2016

BAC

Daniel Petriceanu
Eugen Radu
Ana-Maria Petriceanu
Mihai Bunget
Nicușor Minculete

MATEMATICĂ

Conform noilor modele stabilite de MEN

CORINT
EDUCAȚIONAL

Date despre autori:
DANIEL PETRICEANU – profesor gr. I, Colegiul Naţional Mihai Viteazul, Bucureşti, autor de manuale şi auxiliare şcolare.
EUGEN RADU – profesor gr. I, Colegiul Naţional Mihai Viteazul, Bucureşti, autor de manuale şi auxiliare şcolare.
ANA-MARIA PETRICEANU – profesor gr. I, Liceul Teoretic Alexandru Ioan Cuza, Bucureşti, autor al unor culegeri de exerciţii şi probleme.
MIHAI BUNGET – profesor gr. I, Colegiul Naţional Tudor Vladimirescu din Târgu Jiu, autor de culegeri de teste pentru gimnaziu şi liceu.
NICUŞOR MINCULETE – lector dr., Universitatea Transilvania din Braşov, autor de cursuri universitare, articole ştiinţifice şi auxiliare şcolare.

Referent: Gabriel Vrînceanu

Redactor: Alice Raluca Petrescu
Tehnoredactare computerizată: Alice Raluca Petrescu
Designul copertei: Marian Simon

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică : Bacalaureat 2015 / Daniel Petriceanu (coord.),
Eugen Radu, Ana-Maria Petriceanu, ... - Bucureşti :
Corint Educaţional, 2014
ISBN 978-606-8668-19-2
I. Petriceanu, Daniel (coord.)
II. Radu, Eugen
III. Petriceanu, Ana-Maria
51(075.35)
371.278.9:373.5

ISBN 978-606-8668-19-2

Pentru comenzi şi informaţii, contactaţi:
GRUPUL EDITORIAL CORINT
Departamentul de Vânzări: Str. Mihai Eminescu nr. 54A, sector 1, Bucureşti,
cod poştal 010517, Tel./Fax: 021.319.47.97; 021.319.48.20
Depozit: Calea Plevnei nr. 145, sector 6, Bucureşti, cod poştal 060012, Tel.: 021.310.15.30
E-mail: vanzari@edituracorint.ro
Magazinul virtual: www.grupulcorint.ro

Format: 16/70x100; Coli tipo: 15

Tiparul executat la: EVEREST din 1994 TIPOGRAFIA

Cuvânt-înainte

Lucrarea se adresează elevilor care vor susține examenul de bacalaureat și, eventual, admiterea sau continuarea studiilor într-o facultate cu specializare tehnică sau economică.

Testele au fost concepute în concordanță cu programa școlară în vigoare și respectă structura anunțată de către Ministerul Educației Naționale.

În prima parte a lucrării sunt propuse teste care să ajute elevii să realizeze o evaluare cât mai obiectivă a cunoștințelor personale, având dedicate rezolvări detaliate cu soluții complete. Pentru o evaluare exactă a punctajului, fiecare enunț are alocate câte 5 puncte, iar fiecare test are 10 puncte din oficiu, realizându-se un total de 100 de puncte pe test.

Partea a doua a lucrării conține testele care au fost date la examenul de bacalaureat între anii 2000 și 2014 la nivelul M1. Sperăm ca acestea să îi ajute pe elevi să se familiarizeze cu tipul subiectelor de bacalaureat astfel încât să fie pregătiți pentru nivelul de dificultate al acestora. De asemenea, și aceste teste au soluții complete cu observații acolo unde am considerat că este necesar.

Recomandăm elevilor rezolvarea testelor după ce au făcut o recapitulare temeinică a cunoștințelor. În aceste condiții, testele pot fi rezolvate și contra-cronometru, pentru fiecare test fiind necesare trei ore.

Vă dorim succes la examenele pe care le veți susține!

Autorii

Capitolul 1

Teste propuse

Testul 1

Subiectul I

1. Rezolvați ecuația: $(2x + 1)^2 = (x - 2)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Aflați $x \in \mathbb{R}$ pentru care are sens: $\log_3\left(\log_{\frac{1}{5}} x\right)$.

3. Știind că $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $z^2 + z + 1 = 0$, calculați $z^4 + \dfrac{1}{z^4}$.

4. Câte numere pare putem forma cu cifrele 3, 4, 5, 6, 7?

5. Fie ABC un triunghi cu centrul de greutate G și M un punct în plan pentru care $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$. Arătați că $GM \parallel AC$.

6. Rezolvați ecuația: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x \in (0; \pi)$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $A \cdot A^t$.

b) Verificați că $A^2 - 5A - 2I_2 = O_2$.

c) Demonstrați că orice matrice care verifică egalitatea de la punctul b) este inversabilă.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție:
$x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.
a) Calculați $(3 * 5) * (-2)$.
b) Arătați că $(3, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.
c) Demonstrați că $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 12x + 16}$.
a) Calculați $f'(x)$.
b) Studiați derivabilitatea lui f.
c) Determinați punctele de extrem local ale funcției.

2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^3}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

a) Calculați $f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n\pi}}\right)$.
b) Arătați că f admite primitive.
c) Arătați că f nu este integrabilă.

Testul 2

Subiectul I

1. Rezolvați ecuația: $|x-1| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Rezolvați inecuația: $3x^2 + x - 4 \leqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + [x]$ este monotonă, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

4. Determinați $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = 2\overline{z}$.

5. Stabiliți probabilitatea ca aruncând un zar exact de 3 ori să obținem fața cu numărul 6.

6. Rezolvați ecuația: $\sin x + \cos x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Calculați determinantul matricei A.
b) Calculați rangul matricei A.

c) Rezolvați sistemul $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. a) Precizați elementele simetrizabile ale inelului $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$.

b) Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x + \hat{2}y = \hat{3} \\ \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{7} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$.

c) Fie $(K, +, \cdot)$ un corp, $K = \{0; 1; a; b\}$.
Demonstrați că $a^2 = b$ și $a^3 = 1$.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$.

a) Calculați f''.

b) Stabiliți semnul derivatei f''.

c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Se consideră șirul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

a) Calculați I_1 și I_2.

b) Arătați că $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n\geqslant 2$.

c) Demonstrați că $I_{2n+1}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$.

Testul 3

Subiectul I

1. Arătați că fracția $\frac{\overline{aaa}}{75}$ este fracție zecimală finită.

2. Raționalizați numitorul fracției $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$.

3. Determinați $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $2z + 3\bar{z} = 5$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $[x] = \{x\}$, unde $[\cdot]$ și $\{\cdot\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară.

5. Calculați coordonatele proiecției punctului $A(2; 1)$ pe dreapta de ecuație $2x + y - 1 = 0$.

6. Calculați $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2+k-2}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Pentru $m = 1$, determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât A să fie inversabilă.
c) Aflați $m \in \mathbb{R}$ știind că A este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f(X) = X^4 - 3X - 1$ și $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile complexe ale polinomului.
a) Calculați S_2.
b) Determinați numărul rădăcinilor raționale ale polinomului f.
c) Determinați numărul rădăcinilor reale ale polinomului f.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln^2 x - \ln x + x + m$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

c) Determinați numărul soluțiilor ecuației: $f(x) = 0$.

2. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$ și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Arătați că $F(-x) = -F(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

c) Arătați că funcția F este surjectivă.

Testul 4

Subiectul I

1. Determinați mulțimea $\{x^2 + 3x / x \in \mathbb{R}\}$.

2. Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ are sens $\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{4}}$.

3. Calculați suma $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + ... + n(3n - 1)$.

4. Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculați $\cos(3\pi - a)$.

5. Arătați că funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + 2$ nu este surjectivă.

6. Aflați aria triunghiului ABC, știind că $BC = 12$, $m(\sphericalangle B) = 60°$, $m(\sphericalangle C) = 75°$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X^2 + X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $(*)$.

a) Arătați că $X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifică egalitatea $(*)$.

b) Arătați că egalitatea $(*)$ este echivalentă cu: $(2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

c) Determinați toate soluțiile ecuației $(*)$.

2. Se dă polinomul $f(X) = X^{49} + X^3 - X + 2 \in \mathbb{C}[X]$.

a) Calculați $f(\varepsilon)$, unde $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

b) Determinați restul împărțirii lui f la $X - i$.

c) Determinați restul împărțirii lui f la $X^2 + X + 1$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră șirul dat prin $a_1 = 1$, $a_2 = 7$ și $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 2$.
a) Calculați a_4.
b) Studiați monotonia șirului a_n.
c) Calculați $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

2. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{3 + \cos x}$, și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Arătați că: $\dfrac{1}{4} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

c) Calculați $F(\pi)$.

Testul 5

Subiectul I

1. Aflați $x \in \mathbb{R}$ știind că $x + 1$ și $2x - 3$ au același semn.

2. Determinați inversa funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

3. Rezolvați inecuația: $\arcsin x < \arccos x$, $x \in [-1; 1]$.

4. Se dau punctele $A(2; 2)$, $B(-1; 0)$ și $C(2; -1)$.
Aflați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

5. Câte funcții strict crescătoare se pot defini pe mulțimea $\{1; 2; 3\}$ cu valori în mulțimea $\{1; 2; 3; 4\}$?

6. Aflați termenul ce nu conține x în dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$.

Subiectul al II-lea

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Verificați că $A^2 = 8A - 7I_2$.

b) Demonstrați prin inducție că $A^n = x_n A + y_n I_2$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție:
$x * y = x + y - 4$, $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(\mathbb{R}, *, \circ)$ este inel comutativ.

b) Determinați izomorfismul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, între inelele $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, *, \circ)$.

c) Calculați $\dfrac{17}{4} \circ \dfrac{22}{5} \circ \ldots \circ \dfrac{5n+7}{n+2}$.

Subiectul al III-lea

1. a) Stabiliți dacă șirul dat prin $x_n = \dfrac{2n+1}{3n+2} + \cos\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit.

b) Arătați că $\ln a - \ln b < \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b$, oricare ar fi a, $b \in (0, +\infty)$, $a < b$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+n^2}$.

2. a) Calculați $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}\,dx$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^3+kn^2}$.

c) Calculați $\int_1^2 \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Testul 6

Subiectul I

1. Rezolvați inecuația: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Dați exemplu de un număr $a \in \mathbb{Q}$ pentru care $\left|a-\sqrt{5}\right| < \dfrac{1}{100}$.

3. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care are sens $\arcsin(2x^2 - 1)$.

4. Rezolvați ecuația: $4^x + 2^x - 2 = 0$.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$. Determinați $f([-2; 1])$.

6. Într-un cerc, dacă $AB = 12$ și coarda $[AB]$ subîntinde un unghi de $120°$, aflați raza cercului.

Subiectul al II-lea

1. a) Dați exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\{-1; 1\})$ cu $\det A = 0$.
b) Demonstrați că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\{-1; 1\})$, atunci $\det B \in \{-4; 0; 4\}$.
c) Demonstrați că dacă $C \in \mathcal{M}_4(\{-1; 1\})$, atunci $\det C \,\vdots\, 8$.

2. Se dau polinoamele $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^5 - 5X^4 + 3X^3 + 11X^2 - 6X - 4$ și $Q(X) = X^5 - 5X^4 + 6X^3 + 2X^2 - 12X + 8$.
a) Verificați că 1 este rădăcină comună a celor două polinoame.
b) Aflați un c.m.m.d.c. al polinoamelor P și Q.
c) Demonstrați că P și Q mai au două rădăcini reale în comun.

Subiectul al III-lea

1. a) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{3}{x}\right]$, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

Cuprins