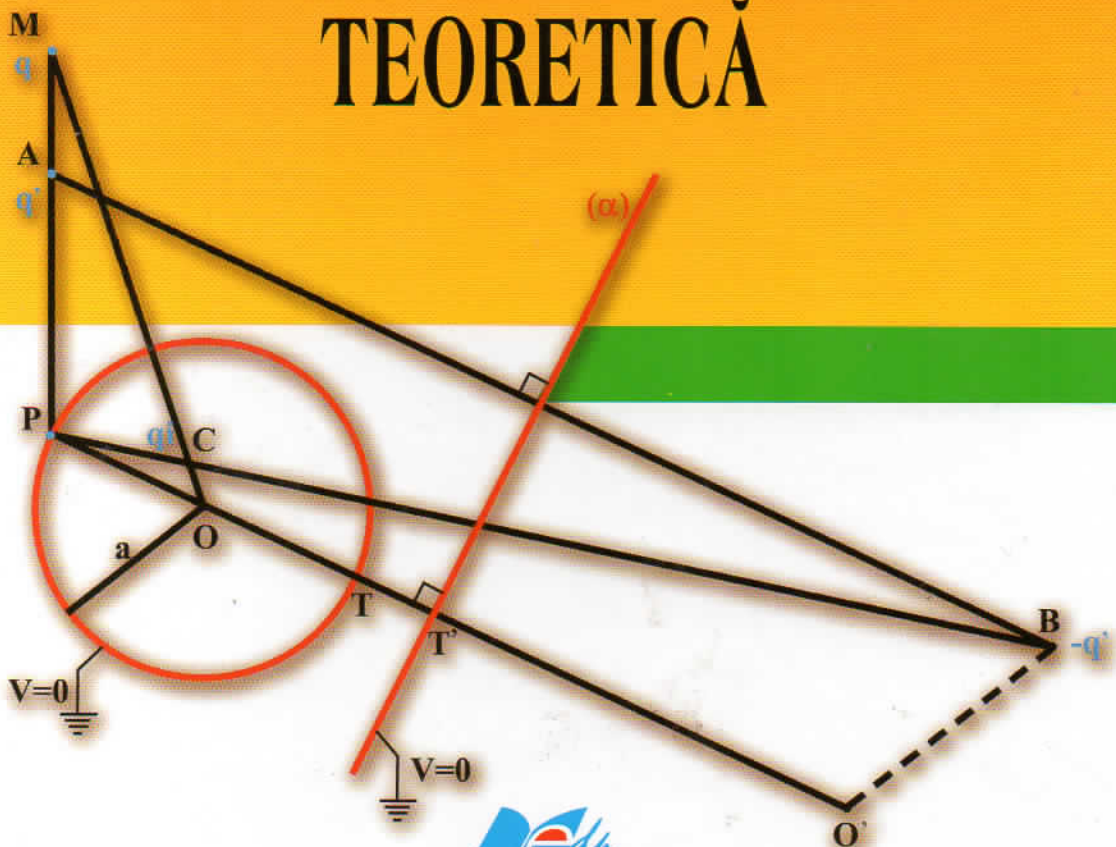


Tudor Micu
Dan Micu

GEOMETRIE ELEMENTARĂ ÎN ELECTROTEHNICA TEORETICĂ



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.

www.edituradp.ro

Cuprins

| | |
|--|-----------|
| Prefață | 11 |
| Introducere | 13 |
| Partea 1. Aplicații ale geometriei elementare în electrostatică | 15 |
| 1. Suprafața echipotențială de potențial nul în cazul a două sarcini punctiforme. Cercul lui Apollonius | 17 |
| 2. Determinarea liniilor de câmp în cazul a două fire paralele infinit lungi încărcate uniform cu densitatea liniară de sarcină ρ_l respectiv $-\rho_l$ | 19 |
| 3. Stabilirea axelor electrice a două conductoare cilindrice, infinit lungi, paralele, încărcate cu sarcini opuse | 21 |
| 4. Imaginea unei sarcini electrice față de o sferă conductoare de potențial nul. Soluție fără transformata Kelvin | 25 |
| 5. Densitatea de sarcină pe o sferă conductoare de potențial nul în prezența unei sarcini punctiforme | 28 |
| 6. Sarcinile imagine pentru două sfere conductoare exterioare de raze R_1 și R_2 aflate la același potențial | 30 |
| 6.1. Introducere | 31 |
| 6.2. Enunțul problemei | 32 |
| 6.3. Stabilirea configurației inverse modificate | 33 |
| 6.4. Determinarea sarcinilor imagine primare în "configurația inversă modificată" | 35 |
| 6.5. Revenirea la "configurația inițială". Determinarea sarcinilor imagine ale dispozitivului ... | 41 |

| | | |
|-------|---|----|
| 6.6. | Calculul potențialului sferei de rază R_1 cu ajutorul sarcinilor imagine..... | 44 |
| 6.7. | Formula capacității dispozitivului format din cele două sfere..... | 46 |
| 6.8. | Convergența formulelor de calcul..... | 47 |
| 6.9. | Algoritmul de calcul..... | 48 |
| 6.10. | Exemplu de calcul..... | 51 |
| 7. | Sarcinile imagine pentru două sfere conductoare care formează un unghi $\frac{\pi}{n}$ aflate la același potențial..... | 55 |
| 7.1. | Enunțul problemei..... | 55 |
| 7.2. | Aflarea sarcinilor imagine primare..... | 56 |
| 7.3. | Aflarea sarcinilor imagine ale dispozitivului..... | 57 |
| 7.4. | Determinarea capacității..... | 60 |
| 7.5. | Exemplu de calcul..... | 61 |
| 7.6. | Sarcinile imagine pentru două sfere conductoare tangente..... | 62 |
| 8. | Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența unei sfere conductoare..... | 66 |
| 8.1. | Determinarea sarcinilor imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența unei sfere conductoare legate la pământ cu metoda transformatei Kelvin... .. | 66 |
| 8.2. | Determinarea sarcinilor imagine în cazul unei sarcini punctiforme aflate în prezența unei sfere conductoare izolate fără sarcină electrică..... | 69 |
| 8.3. | Determinarea sarcinilor imagine în cazul unei sarcini punctiforme aflate în prezența unei sfere conductoare de potențial impus V_0 (sfera neizolată)..... | 70 |
| 8.4. | Determinarea sarcinilor imagine în cazul unei sarcini punctiforme aflate în prezența unei sfere conductoare de potențial V_0 (sfera izolată)..... | 71 |
| 9. | Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale..... | 72 |

| | | |
|------|--|----|
| 9.1. | Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale legate la pământ..... | 72 |
| 9.2. | Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale izolate, neîncărcate cu sarcină..... | 79 |
| 9.3. | Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale izolate, încărcate inițial cu sarcină..... | 81 |
| 9.4. | Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale neizolate aflate la potențial impus V_0 | 82 |

Partea 2. Aplicații ale geometriei elementare în teoria circuitelor electrice 85

| | | |
|-------|--|----|
| 10. | Aplicații ale geometriei elementare în probleme de topologia circuitelor electrice..... | 87 |
| 10.1. | Determinarea numărului minim de laturi al unui circuit electric cu n noduri..... | 87 |
| 10.2. | Determinarea numărului de ochiuri independente pentru un circuit electric cu l laturi și n noduri..... | 89 |
| 11. | Determinarea geometrică (grafică) a unor rezistențe electrice echivalente..... | 92 |
| 11.1. | Determinarea grafică a rezistenței echivalente pentru n rezistențe legate în paralel..... | 92 |
| 11.2. | Determinarea grafică a rezistenței stelei corespunzătoare triunghiului de rezistențe R_{12} , R_{23} , R_{31} cunoscute..... | 94 |
| 12. | Determinarea unor proprietăți electrice ale unor circuite de curent alternativ pe baza diagramelor fazoriale..... | 96 |
| 12.1. | Surse cunoscute, voltmetre cu indicații particulare. Exemplul 1..... | 96 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 12.2. | Surse cunoscute, voltmetre cu indicații particulare. Exemplul 2 | 98 |
| 13. | Determinarea unor proprietăți electrice ale unor circuite trifazate pe baza diagramelor fazoriale | 101 |
| 13.1. | Un circuit hexafazat simetric | 101 |
| 13.2. | Surse trifazate cunoscute, condiții impuse asupra indicațiilor unor voltmetre | 104 |
| 13.3. | Determinarea grafică a componentelor simetrice pentru un sistem trifazat | 112 |
| 13.4. | Componentele simetrice pentru sistemele de tensiuni de fază care au aceleași tensiuni de linie..... | 115 |
| 13.5. | Componenta directă a tensiunilor surselor date prin valori efective..... | 117 |
| 13.6. | Aprecierea calității unui circuit trifazat prin coeficientul de disimetrie..... | 120 |
| 14. | Studiul circuitelor cu ajutorul inversiunii geometrice..... | 123 |
| 14.1. | Analiza circuitelor reale L-C paralel la rezonanță cu metoda inversiunii | 126 |
| 14.2. | Observații asupra circuitului complet aperiodic | 129 |
| 14.3. | Circuitul defazor | 131 |
| 14.4. | Putere maximă și curent maxim la bornele unui circuit în funcție de valoarea unei rezistențe..... | 135 |
| 14.5. | Circuit de alimentare a cuptorului cu încălzire directă (Curent absorbit de valoare efectivă constantă la variația unei rezistențe)..... | 138 |
| 14.6. | Proiectarea unei scheme optime de pornire a unei mașini electrice monofazate folosind inversiunea geometrică..... | 141 |
| 14.7. | Inversiunea geometrică în sinteza circuitelor eteroparametrice dipolare | 147 |
| 15. | Diagrama cu doi poli de tensiune (diagrama de putere)... | 152 |
| 15.1. | Teoria diagramei cu doi poli de tensiune..... | 153 |

| | |
|---|-----|
| 15.2. Determinarea puterii maxime debitate de un alternator | 156 |
| Anexe | 159 |
| Anexa I. Situații posibile pentru un corp conductor..... | 161 |
| Anexa II. Calculul câmpului electric în prezența conductoarelor cu metoda imaginilor electrice..... | 163 |
| Anexa III. Transformarea prin inversiune a spațiului..... | 171 |
| Anexa IV. Transformata sarcinii și potențialului. Sarcina suplimentară din pol..... | 179 |
| Anexa V. Modelul matematic diferențial al ecuațiilor câmpului electromagnetic..... | 183 |
| Anexa VI. Câteva proprietăți geometrice legate de cerc | 191 |
| Anexa VII. Extinderea în câmp magnetic staționar a unor proprietăți geometrice stabilite în electrostatică.... | 197 |
| Bibliografie | 203 |

Partea 1

Aplicații ale geometriei elementare în electrostatică

1. Suprafața echipotențială de potențial nul în cazul a două sarcini punctiforme. Cercul lui Apollonius

Se consideră situația din Figura 1.1 în care sarcina pozitivă q_1 se află în punctul fix A , iar sarcina negativă q_2 se află în punctul fix B .

Potențialul unei sarcini fiind de același semn cu sarcina, vor exista două puncte pe dreapta AB în care potențialul este nul.

Ne întrebăm dacă avem și alte puncte P în spațiu cu această proprietate.

Cu formula (2) (anexa II) avem:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = 0$$

de unde

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{q_1}{|q_2|} = k, \quad (1)$$

k fiind o constantă.

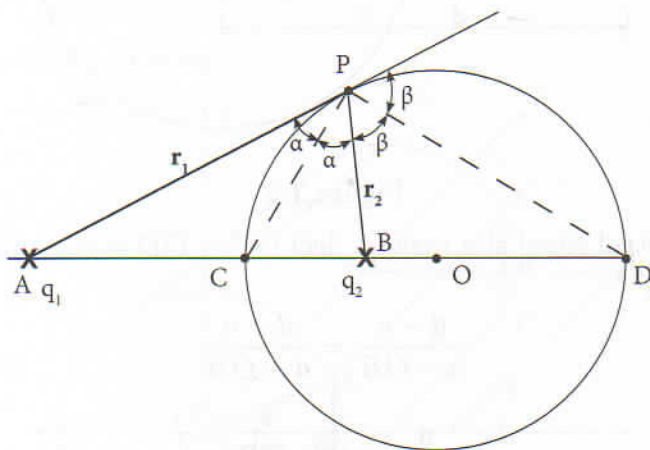


Figura 1.1

Problema este cunoscută: Se duce bisectoarea interioară și exterioară a unghiului \widehat{APB} care taie AB în C respectiv D .

Din teorema bisectoarei interioare și exterioare avem

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{r_1}{r_2} = k \quad (2)$$

de unde rezultă că punctele C și D sunt fixe.

Bisectoarele interioară și exterioară fiind perpendiculare, unghiul $\widehat{CPD} = 90^\circ$, deci locul geometric al punctului P este cercul de diametru CD în plan (cercul lui Apollonius) și având în vedere simetria plan-meridiană a problemei, este sfera de diametru CD în spațiu.

Observație. Câmpul și potențialul în exteriorul sferei de diametru CD nu se modifică dacă suprafața sferei fictive (care este de potențial nul) se înlocuiește cu o sferă conductoare de potențial nul (legată la pământ), Figura 1.2, conform efectului de ecran [2].

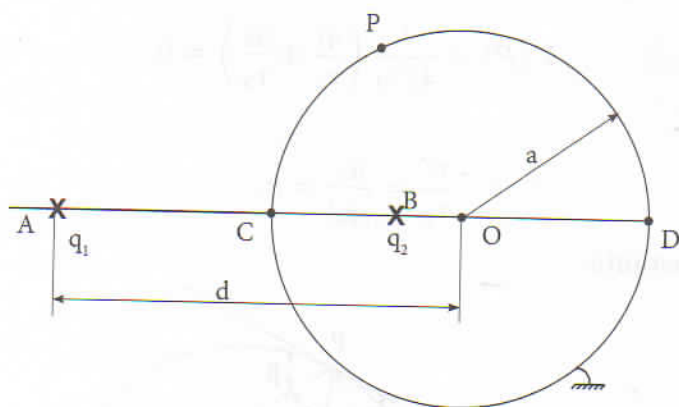


Figura 1.2

Fie O centrul sferei și a raza ei, deci $OC = OD = a$. Notăm $AO = d$. Din (2) avem

$$\frac{d - a}{a - OB} = \frac{d + a}{a + OB}$$

de unde

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{OB} \quad \text{sau} \quad OB = \frac{a^2}{d}. \quad (3)$$

Din (1) avem

$$\frac{q_1}{|q_2|} = \frac{d}{a} \quad \text{sau} \quad q_2 = -\frac{a}{d}q_1. \quad (4)$$

Deducem că dacă avem o sferă de rază a legată la pământ și o sarcină punctiformă q_1 la distanța $OA = d$ de centrul sferei (Figura 1.2) calculul câmpului și potențialului în exteriorul sferei se poate face cu sarcina q_1

și sarcina q_2 (Figura 1.1), unde poziția și valoarea sarcinii q_2 sunt date de formulele (3) și (4).

Este problema imaginii sarcinii punctiforme față de sfera de potențial nul, problemă care va fi reluată pe parcursul cărții.

2. Determinarea liniilor de câmp în cazul a două fire paralele infinit lungi încărcate uniform cu densitatea liniară de sarcină ρ_l respectiv $-\rho_l$

În prealabil se vor stabili unele relații utile în abordarea problemei. Astfel, fluxul câmpului electric (anexa II, formula (3)) stabilit de un fir infinit încărcat cu densitatea liniară de sarcină ρ_l prin suprafața laterală a unui cilindru circular drept de înălțime b (firul fiind situat în axa Oy de simetrie a cilindrului) (Figura 2.1) este:

$$\psi = \frac{\rho_l b}{\epsilon_0}$$

conform teoremei lui Gauss.

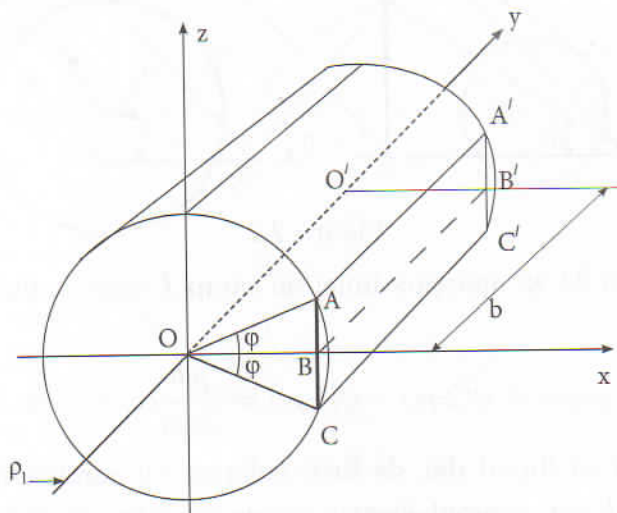


Figura 2.1

Fluxul câmpului electric (anexa II, formula (3)) prin suprafața dreptunghiului $AA'C'C$ ($AA' \parallel CC' \parallel Oy$) va fi egal cu fluxul prin porțiunea de