész számra.

Példák

1) $3^3 \cdot 3^{-5} = 3^{3-5} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; **2)** $2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

3) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = 2^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot 5^4}{3^4} = \frac{(2 \cdot 5)^4}{3^4} = \frac{10^4}{3^4}$;

4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$;

5) $(3^{-3})^2 = 3^{(-3)2} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}$; $\left((\sqrt{5})^3\right)^{-2} = \sqrt{5}^{-6} = \frac{1}{\sqrt{5}^6} = \frac{1}{125}$.

1.1.3. Racionális kitevőjű hatványok

Az előző fejezetekben értelmeztük a természetes és egész kitevőjű hatványok fogalmát, felsorolva legfontosabb tulajdonságaikat:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}^*$;
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \forall\, a \neq 0, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$;
3) $(ab)^m = a^m b^m, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}^*$;
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \forall\, a, b \neq 0, \forall\, m \in \mathbb{Z}$;
5) $(a^m)^n = a^{mn}, \forall\, a \neq 0, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$;
6) $a^0 = 1,\ a \neq 0$;
7) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \forall\, a \neq 0, \forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Könnyen igazolható a következő két állítás:

Segédtétel. 1) Ha $x, y \geq 0,\ n \in \mathbb{N}^*$, akkor $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.
2) Ha $x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n$ páratlan, akkor $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.

A magasabb kitevőjű gyökök segítségével kiterjeszthetjük a hatvány fogalmát racionális kitevők esetére is. Ennek következménye, hogy a természetes és egész kitevőjű hatványok a racionális kitevőjű hatványok sajátos eseteként tekinthetők.

Értelmezés. Ha $a > 0$ és $r = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, akkor az a szám r-edik hatványán az a^r-nel jelölt számot értjük, ahol

$$\boldsymbol{a^r} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Az $\boldsymbol{a^r}$ hatvány esetén $\boldsymbol{a}$-t a hatvány **alapjának**, $\boldsymbol{r}$-et pedig a hatvány **kitevőjének** nevezzük.

Sajátosan, ha $m = 1$, $n \geq 2$, akkor $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Megjegyzés. Mint tudjuk, az $\dfrac{m}{n}$ racionális szám a vele egyenértékű törtek osztályának egy reprezentánsa. Kimutatjuk, hogy a racionális kitevőjű hatvány fogalma nem függ a reprezentáns megválasztásától, azaz $\dfrac{m}{n}$ helyébe egy vele ekvivalens $\dfrac{p}{q}$ törtet téve $\left(\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow mq = pn\right)$, az $a^{\frac{p}{q}}$ hatvány értéke megegyezik a $a^{\frac{m}{n}}$ hatványéval.

Valóban, $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[mq]{a^{mp}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$.

Példák. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$;

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{9}.$$

A racionális kitevőjű hatványok tulajdonságai

Az egész kitevőjű hatványokra vonatkozó tulajdonságok érvényesek a racionális kitevők esetén is:

Tétel. Ha $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$, akkor fennállnak a következő egyenlőségek:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $\quad$ 2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; $\quad$ 3) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$;

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$; $\quad$ 5) $(a^r)^s = a^{rs}$.

Bizonyítás. Az 1) és 3) tulajdonságokat igazoljuk, a többi tulajdonság hasonló módon bizonyítható. Ezen állítások igazolásához az előző segédtételt használjuk.

1) Ha $r = \dfrac{p}{q}$, $s = \dfrac{m}{n}$, $p, m \in \mathbb{Z}$, $q, n \in \mathbb{N}$, $q, n \geq 2$, akkor $a^r a^s = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{m}{n}}$.

Az alábbi gondolatmenet során a már megismert tulajdonságokat alkalmazzuk (zárójelben feltüntettük azt a tulajdonságot vagy értelmezést, amely alapján az egyes egyenlőségek felírhatók):

$[a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{m}{n}}]^{qn} = (a^{\frac{p}{q}})^{qn} (a^{\frac{m}{n}})^{qn}$ (szorzat természetes kitevőjű hatványa)

$= [(a^{\frac{p}{q}})^q]^n [(a^{\frac{m}{n}})^n]^q$ (természetes kitevőjű hatvány hatványozása)

$= [(\sqrt[q]{a^p})^q]^n [(\sqrt[n]{a^m})^n]^q$ (a racionális kitevőjű hatvány definíciója)

$= (a^p)^n (a^m)^q$ (a $q-$adik, illetve n-edik gyök értelmezése)

$= a^{pn} \cdot a^{mq}$ (egész kitevőjű hatvány hatványozása)

$= a^{pn+mq}$ (azonos alapú hatványok szorzása)

$= (\sqrt[nq]{a^{pn+mq}})^{nq}$ (nq-adik gyök definíciója)

$= (a^{\frac{pn+mq}{nq}})^{nq}$ (racionális kitevőjű hatvány definíciója)

Viszont $\dfrac{pn+mq}{nq} = \dfrac{p}{q} + \dfrac{m}{n} = r+s$, tehát kimutattuk, hogy $(a^r \cdot a^s)^{qn} = (a^{r+s})^{nq}$. Így a segédtétel alapján $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

3) Ha $r = \dfrac{p}{q}$ alakú, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, akkor

$[(ab)^{\frac{p}{q}}]^q = [\sqrt[q]{(ab)^p}]^q$ (racionális kitevőjű hatvány értelmezése)

$= a^p b^p$ (szorzat egész kitevőjű hatványa)

$= (\sqrt[q]{a^p})^q (\sqrt[q]{b^p})^q$ (a q-adik gyök értelmezése)

$= (a^{\frac{p}{q}})^q (b^{\frac{p}{q}})^q$ (racionális kitevőjű hatvány értelmezése)

$= (a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}})^q$ (szorzat természetes kitevőjű hatványa).

Tehát $[(ab)^r]^q = [a^r b^r]^q$, így a segédtétel alapján következik, hogy $(ab)^r = a^r b^r$.

■

Példák

1) Írjuk fel racionális kitevőjű hatványként a következő számokat: $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{3^5}$, $\sqrt{5^{-2}}$.

2) Írjuk fel gyökök segítségével a $3^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $7^{\frac{2}{9}}$, $4^{0,25}$ számokat.

3) Mutassuk ki, hogy $\sqrt{\sqrt{3}}(\sqrt[3]{\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[4]{3}})^2 = 3^{\frac{1}{3}}$.

Megoldás. 1) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[6]{3^5} = 3^{\frac{5}{6}}$, $\sqrt{5^{-2}} = 5^{-\frac{2}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

2) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$, $7^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{7^2} = \sqrt[9]{49}$, $4^{0,25} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$.

3) A gyököket törtkitevőjű hatványokká írva, kapjuk, hogy $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[8]{3} = 3^{\frac{1}{8}}$, így a bal oldali kifejezés rendre a következő alakokra hozható:

$3^{\frac{1}{4}}(3^{\frac{1}{6}} : 3^{\frac{1}{8}})^2 = 3^{\frac{1}{4}}(3^{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}})^2 = 3^{\frac{1}{4}}(3^{\frac{1}{24}})^2 = 3^{\frac{1}{4}}3^{\frac{2}{24}} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = 3^{\frac{4}{12}} = 3^{\frac{1}{3}}$.

Két racionális kitevőjű hatvány összehasonlítása

Igaz a következő állítás:

Tétel. 1) Ha $a > 1$, akkor $a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$, $r, s \in \mathbb{Q}$.
2) Ha $0 < a < 1$, akkor $a^r < a^s \Leftrightarrow r > s$, $r, s \in \mathbb{Q}$.

Bizonyítás. Csak az első állítást igazoljuk, a második hasonló módon bizonyítható. Ha $r = \dfrac{p}{q}$, $s = \dfrac{m}{n}$, $p, m \in \mathbb{Z}$, $q, n \in \mathbb{N}$, $q, n \geq 2$, akkor

$a^{\frac{p}{q}} < a^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow (a^{\frac{p}{q}})^{qn} < (a^{\frac{m}{n}})^{qn}$ (természetes kitevőjű hatványok rendezése)

$\Leftrightarrow [(\sqrt[q]{a^p})^q]^n < [(\sqrt[n]{a^m})^n]^q$ (racionális kitevőjű hatvány értelmezése)

$\Leftrightarrow (a^p)^n < (a^m)^q$ (a q-ad, illetve n-ed rendű gyök értelmezése)
$\Leftrightarrow a^{pn} < a^{mq}$ (egész kitevőjű hatvány hatványozása)
$\Leftrightarrow pn < mq \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{m}{n} \Leftrightarrow r < s.$ ■

Példa. Mutassuk ki, hogy bármely a, b pozitív szám esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > (a+b)^{\frac{2}{3}}.$$

Bizonyítás. Az $a+b=c$ jelölés bevezetésével, végigosztva $c^{\frac{2}{3}}$-nal, a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakot ölti: $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} > 1.$

Tudjuk, hogy $0 < \frac{a}{c}$, $\frac{b}{c} < 1$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, tehát $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$, vagyis $\left(\frac{a}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1$ és $\left(\frac{b}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1$. Innen $\frac{a}{c} < \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\frac{b}{c} < \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$. Ha az utóbbi két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, kapjuk, hogy

$$1 = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} < \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Más megoldás. Az $a^{\frac{1}{3}} = x > 0$, $b^{\frac{1}{3}} = y > 0$ jelölésekkel az egyenlőtlenség $x^2 + y^2 > (x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}$ alakú lesz. Mindkét oldalt harmadik hatványra emelve, a következő ekvivalens egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$(x^2 + y^2)^3 > (x^3 + y^3)^2,$$
$$3x^4y^2 + 3x^2y^4 > 2x^3y^3,$$

ezt x^3y^3-nal végigosztva kapjuk, hogy $3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) > 2$. Ez igaz, hiszen $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ minden $x, y > 0$ esetén.

1.1.4. Irracionális és valós kitevőjű hatványok

Ezen fejezet célja kibővíteni hatvány fogalmát a racionális kitevőjű hatványokról a valós kitevőjű hatványokra. E végső kiterjesztés az eddigiektől eltérő megközelítést igényel, meghaladva jelen tankönyv kereteit. Ezért megelégszünk az elv egy példán keresztüli bemutatásával.

Tegyük fel, hogy az $a^{\sqrt{2}}$ hatványt szeretnénk értelmezni valamely $a > 1$ számra.

Emlékezzünk vissza, hogy az előző évben az irracionális számokkal való műveleteket az adott számok hiánnyal, illetve többlettel való megközelítésével értelmeztük. Hasonló eljárással fogjuk egy a szám irracionális hatványra (jelen esetben $\sqrt{2}$-re) való emelését is értelmezni. $\sqrt{2}$ hiánnyal és többlettel való megközelítései:

$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < 1,415 < 1,42 < 1,5 < 2.$

Az $a > 1$ alapú racionális kitevőjű hatványok rendezési szabályait figyelembe véve felírhatjuk a következő egyenlőtlenség-sorozatokat:

$a^1 < a^{1,4} < a^{1,41} < a^{1,414} < \ldots$ (1) és $a^2 > a^{1,5} > a^{1,42} > a^{1,415} > \ldots$ (2).

Az (1) és (2) sorokban végtelen sok tag szerepel és az (1) sorozat minden tagja kisebb az összes (2)-ben szereplő kifejezésnél. Természetes, hogy $a^{\sqrt{2}}$ az a szám, amely nagyobb az (1) sorozat minden tagjánál és kisebb a (2) összes tagjánál.

Ez alapján természetes, hogy $a^{\sqrt{2}}$ értékének azt a γ számot tekintjük, amely nagyobb az a minden olyan racionális kitevőjű hatványánál, amelyben a kitevő alulról közelíti a $\sqrt{2}$-t és kisebb minden olyan hatványánál, amelyben a kitevő többlettel közelíti a $\sqrt{2}$ számot.

Bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy ez a szám **létezik** és **egyértelműen meghatározott** (szemléletesen a két sorozat „találkozásáná" helyezkedik el):

$a^1 < a^{1,4} < a^{1,41} < a^{1,414} < \ldots < \gamma < \ldots a^{1,415} < a^{1,42} < a^{1,5} < a^2$).

Hasonló módon definiálhatjuk az a^α $(a > 1)$ hatványt tetszőleges α pozitív irracionális szám esetén.

A fenti meghatározást a következőképpen is átfogalmazhatjuk:

Ha $a > 1$ és α egy pozitív irracionális szám és r_i illetve l_k az α szám hiánnyal, illetve többlettel való közelítései, akkor az a^α hatvány az a γ szám, amelyre

$$a^{r_i} < \gamma < a^{l_k},\ \forall r_i, l_k \in \mathbb{Q},\ r_i < \alpha,\ l_k > \alpha.$$

Ez esetben is elfogadjuk, hogy ez a szám **létezik** és **egyértelmű**.

Hasonlóan, ha $0 < a < 1$, a fenti jelölések alkalmazásával az a^α hatvány értékén azt a γ számot étjük, amelyre

$$a^{r_i} > \gamma > a^{l_k},\ \forall r_i, l_k \in \mathbb{Q},\ r_i < \alpha,\ l_k > \alpha.$$

Itt is elfogadjuk, hogy ez a szám **létezik** és **egyértelmű**.

Amennyiben $a > 0$, $a \neq 1$, α pedig egy negatív irracionális szám, akkor az a^α hatvány értékén az $\dfrac{1}{a^{|\alpha|}}$ számot értjük, azaz

$$a^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}}.$$

Megjegyzés. 1) Ha $a = 1$, akkor $1^\alpha = 1$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

2) A racionális kitevőjű hatvány értelmezése alapján $a^\alpha > 0$, $\forall\, a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) A törtkitevős hatványokra vonatkozó tulajdonságok érvényesek maradnak a valós kitevős hatványokra is (ezek bizonyításához szükség van a matematikai analízis tárgykörébe tartozó határérték fogalmára).

Bármely $a > 0$, $b > 0$ és tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennállnak a következő összefüggések:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 3) $(ab)^x = a^x b^x$; 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

5) $(a^x)^y = a^{xy}$; 6) $a^0 = 1$; 7) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

A hatványok rendezése

Ha $a > 1$, akkor $x < y \Rightarrow a^x < a^y$.

Ha $0 < a < 1$, akkor $x < y \Rightarrow a^x > a^y$.

4) Az előző paragrafusban kijelentett, az $a^{\frac{m}{n}}$ lehetséges értékeire vonatkozó állítások figyelembe vételével írhatjuk, hogy

1°) $a > 1$ esetén $a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$ és $a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$

valamint

2°) $0 < a < 1$ esetén $a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$ és $a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

A következőkben kimutatjuk, hogy az $a > 1$, $\alpha > 0$ esetben $a^\alpha > 1$.

Ha $\alpha = \dfrac{m}{n}$ alakú, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, akkor $a^{\frac{m}{n}} > 1 \Leftrightarrow \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n > 1 \Leftrightarrow a^m > 1$, ami igaz ($a > 1 \Rightarrow a^2 > a \Rightarrow a^3 > a^2 \Rightarrow \ldots$).

Ha α irracionális, akkor választunk egy olyan r pozitív racionális számot, amely az α-t hiánnyal közelíti meg. Az irracionális kitevőjű hatvány értelmezése szerint $a^\alpha > a^r$. A bizonyítás előző lépése alapján $a^r > 1$, tehát $a^\alpha > a^r > 1$, azaz $a^\alpha > 1$.

5) Valós kitevőjű hatványok rendezése. Igazak a következő állítások:

1) $a > 1$ esetén $\alpha_1 < \alpha_2 \Leftrightarrow a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

2) $0 < a < 1$ esetén $\alpha_1 < \alpha_2 \Leftrightarrow a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

A következőkben belátjuk, hogy ha $a > 1$ és $\alpha_1 > \alpha_2$, akkor $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Legyen $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$. A 4) alapján $a^\beta > 1$, innen mindkét oldal a^{α_2}-vel való beszorzásával kapjuk, hogy $a^\beta a^{\alpha_2} > a^{\alpha_2}$, azaz $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Az 1) és 2) állítások figyelembe vételével az alábbi fontos eredményhez jutunk:

Ha $a > 0$, $a \neq 1$, akkor $a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

1.1.5. Az n-edik gyök

Az előzőekhez hasonlóan, az n-edik gyököt is egy valós számra vonatkozóan határozzuk meg (páros n esetén nemnegatív, páratlan n esetén tetszőleges valós számra értelmezzük az n-edik gyököt).

Egy kis történelem. A gyökvonás eredete

Már az ókori görögökben megfogalmazódott az a kérdés, hogyan lehet meghatározni egy adott területű (például 2 m^2) négyzet oldalának hosszúságát.

Könnyen választ adhatunk a kérdésre, ha a terület mértéke x^2, ahol $x \in \mathbb{N}$ (például 4 m^2, 9 m^2, 16 m^2 stb.) Ha $T = x^2 = 2^2$ vagy $T = x^2 = 3^2$, akkor $x = 2$ illetve $x = 3$ mert az oldal hossza nemnegatív valós szám. Tetszőleges pozitív szám mértékű terület esetén a görögöknek nem sikerült a megoldásra általános módszert találni.

Platón egyik Dialógusában Szokrátesz egy terjedelmes mértani fejtegetés során megmutatja Menonnak, hogy az egységnyi oldalhosszúságú négyzet átlója pontosan a 2 területű négyzet oldala. A Menonnal folytatott párbeszéd mértani tartalma röviden így fogalmazható meg: a 2 területű négyzet x oldalhosszúsága pontosan $x = \sqrt{2}$. A $\sqrt{2}$ („négyzetgyök 2", „a 2 második gyöke") szimbólum tulajdonsága az, hogy önmagával megszorozva (vagyis négyzetre emelve) pontosan 2-t kapunk eredményül.

Bionyos esetekben a fenti feltételt teljesítő x könnyen meghatározható, például $x_1 = \sqrt{4} = 2$, $x_2 = \sqrt{9} = 3$, $x_3 = \sqrt{16} = 4$, $x_4 = \sqrt{0,0144} = 0,12$; az ellenőrzés a fordított művelet, a hatványra emelés segítségével azonnali: $x_1^2 = 2^2 = 4$, $x_2^2 = 3^2 = 9$, $x_3^2 = 4^2 = 16$, $x_4^2 = 0,12^2 = 0,0144$.

Az ókori görög matematikusok egy másik, hasonló jellegű problémája a harmadik gyök (köbgyök vagy harmadrendű gyök) fogalmához vezetett: azon kocka oldalhosszát keresték, melynek térfogata megegyezik az egységnyi oldalhosszúságú kocka térfogatának kétszeresével. Ma ezt így fogalmazzuk meg: a 2 térfogatú kocka x oldalhossza az az $x = \sqrt[3]{2}$ szám („a 2 harmadik gyök" vagy „köbgyök 2"), amelyet harmadik hatványra emelve 2-t kapunk ($x^3 = 2$). Egyes „szerencsés" esetekben ez a kérdés (mármint a megfelelő x megkeresése) is könnyen megválaszolható, például $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$, mivel $2^3 = 8$ és $0,5^3 = 0,125$.

A gyökvonás (latinul **radix**, gyök) a pozitív számok halmazán a hatványraemelés fordított művelete.

Négyzetgyökök

Mint azt már tudjuk, minden a valós szám esetén $a^2 \geq 0$. Megfordítva, a kérdés az, hogy adott pozitív a szám esetén létezik-e olyan x valós szám, amelyre $x^2 = a$, vagyis ha $a \geq 0$, az $x^2 = a$ egyenletnek van-e valós megoldása?

Bebizonyítható, hogy minden nemnegatív valós szám valamely **egyértelműen meghatározott** nemnegatív valós szám **négyzete**.

Az $x^2 = a$, $x \geq 0$ feltételeket teljesítő szám létezését a matematikai analízis keretében bizonyítjuk.

Az x szám egyértelműsége. Tételezzük fel, hogy léteznek az $x, y \geq 0$, számok, amelyek teljesítik az $x^2 = y^2 = a$ tulajdonságot és kimutatjuk, hogy $x = y$. Valóban, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, innen $x - y = 0$ vagy $x + y = 0$. Az $x - y = 0$ esetben $x = y$, ha pedig $x + y = 0$, felhasználva, hogy $x, y \geq 0$, következik, hogy $x = y = 0$, tehát mindkét esetben $x = y$.

Az x számot $x = \sqrt{a}$-val jelöljük és „négyzetgyök a-nak" (vagy röviden „az a gyökének") nevezzük.

Értelmezés. (**Négyzetgyök.**) Az $a \geq 0$ szám esetén az a négyzetgyökének nevezzük és $\sqrt{a}$-val („négyzetgyök a-val") jelöljük azt a számot, amelyre

$$\sqrt{a} \geq 0, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Következésképpen $\sqrt{a}$ az az **egyetlen pozitív** szám, amelynek négyzete pontosan a.

Azt a műveletet, amely során a-ból meghatározzuk a $\sqrt{a}$ értékét, **négyzetgyökvonás**nak nevezzük

Megjegyzés. 1) Jegyezzük meg, hogy **négyzetgyököt csakis pozitív számból lehet vonni**!

Az $\sqrt{x+1}$ kifejezésnek akkor van értelme, ha $x + 1 \geq 0$, azaz $x \geq -1$.

2) Az $a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0$ implikáció alapján $\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$, például $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, $\sqrt{(1 - \sqrt{2}\,)^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

A harmadik gyök

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $a^3 \in \mathbb{R}$, sőt azt is tudjuk, hogy ha $a > 0$, akkor $a^3 > 0$, ha pedig $a < 0$, akkor $a^3 < 0$. Fordítsuk meg a kérdést: adott a valós szám esetén létezik-e olyan $x \in \mathbb{R}$ amelyre $x^3 = a$? A továbbiakban ezzel a kérdéssel foglalkozunk. Ha $a = 27$, akkor $x = 3$ mivel $3^3 = 27$. Ha $a = -8$, akkor $x = -2$ mivel $(-2)^3 = -8$. E példák alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy negatív a esetén azon x szám, amelynek köbe a, szintén negatív, pozitív a esetén a neki megfelelő x is pozitív.

Értelmezés. (**Harmadik gyök, köbgyök**). Az a valós szám **harmadik gyökén (köbgyökén)** azt a $\sqrt[3]{a}$-val jelölt számot értjük, amelyre

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$ és $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Következésképpen a harmadrendű gyöke az az **egyetlen** ($\sqrt[3]{a}$-val jelölt) **valós** szám, amelynek köbe a.

Az n-edik gyök

Az előzőekben tárgyalt feladatokat általánosítjuk az $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, n páros vagy páratlan esetekre.

Ha $a \geq 0$ és n egy páros természetes szám, kimutatható, hogy az $x^n = a$ egyenletnek **létezik egyetlen pozitív** megoldása, melyet $x = \sqrt[n]{a}$-val jelölünk és az a n**-edik gyökének** nevezünk.

Ha $a \in \mathbb{R}$ és n egy páratlan természetes szám, akkor az $x^n = a$ egyenletnek **létezik egyetlen valós** megoldása, ezt $x = \sqrt[n]{a}$-val jelöljük és az a n**-edik gyökének** nevezzük.

Értelmezés. (**Az n-edik gyök**) 1) Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, n **páros**, akkor a n-edik gyökén (n-ed rendű gyökén) azt az $\sqrt[n]{a}$-nel jelölt számot értjük, amelyre

$$\sqrt[n]{a} \geq 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

2) Ha $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, n **páratlan**, az a szám n-edik gyökén (n-ed rendű gyökén) azt az $\sqrt[n]{a}$-nel jelölt számot értjük, amelyre

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Az n számot a **gyök kitevőjének vagy rendjének**, a-t pedig a **gyökjel alatti számnak (kifejezésnek)** nevezzük.

Megegyezés szerint, az $n = 2$ esetben $\sqrt[2]{a}$ helyett egyszerűen $\sqrt{a}$-t írunk.

Példák. $\sqrt[4]{16} = 2$ mivel $2^4 = 16$; $\sqrt[5]{-32} = -2$ mert $(-2)^5 = -32$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$ mert $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$.

1.1.6. A gyökök tulajdonságai

A következőkben felsoroljuk a szorzás, osztás, hatványozás illetve a gyökvonás között fennálló összefüggéseket, ezek ismerete segítséget jelent egyes algebrai- és számkifejezések egyszerűsítésénél.

Ezek bizonyításánál felhasználjuk a következő állítást:

Segédtétel. 1) Ha $x, y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, akkor $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.
2) Ha $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n **páratlan**, akkor $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.

A gyökökre vonatkozó tulajdonságok felsorolásánál mindig két esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy a gyök rendje páros vagy páratlan. **Ezek minél mélyebb rögzítése érdekében ajánljuk az olvasónak a tulajdonságok megfogalmazását az $n = 2$ (páros kitevőjű) és $n = 3$ (páratlan kitevőjű) sajátos esetekre, hiszen nagyon sok kifejezés tartalmaz 2 vagy 3 kitevőjű gyökkifejezéseket**.
Az alábbiakban m, n-nel a gyökök rendjét jelöltük, $a, b \in \mathbb{R}$.

T1) **Szorzat gyöke egyenlő a gyökök szorzatával.**

n=**páros természetes szám**	n=**páratlan természetes szám**
$\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \ \forall\, a, b \geq 0 \\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\,\sqrt[n]{\lvert b\rvert}, \ \forall\, a \cdot b \geq 0 \end{cases}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$

Bizonyítás. A tulajdonságot páros n-re és pozitív a, b valós számokra igazoljuk. Az $x = \sqrt[n]{ab}$, $y = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ jelölésekkel $x, y \geq 0$. Mivel $x^n = ab = y^n$, a segédtétel alapján $x = y$. ■

Megjegyzés. 1) Ha $n = 2$ és $a = b$, akkor $\sqrt{a^2} = |a|$. Ennek megfelelően a $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ számot így írhatjuk át: $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$,
az $E = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$ kifejezést pedig az $E = |x+1| + |x-1|$ egyszerűbb alakban is felírhatjuk.

2) A tulajdonság általánosítható több változóra is: ha $a_1, a_2, \cdots, a_k \geq 0$, n pedig egy **páros természetes szám**, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\,\sqrt[n]{a_2} \cdots \sqrt[n]{a_k}$, vagy röviden, a $\prod$ szimbólum használatával, $\quad (\prod_{i=1}^{k} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)$,

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} a_i} = \prod_{i=1}^{k} \sqrt[n]{a_i}.$$

Hasonlóan, ha $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ valamint n egy **páratlan természetes szám**, akkor

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} a_i} = \prod_{i=1}^{k} \sqrt[n]{a_i}.$$

Példák

1) $\sqrt{1800} = \sqrt{8 \cdot 9 \cdot 25} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5 = 30\sqrt{2}$;

2) $\sqrt[3]{-27000} = \sqrt[3]{-3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -3 \cdot 2 \cdot 5 = -30.$

3) Határozzuk meg azon x valós számokat, amelyekre fennáll a $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\sqrt{1+x}$ egyenlőség.

Megoldás. Az első gyök akkor értelmezett, ha $(x-1)(x+1) \geq 0$. Ennek a megoldáshalmaza a $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ intervallum (előjeltáblázatot készítünk az $x-1$, $x+1$ kifejezésekre). Az $\sqrt{x-1}$ gyök az $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, a $\sqrt{1+x}$ gyök pedig az $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ esetben létezik. A három halmazt metszve kapjuk, hogy $x \geq 1$ kell legyen. Minden ilyen x teljesíti az egyenletet (négyzetreemeléssel könnyen meggyőződhetünk erről), tehát a megoldás: $x \geq 1$.

T2) **Hányados gyöke egyenlő a gyökök hányadosával.**	
n=**páros természetes szám**	n=**páratlan természetes szám**
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ \forall\, a,b \geq 0,\ b \neq 0 \\ \frac{\sqrt[n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[n]{\lvert b\rvert}}, \ \forall\, a \cdot b \geq 0,\ b \neq 0 \end{cases}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ \forall\, a,b \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$

Bizonyítás. A bizonyítást páratlan n-re végezzük el.
Az $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $y = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ jelölésekkel $x^n = y^n = \frac{a}{b}$, a segédtétel 2) része alapján következik, hogy $x = y$. ∎

Példák. 1) $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{-8}} = \frac{-3}{2}$;

3) Írjuk át gyökök hányadosaként a $\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ gyököt, ha $x < 0$.

Megoldás. A gyök csak akkor létezik, ha $\frac{x}{x-1} \geq 0$, $x - 1 \neq 0$.

Az előjeltáblázat:

x	$-\infty$				0		1			$+\infty$
x		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{x}{x-1}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	$+$	

A táblázatból könnyen kiolvasható, hogy $\frac{x}{x-1} \geq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$.

A tulajdonságot alkalmazva ($n = 2$ páros, $\frac{a}{b} \geq 0$) kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x-1|}} = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}}.$$

T3) **Gyök hatványra emelése**	
n= **páros természetes szám**	n= **páratlan természetes szám**
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},\ \forall\, a \geq 0,\ m \in \mathbb{N}^*$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}^*.$
Gyök hatványra emelése a gyökjel alatti kifejezésnek a megadott hatványra való emelését jelenti.	

Bizonyítás. Tekintsük az $n \in \mathbb{N}^*$, n páros esetet. Az $x = (\sqrt[n]{a})^m$, $y = \sqrt[n]{a^m}$ jelölésekkel $x^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^m$ és $y^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, tehát $x^n = y^n$. A segédtétel 1) állítása alapján $x = y$. ■

Példák

1) $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = (\sqrt{3^2})^2 = 3^2 = 9$;
2) $(\sqrt[3]{-5})^4 = \sqrt[3]{(-5)^4} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3}\sqrt[3]{5} = (\sqrt[3]{5})^3\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$;
3) $(\sqrt[4]{(x-1)^2})^4 = \sqrt[4]{(x-1)^8} = (\sqrt[4]{(x-1)^4})^2 = |x-1|^2 = (x-1)^2$.

T4) **A gyök kitevőjének illetve a gyökjel alatt álló hatvány kitevőjének egy közös osztóval való egyszerüsítése**	
n=**páros természetes szám**	n=**páratlan természetes szám**
$\sqrt[mn]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}, & a \geq 0,\ m \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}, & a < 0,\ m \text{ páros} \end{cases}$	$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a},\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ m$ páratlan.

A bizonyítás a többi tulajdonság igazolásához hasonlóan végezhető el.

Példák

1) $\sqrt[4]{3^{12}} = \sqrt[4]{3^{4\cdot 3}} = 3^3 = 27$; 2) $\sqrt[10]{(-5)^6} = \sqrt[2\cdot 5]{(-5)^{2\cdot 3}} = \sqrt[5]{|-5|^3} = \sqrt[5]{125}$;

3) Igazoljuk a következő egyenlőséget: $\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}$.

Megoldás. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy mindkét oldalon pozitív számok állnak. A segédtétel 1) állítását használjuk, ehhez kimutatjuk, hogy a két oldalon álló kifejezések négyzetei megegyeznek. Rendre a következőket írhatjuk:

$4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = (\sqrt[4]{18})^2 + 2\sqrt[4]{18\cdot 2} + (\sqrt[4]{2})^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = \sqrt{18} + 2\sqrt[4]{36} + \sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$, ezzel a bizonyítást befejeztük.

4) Mutassuk ki, hogy $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$.

Megoldás. Az $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ kifejezést az $(a+b)^3=a^3+b^3+$ $+3ab(a+b)$ képlet alapján ($a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$, $b=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ értékekkel) harmadik hatványra emeljük.
$x^3=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})$, azaz $x^3=18+3\cdot 1\cdot x$. Tehát x kielégíti az $x^3-3x-18=0$ harmadfokú egyenletet, ami egyenértékű azzal, hogy

$$x^3-3x-18=(x-3)(x^2+3x+6)=0.$$

Tehát $x-3=0$ vagy $x^2+3x+6=0$. Kimutatjuk, hogy valós x esetén $x^2+3x+6\neq$ $\neq 0$, így csak az $x=3$ eset állhat fenn, ami éppen a bizonyítandó összefüggés. Valóban, $x^2+3x+6=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$.

T5) **Gyökvonás gyökből**

n= **páros természetes szám**	n= **páratlan természetes szám**
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $\forall\, a\geq 0,\ m\in\mathbb{N}^*,\ m\geq 2$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $\forall\, a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}^*,$ páratlan.
Gyökből gyököt vonni azt jelenti, hogy a gyökkitevők szorzatával egyenlő kitevőjű gyököt vonunk (és az alap marad).	

Példák. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{3}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-2}}=\sqrt[15]{-2}$; 3) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[8]{2}$.

T6) **Tényező bevitele a gyökjel alá**

$a\,\sqrt[2n]{b}=\begin{cases}\sqrt[2n]{a^{2n}b}, & a\geq 0,\ b\geq 0\\ -\sqrt[2n]{a^{2n}b}, & a<0,\ b\geq 0\end{cases}$	$a\,\sqrt[2n+1]{b}=\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b}$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$.

T7) **Tényező kihozatala (kiemelése) a gyökjel alól**

$\sqrt[2n]{a^{2n}b}=\begin{cases}a\,\sqrt[2n]{b}, & a\geq 0,\ b\geq 0\\ -a\,\sqrt[2n]{b}, & a\leq 0,\ b\geq 0\end{cases}$	$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b}=a\,\sqrt[2n+1]{b}$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$.

Példák

1) A külső tényezőket vigyük be a gyökjel alá:

a) $3\sqrt{2}$; b) $5\sqrt[3]{2}$; c) $\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$; d) $-4\sqrt{3}$; e) $-3\sqrt[3]{3}$; f) $(x+1)\sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}$, $x>1$.

Megoldás. a) $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}$; b) $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=\sqrt{250}$;

c) $\frac{2}{3}\sqrt{6} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 6} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$; d) $-4\sqrt{3} = -\sqrt{4^2 \cdot 3} = -\sqrt{48}$;

e) $-3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{-81} = -\sqrt[3]{81}$;

f) $(x+1)\sqrt{\frac{1}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, ha $x > 1$.

2) A lehető „legnagyobb" tényezőt emeljük ki a gyökjel alól!

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{175}$; c) $\sqrt[3]{24}$; d) $\sqrt[5]{-96}$; e) $\sqrt{x^3}$; f) $\sqrt[3]{\frac{a^6 b}{x^9}}$.

Megoldás. a) $\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{175} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$;

c) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$;

d) $\sqrt[5]{-96} = \sqrt[5]{-2^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{-2^5}\sqrt[5]{3} = (\sqrt[5]{-2})^5\sqrt[5]{3} = -2\sqrt[5]{3}$;

e) $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2}\sqrt{x} = x\sqrt{x}$, mivel abból, hogy $x^3 \geq 0$ következik, hogy $x \geq 0$;

f) $\sqrt[3]{\frac{a^6 b}{x^9}} = \frac{\sqrt[3]{a^6 b}}{\sqrt[3]{x^9}} = \frac{\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{x^9}} = \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{x^3}$.

T8) **Gyökök közös gyökkitevőre hozása**

Mindkét gyököt a kitevők legkisebb közös többszörösével megegyező rendre hozzuk a T4) tulajdonság alapján.

Példa. Alakítsuk át azonos kitevőjű gyökökké a $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ gyököket.

Megoldás. A gyökök kitevőinek (2, illetve 3) legkisebb közös többszöröse 6 és $\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ și $\sqrt[3]{3} = \sqrt[2\cdot 3]{3^2} = \sqrt[6]{9}$.

Két gyök összehasonlítása

Gyökök összehasonlításakor a következő táblázatot használhatjuk:

$n =$ **páros természetes szám**	$n =$ **páratlan természetes szám**
Ha $a, b > 0$, akkor: $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$	Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor: $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$.

Bizonyítás. Az $n = 2$, majd $n = 3$ sajátos eseteket bizonyítjuk.
Mutassuk ki, hogy ha $a, b > 0$, akkor $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$.

Az $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$ jelölésekkel $x, y > 0$ és $x^2 = a$, $y^2 = b$. A bizonyítandó ekvivalenciát x-től és y-tól függő kifejezéssé írjuk át. Igazolnunk kell, hogy $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$. Valóban, $x^2 < y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 < 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) < 0 \Leftrightarrow x - y < 0$ mivel $x + y > 0$.

Ha $n = 3$ és $a, b \in \mathbb{R}$, az $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$ jelöléseket vezetjük be, tehát $x^3 = a$, $y^3 = b$, így

$a < b \Leftrightarrow x^3 < y^3 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) < 0 \Leftrightarrow x - y < 0$,

mert $x^2 + xy + y^2 > 0$. ∎

Megjegyzés. Ezzel a módszerrel **azonos kitevőjű gyököket hasonlítunk össze**. Ha a gyökök kitevője különböző, a T8) tulajdonság alapján előbb azonos kitevőjű gyökökké alakítjuk őket.

Példák

1) Rendezzük növekvő sorrendbe a $\sqrt{4^3}$, $\sqrt{2^7}$, $\sqrt{8^2}$ számokat.

Megoldás. Mivel $4^3 = 64$, $2^7 = 128$ és $8^2 = 64$, ezért $4^3 = 8^2 < 2^7$, így $\sqrt{4^3} = \sqrt{8^2} < \sqrt{2^7}$.

2) Hasonlítsuk össze az a és b számokat:

a) $a = \sqrt{26} + \sqrt{6}$, $b = \sqrt{13} + \sqrt{17}$;   b) $a = \sqrt{12} - \sqrt{11}$, $b = \sqrt{11} - \sqrt{10}$.

Megoldás. a) Tegyük fel, hogy $a > b$. Mivel $a, b > 0$, az a és b között fennálló rendezési reláció megmarad a^2 és b^2 között is. Rendre a következő egyenértékű egyenlőtlenségeket kapjuk:

$\sqrt{26} + \sqrt{6} > \sqrt{13} + \sqrt{17} \Leftrightarrow 26 + 2\sqrt{156} + 6 > 13 + 2\sqrt{13 \cdot 17} + 17 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{156} > > \sqrt{13 \cdot 17} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{156} + 156 > 221 \Leftrightarrow \sqrt{156} > 32 \Leftrightarrow 156 > 1024$, hamis, tehát feltételezésünk hamis volt. Következésképpen $a < b$.

b) Vegyük észre, hogy $\sqrt{12} - \sqrt{11} = \dfrac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$ és $\sqrt{11} - \sqrt{10} = \dfrac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{10}}$.

Mivel $\dfrac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}} < \dfrac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{10}}$, következik, hogy $a < b$.

3) Rendezzük növekvő sorrendbe a $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[12]{280}$ számokat.

Megoldás. Első észrevételünk az, hogy nem azonosak a gyökkitevők. Ahhoz, hogy össze tudjuk hasonlítani, szükséges, hogy közös kitevőre hozzuk őket. A közös kitevő a kitevők legkisebb közös többszöröse, azaz $[3, 4, 12] = 12$. Az átalakítások:

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \cdot 4]{4^4} = \sqrt[12]{256}$, $\sqrt[4]{6} = \sqrt[4 \cdot 3]{6^3} = \sqrt[12]{216}$. Mivel $216 < 256 < 280$, kapjuk, hogy $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[12]{280}$.

Műveletek gyökökkel

Azonos kitevőjű gyökök közötti összeadási, kivonási, szorzási vagy osztási műveletek esetében kihozhatunk a gyökjel alól vagy éppen bevihetünk közös tényezőket a gyökjel alá azon célból, hogy minél egyszerűbb alakra hozzuk a kifejezést.

Ha a gyökkifejezések kitevője különbözik, előbb azonos kitevőre hozzuk őket a szorzás és osztás könnyebb elvégzése érdekében.

Példák. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{200}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+2\sqrt{20}-\sqrt{49}$; b) $\sqrt[3]{27a^4}+3\sqrt[3]{8a}-\frac{3}{a}\sqrt[3]{125a^7}$;

c) $\sqrt[3]{4}\cdot 2\sqrt[3]{2}$; d) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}$; e) $\frac{5}{2}\sqrt[3]{64}:5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; f) $\sqrt[3]{\frac{1}{49}a^5b^7}:\sqrt{7a^5b^3}$.

Megoldás. a) $10\sqrt{2}-3\sqrt{5}+9\sqrt{2}+4\sqrt{5}-7=19\sqrt{2}+\sqrt{5}-7$;

b) $3a\sqrt[3]{a}+6\sqrt[3]{a}-\frac{3}{a}\cdot 5a^2\sqrt[3]{a}=3a\sqrt[3]{a}+6\sqrt[3]{a}-15a\sqrt[3]{a}=6\sqrt[3]{a}-12a\sqrt[3]{a}$;

c) $\sqrt[3]{4}\cdot 2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=\sqrt[3]{2^2\cdot 2^3\cdot 2}=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$;

d) A szorzás elvégzése érdekében előbb közös kitevőre hozzuk a két gyököt−ez a kitevő a $[2,3]=6$: $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{8\cdot 16}=\sqrt[6]{2^7}=2\sqrt[6]{2}$;

e) $\dfrac{\frac{5}{2}\sqrt[3]{2^6}}{5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{5}{2}\cdot 2^2}{5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

f) Előbb a kihozható tényezőket kiemeljük a gyökjel alól, majd a gyököket közös kitevőre hozzuk, lehetővé téve az osztás elvégzését:

$\sqrt[3]{\frac{1}{49}a^5b^7}=ab^2\sqrt[3]{\frac{a^2b}{49}}=ab^2\sqrt[6]{\frac{a^4b^2}{49^2}}$, $\sqrt{7a^5b^3}=a^2|b|\sqrt{7ab}=a^2|b|\sqrt[6]{7^3a^3b^3}$.

Az osztás: $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{a^5b^7}{49}}}{\sqrt{7a^5b^3}}=\dfrac{ab^2\sqrt[6]{\frac{a^4b^2}{49^2}}}{a^2|b|\sqrt[6]{7^3a^3b^3}}=\dfrac{|b|}{a}\sqrt[6]{\dfrac{a^4b^2}{49^2\cdot 7^3a^3b^3}}=\dfrac{|b|}{7a}\sqrt[6]{\dfrac{a}{7b}}$.

A nevező gyöktelenítése

Azt a műveletet, amely során egy tört nevezőjéből valamely kifejezéssel történő bővítéssel eltüntetjük a gyököket, a **nevező gyöktelenítésének** nevezzük. A kifejezést, amellyel bővítjük a törtet, a nevező egy **konjugáltjának** nevezzük.

Ha a nevezőben gyökkifejezések összege áll, a rövidített számítási képleteket alkalmazzuk, ezért ismétlésképpen felsoroljuk őket:

$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$, $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$,

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$.

A következő eseteket különböztetjük meg:

1) **A nevező egyetlen gyökből áll:** $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$, $1\le k<n$, $k,n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

Ha a törtet az $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ kifejezéssel bővítjük, a nevezőből eltűnik a gyök:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k}\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}.$$

Példák. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}}$.

Megoldás. a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\sqrt[5]{2^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{4}}{2}$.

2) **A nevező** $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, $a,b>0$ **alakú**

Könnyen belátható, hogy a $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ $(a,b>0)$ kifejezések egymás konjugáltjai, hiszen $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$.

A $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ alakú nevezők racionalizálása a törtnek a nevező konjugáltjával való bővítésével történik.

Példák. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-1}$.

Megoldás. a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\dfrac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\dfrac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$;

c) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}}=\dfrac{2(2\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{7})(2\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\dfrac{2(2\sqrt{5}-\sqrt{7})}{13}$;

d) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{11}$.

3) **A nevező** $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}$ **alakú** $(a,b,c>0)$.

Az ilyen alakú nevezők gyöktelenítése az előző esetben bemutatott eljárás kétszeri alkalmazásával végezhető el, a gyökök eltüntetése fokozatosan történik.

Példák. Gyöktelenítsük a törtek nevezőit:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$; b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Megoldás. a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{7}}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{7}]}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2(\sqrt{6}-1)}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{2(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{10}$;

b) $\dfrac{1}{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}}=\dfrac{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}}{[(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}][(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}]}=\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=$

$=\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-4}$.

4) **A nevező** $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ **vagy** $\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ **alakú.**

A $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3=a+b$ képlet alapján a $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ és $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ kifejezések egymás konjugáltjai, tehát, ha a tört nevezője $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ alakú, akkor a törtet a $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ kifejezéssel, ha pedig $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ alakú, akkor a $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ kifejezéssel bővítjük. Hasonlóan, a
$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3=a-b$ képlet alapján a $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ és $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ kifejezések egymás konjugátjai.

Példák. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; c) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{3}}$; d) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

Megoldás. a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt{3^2})}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})}=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{5}$;

c) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{(1-\sqrt[3]{3})(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2})}=\dfrac{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{-2}$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}}{(1-\sqrt[3]{3})(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2})}=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}}{-2}$.

5) **A nevező $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ alakú.**

Az $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$ képlet alapján a bal oldali tényezők egymás konjugáltjai.

Példa. Gyöktelenítsük a $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$ tört nevezőjét.

Megoldás. A nevező konjugáltjával bővítve a törtet kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^2}\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2^3}}{3-2}=\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{8}.$$

Ehhez az eredményt másképp is eljuthatunk: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}{(\sqrt[4]{3})^2-(\sqrt[4]{2})^2}=\dfrac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$
$=(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{8}.$

6) **A nevező** $\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b}$ **alakú.**
Az

$$(\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b})(\sqrt[2n+1]{a^{2n}}-\sqrt[2n+1]{a^{2n-1}}\sqrt[2n+1]{b}+\cdots+\sqrt[2n+1]{b^{2n}})=a+b$$

egyenlőség alapján a bal oldali tényezők egymás konjugáltjai.

Példa. Gyöktelenítsük az $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}+1}$ tört nevezőjét.

Megoldás. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}+1}=\dfrac{\sqrt[5]{3^4}-\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{3^2}-\sqrt[5]{3}+1}{3+1}=\dfrac{\sqrt[5]{81}-\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{9}-\sqrt[5]{3}+1}{4}$.

1.1.7. Logaritmusok

A „logaritmus” szó a latin „logarithmus” magyar megfelelője. Ez a szó a görög „logos” és „arithmos” szavak összevonásából született. A megfelelő fogalom John Napier-től származik, akinek a fő munkája (Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio) 1614-ben jelent. Láttuk, hogy ha a hatványozás során rögzítjük a kitevőt, akkor az ellentett művelet a megfelelő rendű gyökvonás. Ha viszont nem a kitevőt, hanem az alapot rögzítjük, akkor a következő problémával állunk szemben: rögzített $a,b>0$ számok esetén határozzuk meg azt az x valós számot, amelyre $a^x=b$. Igazolható, hogy ennek az egyenletnek egyetlen valós megoldása van, ezért mondhatjuk azt, hogy értelmezés alapján az előbbi egyenlet megoldását a b szám a alapú **logaritmusának** nevezzük. Például a $2^3=8$ egyenlőség alapján mondhatjuk hogy a 3 a 8-nak a 2-es alapú logaritmusa. Ezt röviden így írjuk: $3=\log_2 8$.

Hasonlóan, mivel $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=9$, ezért a 9-nek $\dfrac{1}{3}$ alapú logaritmusa (-2), azaz $-2=\log_{\frac{1}{3}} 9$.

Értelmezés. Legyen $a>0$, $a\neq 1$ és $x>0$. Az x **szám** a **alapú logaritmusának** nevezzük és $\log_a x$-szel jelöljük azt az y számot, amelyre $a^y=x$. Tehát $y=\log_a x \iff a^x=y$

Megjegyzés. 1) Mivel $a^y>0$, $\forall y\in\mathbb{R}$, ezért negatív szám logaritmusa nem értelmezett.

2) Az értelmezés alapján

a) az $y=\log_a x$ és $a^y=x$ kijelentések ugyanazt jelentik;

b) az x szám szigorúan pozitív;

c) ha $a>0$, $a\neq 1$ és $x>0$, akkor:

$$\boxed{a^{\log_a x}=x}$$

Ezt az azonosságot a **logaritmus alapazonosságának** nevezzük, jelentése a következő: **egy pozitív szám adott alapú logaritmusa azt a kitevőt jelöli, amelyre fel kell emelni az alapot ahhoz, hogy az illető számot kapjuk**.

Megoldott gyakorlatok

1. Írjuk fel az alábbi egyenlőségeket logaritmusok segítségével:

a) $2^3 = 8$; b) $5^0 = 1$; c) $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

Megoldás. Egy pozitív szám logaritmusának értelmezése alapján $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, tehát a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$; b) $5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 1 = 0$;

c) $3^{-2} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{1}{9} = -2$.

2. Írjuk fel az alábbi egyenlőségeket logaritmusok nélkül:

a) $\log_{10} 100 = 2$; **b)** $\log_3 \dfrac{1}{27} = -3$; **c)** $\log_5 1 = 0$.

Megoldás. Egy x pozitív szám logaritmusának értelmezése alapján $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, tehát:

a) $\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$; **b)** $\log_3 \dfrac{1}{27} = -3 \Leftrightarrow 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$;

c) $\log_5 1 = 0 \Leftrightarrow 5^0 = 1$.

3. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $\log_2 1024 = 10$; **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 256 = -8$; **c)** $\log_a \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Megoldás. a) A szogorúan pozitív szám logaritmusának értelmezése alapján $\log_2 1024 = 10 \Leftrightarrow 2^{10} = 1024$, ami igaz.

b) $\log_{\frac{1}{2}} 256 = -8 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-8} = 256 \Leftrightarrow 2^8 = 256$, igaz.

c) A logaritmus argumentumát egyszerűbb alakra hozva kapjuk, hogy

$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{1}{2}}$, továbbá $\log_a a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$, mivel $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

4. A logaritmus definícójából kiindulva határozzuk meg azt az x számot, amelyre:

a) $\log_x 2 = 3$; **b)** $\log_4 x = \dfrac{1}{2}$; **c)** $\log_4 8 = x$.

Megoldás. A pozitív számok logaritmusának értelmezése alapján
a) $\log_x 2 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 2$, tehát $x = \sqrt[3]{2}$.

b) $\log_4 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = 2$.

c) $\log_4 8 = x \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

5. Határozd meg az alábbi logaritmusok értékét:

a) $\log_3 \sqrt{\frac{1}{9}}$; **b)** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32}$; **c)** $\log_3 \log_2 \log_9 81$.

Megoldás. a) A logaritmus értelmezése alapján írhatjuk, hogy

$$\log_3 \sqrt{\frac{1}{9}} = y \Leftrightarrow 3^y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^y = 3^{-1} \Leftrightarrow y = -1. \text{ Tehát } \log_3 \sqrt{\tfrac{1}{9}} = -1.$$

b) Legyen $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32} = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = (32)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^{-y} = 2^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}$.

Tehát $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32} = -\frac{5}{3}$.

c) A legbelső logaritmus értékét kiszámolva $\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$. Kifele haladva a következő logaritmus $\log_2 2 = 1$ és végül $\log_3 1 = 0$.

Egy kis történelem. Két szám kiemelt szerepet tölt be logaritmusok alapjaként. 1) **Az** $e \approx 2,71828$ **irracionális szám** alapú logaritmusnak külön jelölése is van: $\log_e x$ helyett egyszerűen $\ln x$-t írunk és természetes logaritmusnak nevezzük. Az e szám megválasztása furcsának tűnhet, viszont egyes tulajdonságai a matematika egyik legfontosabb számává tették. Ezt a logaritmust Neper féle logaritmusnak nevezzük John Neper (1550-1617) skót báró neve után. Neper eredeti dolgozatában az alap fogalma még nincs pontosan definiálva, viszont számítások alapján ennek értéke $\frac{1}{e}$. Neper logaritmusait tehát nem lehet a ma Neper-féléknek nevezett logaritmusokkal azonosítani. A svájci matematikus, Jost Bürgi (1552-1632) szintén kiadott 1620-ban egy logaritmustáblát, ő már néhány évvel azelőtt felfedezte a logaritmusokat, talán még Neper-t is megelőzve. Bürgi táblájában a logaritmusok piros színnel vannak jelölve, ő maga „piros számok"-nak nevezte őket. Az alap fogalma még itt sem jelent meg.

2) A másik fontos logaritmus-alap a 10**-es szám.** A 10-es alapú logaritmus esetében $\log_{10} x$ helyett $\lg x$-et írunk. Ezen logaritmusokat **10-es alapú logaritmusok**nak nevezzük.
Az első tízes alapú logaritmus-táblát Henry Briggs (1556-1630) angol matematikus szerkesztette és publikálta 1624-ben.

A logaritmus tulajdonságai

A valós kitevőjűhatványok tulajdonságaiból kiindulva:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy},$$

megállapítunk néhány, logaritmusokra vontakozó tulajdonságot.

> **1.** Ha $a > 0,\ a \neq 1$, akkor $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$.

Bizonyítás. $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$ és $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$. ■

> **2.** Ha $x, y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$, akkor $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
> (**Két szám szorzatának logaritmusa megegyezik a számok logaritmusának összegével.**)

Bizonyítás. A $\log_a x = m,\ \log_a y = n$ jelölések bevezetésével

$$a^m = x,\ a^n = y \text{ és } a^m \cdot a^n = a^{m+n} = xy,$$

következésképpen $\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$. ∎

Megjegyzés. **1)** A fenti összefüggés általánosítható k darab szigorúan pozitív számra is: ha $x_1, x_2, \cdots, x_k > 0$, akkor

$$\log_a(x_1 x_2 \cdots x_k) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_k$$

vagy röviden, a $\sum$ és $\prod$ szimbólumok használatával

$$\log_a \left(\prod_{i=1}^{k} x_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \log_a x_i.$$

Ha az x_i, $i = \overline{1,k}$ számok megegyezőek, $x_i = x$, $\forall\, i = \overline{1,k}$, akkor

$$\boxed{\log_a x^k = k \log_a x}$$

Természetes kitevőjű hatvány logaritmusa egyenlő a kitevő és a hatványalap logaritmusának szorzatával. Később látni fogjuk, hogy ez az összefüggés érvényben marad valós kitevőjű hatványok esetén is.

2) Ha $x_1 x_2 > 0$, akkor $\log_a(x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$.

3. Ha $x, y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$, akkor $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.

(**Hányados logaritmusa egyenlő a számláló és a nevező logaritmusának különbségével.**)

Bizonyítás. A szorzat logaritmusára vonatkozó tulajdonság felhasználásával írhatjuk, hogy

$\log_a x = \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y \right) = \log_a \left(\frac{x}{y} \right) + \log_a y$, innen $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$. ∎

Megjegyzés. **1)** Ha $xy > 0$, akkor $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a |x| - \log_a |y|$.

2) Ha $x > 0$, akkor

$$\boxed{\log_a \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_a x}$$

4. Ha $x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$, akkor $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

(**Valós kitevőjű hatvány logaritmusa egyenlő a kitevő és a hatványalap logaritmusának szorzatával.**)

Bizonyítás. Ha $\log_a x = m$ vagyis $a^m = x$, akkor

$x^\alpha = (a^m)^\alpha = a^{m\alpha} \Leftrightarrow \log_a x^\alpha = m\alpha = \alpha \log_a x$. ∎

Megjegyzés. **1)** Ha $\alpha = 2m,\ m \in \mathbb{Z}$, akkor $\log_a x^{2m} = 2m \log_a |x|$.

Példa. A $\log_a(x-1)^2$ szám minden $x \neq 1$ esetén létezik és

$$\log_a(x-1)^2 = 2\log_a |x-1| = \begin{cases} 2\log_a(x-1), & x > 1 \\ 2\log_a(1-x), & x < 1. \end{cases}$$

2) Ha $\alpha = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, akkor $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x$.

5. (**A logaritmus alapjának megváltoztatása**)

Ha $x > 0,\ a, b > 0,\ a, b \neq 1$ akkor $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

(**A képlet szabályt ad egy szám** a **alapú logaritmusáról ugyanazon szám** b **alapú logaritmusára való áttérésre.**)

Bizonyítás. A $\log_a x = m$, $\log_b x = n$ jelölésekkel $x = a^m$, $x = b^n$, innen $a^m = b^n$, vagyis $\log_a a^m = \log_a b^n$. Az előző szabály alapján $m \log_a a = n \log_a b$, innen $m = n \log_a b$ vagyis $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$. (1)

Ez utóbbi összefügésben az $x = a$ helyettesítést végezve kapjuk, hogy $1 = \log_b a \cdot \log_a b$. Következik, hogy $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. Ezt (1)-be visszahelyettesítve $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. ■

Megjegyzés. 1) Az a alapról b-re való áttérési képlet könnyebb megtanulása érdekében figyeljhük meg, hogy a a jobb oldalon b alapú logaritmusok hányadosa van, melyeknek argumentumai az x szám illetve a régi alap, a, ezt az alábbi ábrán szemléltetjük:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

2) A bizonyítás során egy másik fontos összefüggést is megállapítottunk:

Ha $a, b > 0,\ a, b \neq 1$, akkor $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

3) Ha $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$, akkor $\log_{a^\beta}(x^\alpha) = \dfrac{\alpha}{\beta} \log_a x$.

Bizonyítás. A bal oldalon levő logaritmusban a alapra térünk át:

$$\log_{a^\beta}(x^\alpha) = \frac{\log_a x^\alpha}{\log_a a^\beta} = \frac{\alpha \log_a x}{\beta \log_a a} = \frac{\alpha}{\beta} \log_a x. \ ■$$

4) Ha $x, y > 0,\ y \neq 1,\ a, b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1$, akkor $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a alapú logaritmusokról b alapúakra kell áttérnünk. Az erre vonatkozó képlet felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\dfrac{\log_b x}{\log_b a}}{\dfrac{\log_b y}{\log_b a}} = \frac{\log_b x}{\log_b y}.$$

5) Ezt a tulajdonságot az alkalmazásokban nagyon gyakran használjuk. Például egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásá során, ha különböző alapú logaritmusokat tartalmazó kifejezésekkel van dolgunk. A kifejezések átalakításakor, egyszerűbb alakra hozatalakor azonos alapra hozzuk a logaritmusokat, majd az előző tulajdonságokat alkalmazzuk.

6. Ha $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, akkor $\quad b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

Megoldott feladatok

1. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

a) $\sqrt{(25)^{\frac{1}{\log_6 5}} + (49)^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; **b)** $-\log_8(\log_4(\log_2 16))$.

Megoldás. a) A gyökjel alatti összeg tagjait a következőképpen alakíthatjuk:

$(25)^{\frac{1}{\log_6 5}} = (25)^{\log_5 6} = (5^2)^{\log_5 6} = (5^{\log_5 6})^2 = (6)^2 = 36$,

$(49)^{\frac{1}{\log_8 7}} = (49)^{\log_7 8} = (7^2)^{\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = (8)^2 = 64$,

tehát $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.

b) Rendre a következőket írhatjuk:

$-\log_8(\log_4(\log_2 2^4)) = -\log_8(\log_4(4\log_2 2)) = -\log_8(\log_4 4) = -\log_8 1 = 0$.

2. Számítsuk ki:

a) $\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + \cdots + \lg\frac{99}{100}$;

b) $\log_2\sqrt{2} + \log_2\sqrt{2+\sqrt{2}} + \log_2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \log_2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

c) $\log_a\sqrt{x} + \log_a\sqrt{x^3} - 2\log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Megoldás. a) A logaritmusok összegét a $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ képlet alapján összevonva:

$\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}\right) = \lg\frac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2\lg 10 = -2$.

b) Ugyanazon képlet alapján írhatjuk, hogy:

$$\log_a\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$$
$$= \log_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})} =$$
$$= \log_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \log_2\sqrt{2}\sqrt{2} = \log_2 2 = 1.$$

c) A logaritmusok tulajdonságai alapján

$\log_a\sqrt{x}\sqrt{x^3} - \log_a x^2 = \log_a\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^3}}{x^2}\right) = \log_a\frac{x^2}{x^2} = \log_a 1 = 0$.

3. Számítsd ki az x értékét külön-külön az alábbi esetekben:

a) $\log_3 x = 2 + 3\log_3 5 - 2\log_3 4$; **b)** $\lg x = -1 + 2\lg 3 - 3\lg 5$.

Megoldás. Mindkét esetben a jobb oldali kifejezést előbb egyszerűbb alakra hozzuk a $k = \log_a a^k$, $\alpha\log_a x = \log_a x^\alpha$, $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ és $\log_a x -$

$-\log_a y = \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$ képletek felhasználásával.

a) $2+3\log_3 5-2\log_3 4=\log_3 3^2+\log_3 5^3-\log_3 4^2=\log_3(3^2\cdot 5^3)-\log_3 4^2=$ $=\log_3\left(\dfrac{3^2\cdot 5^3}{4^2}\right)$, tehát $\log_3 x=\log_3(\dfrac{3^2\cdot 5^3}{4^2})\Rightarrow x=\frac{3^2\cdot 5^3}{4^2}$ (mivel pozitív szám logaritmusa egyértelműen meghatározott).

b) A jobb oldal így alakítható:

$-1+2\lg 3-3\lg 5=\lg 10^{-1}+\lg 3^2-\lg 5^3=\lg\left(\frac{9}{10}\right)-\lg 125=\lg\left(\dfrac{9}{1250}\right)$.

Mivel $\lg x=\lg\left(\dfrac{9}{1250}\right)$, következik, hogy $x=\dfrac{9}{1250}$.

4. Számítsuk ki: **a)** $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$; **b)** $\lg 25$, ha $\lg 2=a$;

c) $\log_3 18$, ha $\log_3 12=a$; **d)** $\log_{12} 60$, ha $\log_6 30=a$, $\log_{15} 24=b$.

Megoldás. a) A logaritmusokat 2-es alapra hozzuk:

$$\log_2 24\cdot\log_2 96-\log_2 192\cdot\log_2 12=\log_2(2^3\cdot 3)\cdot\log_2(2^5\cdot 3)-\log_2(2^6\cdot 3)\cdot\log_2(2^2\cdot 3)=$$
$$=(\log_2 2^3+\log_2 3)(\log_2 2^5+\log_2 3)-(\log_2 2^6+\log_2 3)(\log_2 2^2+\log_2 3)=$$
$$=(3+\log_2 3)(5+\log_2 3)-(6+\log_2 3)(2+\log_2 3)=$$
$$=(15+8x+x^2)-(12+8x+x^2)=3,\text{ ahol } x=\log_2 3.$$

b) $\lg 25=\lg 5^2=2\lg 5=2\lg\left(\dfrac{10}{2}\right)=2(\lg 10-\lg 2)=2(1-a)$.

c) Első megoldás. A $\log_3 18$-at egyszerűbb alakra hozzuk:
$\log_3 18=\log_3(3^2\cdot 2)=\log_3 3^2+\log_3 2=2+\log_3 2$, majd megpróbáljuk kifejezni a $\log_3 2$ kifejezésben szereplő 2-t a 12 és 3 függvényében, mivel a $\log_3 12=a$ és $\log_3 3=1$ értékeket már ismerjük. Észrevesszük, hogy $2=\sqrt{\dfrac{12}{3}}$, tehát

$$\log_3 2=\log_3\sqrt{\frac{12}{3}}=\frac{1}{2}(\log_3 12-\log_3 3)=\frac{1}{2}(a-1).$$

Ezek alapján $\log_3 18=2+\dfrac{1}{2}(a-1)=\dfrac{a+3}{2}$.

Második megoldás. Ez a módszer azon alapszik, hogy mind a logaritmus alapjában, mind argumentumában csak prímszámokkal dolgozunk. Ezért átalakítjuk a logaritmusokat:

$\log_3 18=\log_3(3^2\cdot 2)=2+\log_3 2$ és $a=\log_3 12=\log_3(2^2\cdot 3)=2\log_3 2+1$.

Ez utóbbi egyenlőségből $\log_3 2=\dfrac{a-1}{2}$, tehát $\log_3 18=2+\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{a+3}{2}$.

d) Rendre a következőket írhatjuk:

$$\log_{12} 60=\frac{\log_2 60}{\log_2 12}=\frac{\log_2(4\cdot 3\cdot 5)}{\log_2(4\cdot 3)}=\frac{2+\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 3}.$$

Az $x=\log_2 3$, $y=\log_2 5$ jelölésekkel $\log_{12} 60=\dfrac{2+x+y}{2+x}$. Megpróbáljuk az a-t és a b-t kifejezni az x,y függvényében, hogy aztán a kapott rendszerből meghatározhassuk x,y-t az a és b segítségével.

$$a=\log_6 30=\frac{\log_2 30}{\log_2 6}=\frac{\log_2(2\cdot 3\cdot 5)}{\log_2(2\cdot 3)}=\frac{1+x+y}{1+x},$$
$$b=\log_{15} 24=\frac{\log_2 24}{\log_2 15}=\frac{\log_2(8\cdot 3)}{\log_2(3\cdot 5)}=\frac{3+x}{x+y}.$$

Az $\begin{cases}\dfrac{1+x+y}{1+x}=a\\ \dfrac{x+3}{x+y}=b\end{cases}$ rendszert megoldva $x=\dfrac{b+3-ab}{ab-1}$, $y=\dfrac{2a-b-2+ab}{ab-1}$,

tehát $\log_{12} 60=\dfrac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$.

5. Igazoljuk, hogy a $\lg 2$ szám irracionális.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\lg 2$ racionális, azaz $\lg 2=\dfrac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$. Innen $10^{\frac{m}{n}}=2$. Mindkét oldalt n-edik hatványra emelve kapjuk, hogy $10^m=2^n$. Ez utóbbi egyenlőség viszont nem állhat fenn, mivel a bal oldali kifejezés osztható tízzel, míg a jobb oldali nem. Tehát ellentmondáshoz jutottunk, így feltételezésünk hamis.

6. Számítsuk ki $[\log_2 25]$ értékét, ahol $[a]$ az $a\in\mathbb{R}$ egész részét jelöli.

Megoldás. Az alapötlet az, hogy a 25 számot a 2-nek két egymás után következő hatványa közé soroljuk be. Tudjuk, hogy $2^4<25<2^5$, így ha $\log_2 25=x$, akkor $2^x=25$ és $2^4<2^x<2^5$. Ez azt jelenti, hogy $4<x=\log_2 25<5$, azaz $[\log_2 25]=4$.

7. Mutassuk ki, hogy az a,b,x, $a\neq b$ pozitív és 1-től különböző számok esetén
$$\log_{\frac{a}{b}} x=\frac{\log_a x\log_b x}{\log_b x-\log_a x}.$$

Megoldás. A logaritmusokat x alapra hozzuk. Így mindkét oldal $\dfrac{1}{\log_x a-\log_x b}$ alakú lesz.

8. Ha $x,y>0$, $2x>3y$, határozzuk meg $\dfrac{x}{y}$ értékét tudva, hogy
$$\lg(2x-3y)=\frac{1}{2}(\lg x+\lg y).$$

Megoldás. Az adott egyenlőséget $\lg(2x-3y)=\lg\sqrt{xy}$ alakra hozhatjuk, innen, mivel egy pozitív szám logaritmusa egyértelmű, $2x-3y=\sqrt{xy}\Leftrightarrow 4x^2+9y^2-13xy=0$. Ha mindkét oldalt elosztjuk az $y^2\neq 0$ kifejezéssel, a $4\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-13\left(\dfrac{x}{y}\right)+9=0$ egyenlethez jutunk. A $t=\dfrac{x}{y}$ jelöléssel a $4t^2-13t+9=0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei $t_1=\dfrac{9}{4}$, $t_2=1$. Ezek közül csak az $\dfrac{x}{y}=\dfrac{9}{4}$ esetet fogadjuk el, mert csak erre teljesül a $2x>3y$ feltétel.

9. Igazoljuk, hogy ha $a^2+b^2=7ab$, $a,b>0$, akkor $\lg\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

Megoldás. A bizonyítandó egyenlőséget rendre a következő alakokra hozhatjuk: $\lg \frac{a+b}{3} = \lg \sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$ (mivel pozitív szám logaritmusa egyértelmű), $a+b = 3\sqrt{ab}$, amely (négyzetre emeléssel) egyenértékű az $(a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow a^2+b^2 = 7ab$ egyenlőségekkel.

Kifejezések logaritmálása

Ezt a paragrafust egy példával kezdjük, hogy szemléltessük a logaritmálás hasznosságát.

Tegyük fel, hogy ki szeretnénk számolni az $N = \dfrac{3^{20}\cdot\sqrt[5]{1396}\cdot\sqrt[3]{275}}{5^{97}\cdot\sqrt[4]{320}}$ szám közelítő értékét.

Könnyen megállapítható, hogy a 3^{20}, 5^{97} számok nagyon nagyok, valamint a kifejezésben szereplő gyökök kitevője is kettőnél nagyobb és így a számok nehezen számíthatóak ki.

Természetesen csak megközelítőleg kell meghatároznunk az N számot. Ezért előbb kiszámoljuk a $\lg N$ értéket (általában a 10-es alapú logaritmussal dolgozunk ilyen esetekben). Így az a^k hatványok $k \lg a$ alakú szorzatokká, az $\frac{a}{b}$ tört a $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ különbséggé, valamint az ab szorzat a $\lg(ab) = \lg a + \lg b$ összeggé alakul.

$$\begin{aligned}\lg N &= \lg(3^{20}\cdot\sqrt[5]{1396}\cdot\sqrt[3]{275}) - \lg(5^{97}\sqrt[4]{320}) = \\ &= \lg 3^{20} + \lg 1396^{\frac{1}{5}} + \lg 275^{\frac{1}{3}} - \left(\lg 5^{97} + \lg 320^{\frac{1}{4}}\right) = \\ &= 20\lg 3 + \frac{1}{5}\lg 1396 + \frac{1}{3}\lg 275 - 97\lg 5 - \frac{1}{4}\lg 320.\end{aligned}$$

A 10-es alapú logaritmustáblák vagy az *lg* kiszámolására képes zsebszámológép segítségével meghatározhatjuk (általában 6 vagy 7 tizedesnyi pontossággal) a $\lg 3$, $\lg 1396$, $\lg 275$, $\lg 5$, $\lg 320$ számokat, amely értékekkel elvégezve a többi számolásokat a $\lg N$ egy közelítő v értékéhez jutunk. Tehát $\lg N \approx v$, azaz $N \approx 10^v$. Általában az N megközelítő értékét is a logaritmustáblából olvassuk ki.

Az elektronikus számítógépeknek az iskolákban való jelenléte és a bonyolult számítások elvégzésére való használhatóságuk túlhaladottá teszi a logaritmusok ilyen irányú alkalmazását.

Következésképpen

Azt a műveletet, amely során az N számhoz (kifejezéshez) hozzárendeljük a $\lg N$ számot (kifejezést), **logaritmálás**nak nevezzük.

Logaritmusokat tartalmazó kifejezések összevonása

Logaritmusokat tartalmazó kifejezéseket az alábbi képletek felhasználásával hozhatunk egyszerűbb alakra:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), \quad \log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$k\log_a x = \log_a x^k, \quad k = \log_a a^k.$$

Példa. Határozzuk meg x-et az $\lg x = 2\lg 3 - 2 + \lg 4 + \lg 5$ egyenlőségből.

Megoldás. Rendre a következőket írhatjuk: $\lg x = \lg 3^2 - \lg 10^2 + \lg(4 \cdot 5)$, $\lg x = \lg \dfrac{3^2 \cdot 4 \cdot 5}{10^2}$, $\lg x = \lg \dfrac{9}{5}$, innen pedig $x = \dfrac{9}{5}$.

1.2. A KOMPLEX SZÁMOK HALMAZA

Az algebra fejlődése során fokozatosan bővűlt a szám fogalma. Az elemi és általános iskolai tanulmányai során a tanuló előbb a természetes, majd a a pozitív racionális számokkal ismerkedik meg. Az algebra tanulmányozása során eljut a negatív egész és negatív racionális számok fogalmához. Az egész számok halmazának bővítését többek között bizonyos egyenletek megoldhatósága, a megoldás megkeresése is indokolttá tette. Például a $2x - 1 = 0$ egyenletnek nyilvánvalóan nincs megoldása $\mathbb{Z}$-ben, de a racionális számok halmazán az $x = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ már megoldás.

A racionális számok halmazának „gazdagsága” ellenére szükséges volt ennek kiegészítése az úgynevezett irracionális számokkal (az $x^2 - 2 = 0$ egyenletnek nincs racionális gyöke, viszont van irracionális megoldása). A racionális és irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát. Ez a halmaz sem fedi le teljesen a felvetődő problémék mindegyikét, abban az értelemben, hogy léteznek olyan egyenletek, amelyek nem oldhatóak meg a valós számok halmazán. Például az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek (bármilyen egyszerű is) nincs megoldása az $\mathbb{R}$ halmazon, hiszen egyetlen valós számnak sincs negatív négyzete (-1). Szükséges tehát kibővíteni ezt a halmazt is, általánosabbá téve a szám fogalmát oly módon, hogy ebben az új, bővebb halmazban az $x^2 + 1 = 0$ típusú egyenletek is megoldhatóak legyenek.

1.2.1. Komplex számok algebrai alakja

$\mathbb{R}$-rel jelölve a valós számok halmazát, az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (a valós számok halmazának önmagával való Descartes-i szorzata) halmazon az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ halmazt értjük. Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elemeit (valós) számpároknak nevezzük.

Ezen a halmazon két algebrai műveletet értelmezünk:

1°) **Összeadás.** Legyen $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A z_1 és z_2 összegét a következőképpen definiáljuk:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

2°) **Szorzás.** Ha $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a szorzatukon a következő számpárt értjük:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

A $z_1 = (a_1, 0)$, $z_2 = (a_2, 0)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sajátos esetben a fenti értelmezések alapján

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0), \qquad z_1 z_2 = (a_1 a_2, 0).$$

Az előbbi összefüggések alapján az $\mathbb{R} \times \{0\}$ halmazon az összeadás és szorzás a valós számoknál fennálló szabályok alapján történik. Éppen ezért az $(a, 0)$ számpárt a-val azonosítjuk:

$$\boxed{(a, 0) = a, \quad a \in \mathbb{R}.}$$

Sajátosan $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$.

Kimutatjuk, hogy az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet megoldható az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon a fenti műveletekkel. Pontosabban belátjuk, hogy az $x = (0, 1)$ elem teljesíti az

$$x^2 = (-1, 0) = -1$$

összefüggést. Valóban, $x^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$.

A $(0, 1)$ elemet i-vel jelöljük (a latin **imaginarius** szó első betűje alapján) és **az imaginárius egység**-nek nevezzük. Tehát

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

Számítsuk ki a $b \cdot \mathrm{i}$ szorzatot, ha $b \in \mathbb{R}$.

$$b \cdot \mathrm{i} = (b, 0)(0, 1) = (0, b) = \mathrm{i} \cdot b,$$

tehát egy $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elem írható a:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\mathrm{i}.$$

alakban is.

Értelmezés. Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ számhalmazt a fent értelmezett összeadási és szorzási műveletekkel a **komplex számok halmazának** nevezzük és $\mathbb{C}$-vel jelöljük.

Eszerint a $\mathbb{C} = \{z = a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ a komplex számok halmazát jelöli, ennek minden eleme $z = a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú. A $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ jelölést használjuk a nullától különböző komplex számok halmazának jelölésére.

Az a valós számot a $z = a + \mathrm{i}b$ komplex szám **valós részének** nevezzük és $a = \mathrm{Re}(z)$- vel jelöljük, a $b\mathrm{i}$ szám pedig a z **imaginárius része**. A b valós számot az **imaginárius rész együtthatójának** nevezzük, jelölése: $b = \mathrm{Im}(z)$.
Ha $b = 0$, akkor $z = a \in \mathbb{R}$ és így $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

A $z = b\mathrm{i}$, $b \neq 0$ komplex számot (melynek valós része 0) **tiszta imaginárius számnak** (vagy tiszta képzetes számnak) nevezzük. Ezek halmazát $\mathbb{R}^*\mathrm{i} = \{b\mathrm{i} \mid b \in \mathbb{R}^*\}$-vel jelöljük.

Megjegyzés. A $z = a + \mathrm{i}b$ felírásban szereplő plusz jel nem a megszokott értelemben használt összeadást jelenti, hanem az a valós rész és a $b\mathrm{i}$ imaginárius (képzetes) rész szétválasztására szolgál.

Mint azt már láttuk, egy $z \in \mathbb{C}$ komplex szám a következő alakú:

$z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i}^2 = -1$.

z ebben a formában való felírását algbrai alaknak nevezzük. Tehát

A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám algebrai alakja

$$z = a + \mathrm{i}b, \quad \text{ahol} \quad a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1.$$

Következésképpen egy komplex szám egyértelműen meghatározott, ha ismert a valós része és az imaginárius (képzetes) része.

1.2.2. Algebrai műveletek komplex számokkal

Két komplex szám egyenlősége. Ha $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, akkor $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2)$, vagyis két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha a valós részük is és a képzetes részük is egyenlő.

Ha tehát $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$, $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor:

Értelmezés. A z_1 és z_2 komplex szám egyenlőségének szükséges és elégséges feltétele:

$$a_1 + \mathrm{i}b_1 = a_2 + \mathrm{i}b_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha mind a valós részük, ($a_1 = a_2$) mind pedig imaginárius részeiknek együtthatója megegyezik ($b_1 = b_2$).

Komplex számok szorzása és összeadása. A fejezet elején az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmazon értelmezett két algebrai műveletet a komplex számok algebrai alakjának segítségével is megfogalmazhatjuk.

Legyen $z_1 = (a_1, b_1) = a_1 + \mathrm{i}b_1$, $z_2 = (a_2, b_2) = a_2 + \mathrm{i}b_2$, ekkor

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$$

Két komplex szám összegén azt a komplex számot értjük, melynek valós része az összeadandók valós részeinek összege, imaginárius része pedig a képzetes részek összegével egyenlő.

A szorzás a következőképpen értelmezhető:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1) = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i} = (a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2). \end{aligned}}$$

Mivel

$$(a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2) = a_1a_2 + a_1\mathrm{i}b_2 + ib_1a_2 + \mathrm{i}^2b_1b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i},$$

látható, hogy két komplex szám szorzatát úgy számítjuk ki, hogy az első szám mindkét komponensét megszorozzuk a második szám mindkét komponensével, majd az $\mathrm{i}^2 = -1$ összefüggés felhasználásával összevonjuk az eredményt. A komplex számok szorzási szabálya hasonló az $(a+b\sqrt{2})$, $(c+d\sqrt{2})$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ alakú valós számok szorzásához.

A $\mathbb{C}$-n értelmezett összeadási és szorzási szabályok alapján az $\mathbb{R}$ halmazon érvényes műveleti szabályok érvényben maradnak a komplex számok halmazán is figyelembe véve, hogy $\mathrm{i}^2 = -1$.

Megoldott feladatok

1. Határozzuk meg az x, y valós számokat, tudva, hogy

$$x^2 - 5 + 2\mathrm{i} = -y^2 + \mathrm{i}xy.$$

Megoldás. Az adott összefüggés tulajdonképpen két algebrai alakban megadott komplex szám egyenlősége, így a valós és imaginárius részek egyenlősége alapján a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} x^2 - 5 = -y^2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 4 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Az első egyenletből $x + y = \pm 3$, tehát a rendszer az alábbi két szimmetrikus rendszer egyesítésével egyenértékű:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases} ; \quad \text{(II)} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Az (I) rendszer megoldásai: $(-1, -2)$, $(-2, -1)$, a (II) rendszert az $(1, 2)$, $(2, 1)$ párok teljesítik. A keresett párok tehát a következők: $(-1, -2)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$.

2. Számítsuk ki a $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ számokat az alábbi esetekben:

a) $z_1 = 1 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 5\mathrm{i}$; b) $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$, $z_2 = 1 + \mathrm{i}$.

Megoldás. a) A műveleti szabályok alapján: $z_1 + z_2 = (1+2) + (4-5)\mathrm{i} = 3 - \mathrm{i}$, $z_1 z_2 = (1 + 4\mathrm{i})(2 - 5\mathrm{i}) = 2 - 5\mathrm{i} + 8\mathrm{i} - 20\mathrm{i}^2 = 2 + 20 + (-5 + 8)\mathrm{i} = 22 + 3\mathrm{i}$;
b) $z_1 + z_2 = 1 + 1 + (3 + 1)\mathrm{i} = 2 + 4\mathrm{i}$ şi $z_1 z_2 = (1 + 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 = = 1 - 3 + (1 + 3)\mathrm{i} = -2 + 4\mathrm{i}$.

A komplex számok összeadásának tulajdonságai

Látni fogjuk, hogy a valós számok összeadásának tulajdonságai érvényesek maradnak a komplex számok esetén is. Két komplex szám egyenlőségének feltételét valamint a valós számok összeadására vonatkozó tulajdonságokat felhasználva igazolni fogjuk a következő tulajdonságokat:

Tétel. 1) A komplex számok összeadása **asszociatív**, azaz

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \ (\forall)\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

2) A komplex számok összeadása **kommutatív**, azaz:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ (\forall)\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3) A komplex számok összeadásának létezik semleges eleme, azaz létezik a $0 = 0 + 0 \cdot \mathrm{i} \in \mathbb{C}$ szám úgy, hogy

$$z + 0 = 0 + z = z, \ (\forall)\, z \in \mathbb{C}.$$

4) Ellentett elem létezése. Minden $z \in \mathbb{C}$ szám esetén létezik a $-z$-vel jelölt komplex szám, amelyre

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{C}$ halmaz az 1)-4) tulajdonságokkal rendelkező összeadás műveletével a **komplex számok additív kommutatív csoportját** alkotja.