Costel Chiteş
Daniela Chiteş
Ion Cicu
Severius Moldoveanu

COMPLEMENTE de MATEMATICĂ

pentru clasa a VII-a

Aprofundare şi extindere prin exerciţii şi probleme

CORINT

Date despre autori:
COSTEL CHITEȘ – profesor gr. I la Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu” din București, doctor în matematică, lector dr. la Facultatea Științe ale Educației, cu o activitate de 10 ani ca inspector de matematică în cadrul Inspectoratului Școlar al Municipiului București, de membru în comitetul de redacție al „Gazetei Matematice”, redactor al revistei „Arhimede” și al revistei „Argument”; a publicat manuale pentru clasele IX-XII, culegeri de exerciții și probleme și lucrări cu caracter metodic.
DANIELA CHITEȘ – profesor gr. I la Școala nr. 79 „Academician Nicolae Teodorescu” din București, coautor al mai multor auxiliare școlare de matematică pentru gimnaziu, publicate la diferite edituri.
ION CICU – profesor gr. I la Școala nr. 96 din București și redactor la „Gazeta Matematică”, coautor al mai multor auxiliare școlare de matematică pentru gimnaziu, publicate la diferite edituri.
SEVERIUS MOLDOVEANU – profesor gr. I la Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu” din București, doctor în matematică, autor de auxiliare școlare și lucrări de specialitate în domeniul matematicii.

Redactor: Alice Raluca Petrescu
Tehnoredactare computerizată: Alice Raluca Petrescu
Coperta: Valeria Moldovan

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Complemente de matematică pentru clasa a VII-a: aprofundare și extindere prin exerciții și probleme/Costel Chiteș, Daniela Chiteș, Ion Cicu, Severius Moldoveanu. - București: Corint, 2009

ISBN 978-973-135-508-5

I. Chiteș, Costel
II. Chiteș, Daniela
III. Moldoveanu, Severius
IV. Cicu, Ion

51(075.33)

Pentru comenzi și informații, adresați-vă la:
Editura CORINT
Calea Plevnei nr. 145, cod poștal 060012, sector 6, București
Tel.: 021.319.88.22, 021.319.88.33
Fax: 021.319.88.66, 021.310.15.30
E-mail: vanzari@edituracorint.ro
Magazinul virtual: www.grupulcorint.ro

Format: 16/70 × 100
Coli tipo: 13,5

Tiparul executat la:
B-dul Tudor Vladimirescu, nr. 31, sector 5, București, ROMÂNIA
fedprint tipografie
Tel.: 411.00.55; 411.47.76 office@fedprint.ro

ISBN: 978-973-135-508-5
9 789731 355085

Cuprins

Cuvânt-înainte

În lucrarea *Șocul matematicii*, academicianul Solomon Marcus prezintă două discontinuități (șocuri) în formarea unui profesor, și anume: trecerea de la liceu la facultate și trecerea de la facultate la catedră.

Se știe că elevii întâmpină două discontinuități (șocuri): trecerea din învățământul primar la cel gimnazial și trecerea de la învățământul gimnazial la cel liceal.

În această lucrare, autorii și-au propus să diminueze al doilea șoc al elevilor în ceea ce privește disciplina matematică, încă din clasa a VII-a.

După vacanța de vară, elevii claselor a IX-a primesc teste predictive, a căror evaluare relevă o mare diferență față de notele primite la tezele cu subiect unic sau la examenul de admitere.

De aici rezultă multe comentarii, care în general îndepărtează elevii de studiul matematicii și îi derutează relativ la evaluarea propriului potențial intelectual.

Această situație are multe cauze. Vom prezenta câteva dintre ele:

a) Reducerea programei de gimnaziu creează discontinuități în înțelegerea coerentă a matematicii.

b) Concentrarea atenției tuturor elevilor numai pe programa tezelor cu subiect unic, programă din care lipsesc inevitabil anumite capitole. Acestor capitole li se acordă mai puțină atenție și ele constituie uneori o bază serioasă în înțelegerea materiei din clasele următoare.

c) Există o diferență considerabilă între nivelul problemelor din manualele școlare și cel al problemelor date la concursurile școlare. Se remarcă numărul mare de concursuri interjudețene și participarea elevilor în număr din ce în ce mai mare la aceste competiții.

d) Noțiuni fundamentale de matematică, vectori în plan, operații cu vectori, produs scalar, elemente de geometrie metrică, elemente de trigonometrie sunt necesare la fizica din clasa a VII-a și nu fac parte din programa de matematică.

Suntem adepții ideii: „cine poate mai mult, poate mai puțin”. De aceea, credem că elevii noștri au o deschidere deosebită la nou, pot fi îndrumați fie prin rezolvare de probleme din paginile „Gazetei Matematice” sau din alte reviste destinate elevilor, fie prin căutarea de surse diferite (chiar electronice) a unor chestiuni teoretice sau a unor rezolvări inedite ale problemelor. Rolul „Gazetei Matematice” este mai mare și datorită selecției în ultimii ani a unor probleme care au fost propuse la Olimpiada de matematică, faza locală.

Noi am acceptat viziunea predării din perspectivă istorică a matematicii. Vom aminti cuvintele marelui matematician Dimitrie Pompeiu: „A privi îndărăt pe linia timpului spre ceea ce a fost și a vedea cum au luat naștere noțiunile reprezintă o bogăție inestimabilă, din care pot lua naștere noi adevăruri”.

Motivele care au determinat această alegere sunt următoarele:

1. Prezentarea în mod natural, pe linie istorică, a generării unor noțiuni de matematică.

2. Conexiunile pe care elevii le fac între matematică, informatică, istorie, geografie, chimie, fizică. Istoria descoperirilor științifice este deosebit de captivantă.

3. Existența multor teme de opțional cu acest titlu.

Lucrarea este structurată în trei părți.

Prima parte este de algebră și conține atât noțiunile din programă, cât și noțiuni importante pe care elevul le-a întâlnit la informatică, fizică și chimie. Vom enumera câteva dintre acestea: baze de numerație, algoritmul lui Euclid, ciurul lui Eratostene, teorema lui Euclid referitoare la infinitatea numerelor prime, calculul unor sume, inegalități, identități etc.

A doua parte este de geometrie și conține extinderi necesare înțelegerii geometriei vectoriale în clasa a IX-a. Am insistat pe relații metrice, proprietăți ale patrulaterelor inscriptibile, concurența liniilor importante, puncte remarcabile. Am adăugat și prime noțiuni de calcul vectorial pentru abordarea cu succes a noțiunilor din fizică. O înțelegere profundă se realizează prin unificarea științelor.

Partea a treia am dedicat-o unor note matematice care să extindă noțiuni din prima parte și care sperăm să creeze o deschidere pentru lectura descoperirilor în matematică, a evoluției noțiunilor fundamentale.

În final am prezentat și matematicienii care au adus contribuții de seamă în dezvoltarea acestei științe. I-am prezentat cronologic și uneori am făcut unele descrieri mai ample ale personalității lor. Nu am uitat aportul la dezvoltarea matematicii al unor matematicieni români.

Sperăm ca, prin lectură și lucru, elevii să ajungă la concluzia că matematica nu este doar utilă, ci și frumoasă.

Autorii

Capitolul 1 Algebră

1. Recapitulare și completări

1.1. Mulțimea numerelor naturale

Vom reaminti unele cunoștințe matematice pe care le-ați parcurs în anii precedenți și vom completa cu unele noțiuni importante folositoare în multe domenii cum sunt: fizica, chimia, informatica etc.

Se cunoaște faptul că procurarea mijloacelor de existență ale omului cu ajutorul uneltelor de muncă a condus la capacitatea de a abstractiza putându-se astfel măsura și număra. Studiul apariției și dezvoltării noțiunilor de întindere și de număr este o parte deosebit de importantă și atractivă pentru fiecare dintre noi. Din epoca de piatră și până în prezent, cele două noțiuni fundamentale, de întindere și de număr, au fost studiate și înțelese la nivelul de dezvoltare al epocii respective. Modul în care au fost înțelese aceste noțiuni ne arată nivelul de dezvoltare al epocii.

Ilustrăm cele afirmate printr-un exemplu interesant. În călătorii (în care se găseau mulți misionari) s-a descoperit la începutul anilor 1800, la tribul indian de vânători abiponi din Argentina, modul în care aceștia percepeau numerele. Astfel,1 = initara, 2 = inioaka, 3 = inioaka-initara, 4 = degetele struțului, 5 = degetele mâinii, 10 = degetele ambelor mâini, 20 = degetele mâinilor și picioarelor. Remarcăm astfel că pentru acești sălbatici numerele nu erau cunoscute. Omul primitiv număra astfel: 1, 2, „mult”. Numărarea s-a efectuat apoi în mod mecanic prin atingerea obiectelor ce urmau a fi numărate.

Înlocuitorii obiectelor de numărat au fost apoi pietricele, scoici, crestături pe oasele animalelor sau pe bețe, noduri pe sfoară, numărătorile și, în zilele noastre, calculatoarele electronice.

Astfel, în vechime, pentru schimburile de produse din natură s-au realizat corespondențe. Asupra noțiunii de corespondență bijectivă (unu la unu) se va reveni în matematica de liceu.

În exemplul de mai înainte ne imaginam cât de anevoiasă a fost dezvoltarea noțiunii de număr de-a lungul secolelor.

Numărarea pe degete a condus probabil la utilizarea diferitelor sisteme de numerație în baze diferite: 5, 10, 20, 6, 11, 12 etc. Ne imaginăm că 5 provine de la degetele de la o mână, 10 de la degetele ambelor mâini, 20 de la degetele mâinilor și ale picioarelor unei personane, 6 de la degetele mâinii stângi la care se adaugă și un deget de la mâna dreaptă etc. De exemplu, strămoșii francezilor, galii, utilizau sistemul de numerație în baza 20. Din acest motiv și astăzi în limba franceză se utilizează arhaismul „quatre-vingts" pentru 80, adică de 4 ori câte 20. Tot în baza 20 lucra și poporul maya în secolul al IV-lea î.Hr. (cu 1 600 de ani înaintea europenilor) utilizând sistemul pozițional de numerație. Noi utilizăm astăzi sistemul zecimal adică baza 10, bază în care se utilizează zece cifre (de exemplu, de pe telefonul mobil al fiecăruia dintre noi). S-au studiat avantajele și dezavantajele utilizării diferitelor sisteme de numerație, fie din punct de vedere al proprietăților aritmetice (de divizibilitate), fie al scrierii sau al modului de transmitere de informație electronic. Astfel, s-a ajuns la baza 2. În baza 2 se utilizează doar cifrele 0 și 1, acestea putându-se ușor reprezenta în limbaj mașină.

În baza 2, operațiile de adunare și de înmulțire se efectuează astfel:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

.	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Remarcăm că în baza 2 nu citim numărul $10_{(2)}$ „zece", ci îl citim „unu zero" etc.

Aceste tabele se mai numesc și **tablele operațiilor de adunare și de înmulțire**.

1.2. Dezvoltarea unui număr natural într-o bază de numerație

Fie $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 2$, un număr fixat numit **bază de numerație**. Cifrele din această bază sunt: 0, 1, 2, ..., $b - 1$. Numărul lor este egal cu b. Pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}^*$ și cifrele $a_1, a_2, ..., a_k$ pentru care:

$$n = \overline{a_1 a_2 ... a_k} = a_1 \cdot b^{k-1} + a_2 \cdot b^{k-2} + ... + a_{k-1} \cdot b + a_k \cdot b^0 .$$

Reamintim că $b^0 = 1$.

Exerciții rezolvate

1. Să se scrie numărul 41 ca sumă de puteri distinte ale lui 2. Să se deducă scrierea numărului 41 din baza 10 în baza 2.

Soluție: Scriem toate puterile lui 2 care nu depășesc numărul dat $n = 41$ (să se verifice rezultatul obținut):
$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$.

Apoi scriem: $41 = 32 + 9 = 2^5 + 9 = 2^5 + 2^3 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^0$.
Deci $41_{(10)} = 101001_{(2)}$.

Verificare: $101001_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 32 + 8 + 1 = 41$.

2. Să se scrie numărul 64 din baza 10 în baza 3.

Soluție: Scriem toate puterile lui 3 care nu depășesc numărul dat: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, apoi: $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 3^2 = 18$, $2 \cdot 3^3 = 54$. Deducem că: $64 = 2 \cdot 3^3 + 10 = 2 \cdot 3^3 + 3^2 + 3^0 = 2101_{(3)}$.

Exerciții propuse

1. *Știați că, în Brazilia, coroadoșii numără din trei în trei după numărul articulațiilor fiecărui deget al mâinii stângi (fără degetul mare), adică până la 12?* Găsiți alt procedeu de numărare până la 28.

2. Transformați în baza 10 următoarele numere scrise în baza 2:
$10_{(2)}$, $11_{(2)}$, $101_{(2)}$, $10011_{(2)}$, $111_{(2)}$.

3. Transformați în baza 2 următoarele numere scrise în baza 10:
5, 6, 10, 20 și 32.

4. Transformați în baza 2 și apoi verificați rezultatele obținute prin transformare în baza inițială următoarele numere scrise în baza 10: 5, 6, 10, 18 și 30.

5. Să se efectueze următoarele operații în baza 2, apoi să se verifice rezultatele obținute transformând numerele date în baza 10, efectuând calculele și transformând numerele obținute în baza 2:

a) $101_{(2)} + 111_{(2)}$, $11_{(2)} \cdot 110_{(2)}$.

b) Să se efectueze înmulțirile: $21 \cdot 19$, $39 \cdot 17$, utilizând metoda expusă în nota 1 de la finalul părții de algebră (a se vedea nota 1), metodă utilizată de vechii egipteni.

6. În baza 3, cifrele sunt: 0, 1 și 2. Operațiile de adunare și de înmulțire se definesc astfel:

+	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

·	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

a) Să se efecteze în baza 3 următoarele operații:
$122_{(3)} + 201_{(3)}$, $22_{(3)} \cdot 21_{(3)}$.

b) Să se verifice transformând mai întâi numerele în baza 10, efectuând operațiile în baza 10 și transformând rezultatele obținute în baza 3.

Atenție! În baza 3, de exemplu, numărul $122_{(3)}$ se citește unu doi doi și nu o sută douăzeci și doi.

7. În baza 5, cifrele sunt: 0, 1, 2, 3 și 4.

a) Să se scrie tablele operațiilor de adunare și de înmulțire în această bază.

b) Să se efecteze în baza 5 următoarele operații:

$1334_{(5)} + 342_{(5)}$, $24_{(5)} \cdot 43_{(5)}$.

8. a) Știind că în baza 11 cifrele sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9 și *a*, să se scrie tablele operațiilor de adunare și înmulțire, apoi să se efecteze:

$289a_{(11)} + 855_{(11)}$, $89_{(11)} \cdot 35_{(11)}$.

b) Știind că în baza 12 cifrele sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a* și *b*, să se scrie tablele operațiilor de adunare și înmulțire, apoi să se efectueze:

$769a_{(12)} + 79b_{(12)}$, $29_{(12)} \cdot 79_{(12)}$.

2. Mulțimi de numere

Mulțimile de numere pe care le-am întâlnit în clasele anterioare au fost $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}_+$, care au fost definite astfel:

• $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ – mulțimea numerelor naturale, notație provenită din limba franceză, unde „*naturel*” este *natural*;

se notează: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$;

• $\mathbb{Z} = \{.., -n, -n + 1, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$– mulțimea numerelor întregi, notație provenită din limba germană, unde „*die Zahl*” este *număr*.

Se notează: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

• $\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \dfrac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{N}^*,\ b \in \mathbb{N}^* \right\}$ – mulțimea numerelor raționale pozitive, notație provenită din limba franceză, unde „*quotient*” este *cât* , adică *fracție*;

Se notează: $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}_+^* \cup \{0\}$.

Cunoaștem incluziunile:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ și } \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+,$$

și ne reamintim că extinderile lui $\mathbb{N}$, respectiv $\mathbb{Z}$ s-au realizat pentru a putea rezolva ecuații, de exemplu: $5 + x = 2$, respectiv $5 \cdot x = 2$ (prima neavând soluții în $\mathbb{N}$, iar a doua ecuație neavând soluții în $\mathbb{Z}$).

2.1. Elemente de aritmetică a numerelor naturale

♦ Teorema împărțirii cu rest a numerelor naturale

Teorema împărțirii cu rest a numerelor naturale:

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, atunci există și sunt unice $q, r \in \mathbb{N}$ cu proprietățile:

$$a = b \cdot q + r,\ 0 \leqslant r < b,$$

unde a se numește deîmpărțit, b se numește împărțitor, q se numește câtul, iar r se numește restul împărțirii lui a la b.

Exemplu: $a = 2\ 009$, $b = 10$. Cum $2\ 009 = 10 \cdot 200 + 9$, rezultă că $q = 200$, $r = 9$.

Observație: Este adevărată egalitatea: $2\ 009 = 10 \cdot 199 + 19$, dar nu reprezintă teorema împărțirii cu rest deoarece $q' = 199$, $r' = 19$ și nu se verifică condiția $0 \leqslant r' < b$, adică $0 \leqslant 19 < 10$ este fals.

Comentariu asupra teoremei împărțirii cu rest:

Orice submulțime nevidă $A \subseteq \mathbb{N}$ are un cel mai mic element, numit **element minim** notat cu $\min A$.

Exemplu: Fie $A = \{2n / n \in \mathbb{N}^*\}$, $\min A = 2$. Deci $\min A \in A$ și pentru orice $a \in A \Rightarrow \min A \leqslant a$.

Fiind date numerele naturale $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, și considerând mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} / x = a - b \cdot q,\ q \in \mathbb{N}\}$, $r =$ restul va fi cel mai mic element al mulțimii A, adică $r = \min A$.

♦ Divizibilitatea numerelor naturale

Fiind date numerale naturale $a, b \in \mathbb{N}$, spunem că a divide pe b și scriem $a \mid b$ dacă există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $b = a \cdot c$. În acest caz, a se numește **divizor al lui *b*** și b se numește **multiplu de *a***.

Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$:

Pentru orice $a, b, m, n, p \in \mathbb{N}$ au loc afirmațiile:

1. $1 \mid n$

2. Dacă $n \mid m$ și $m \mid n$, atunci $m = n$.

3. Dacă $m \mid n$ și $n \mid p$, atunci $m \mid p$.

4. Dacă $m \mid 1$, atunci $m = 1$.

5. Dacă $m \mid (a + b)$ și $m \mid a$, atunci $m \mid b$.

6. Dacă $m \mid a$ și $m \mid b$, atunci $m \mid (a+b)$.
7. $a \mid 0$
8. Dacă $0 \mid a$, atunci $a = 0$.

♦ Numere prime

Un număr $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, se numește **număr prim** dacă nu are alți divizori decât pe 1 și p.

Toate celelalte numere mai mari ca 2 se numesc **numere neprime** sau **compuse**, acestea având cel puțin un divizor propriu. Numerele 0 și 1 au un statut special.

Șirul numerelor prime este: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,... și este infinit (Euclid).

Euclid (325-265 î.Hr.) este unul dintre cei mai mari matematicieni greci ai Antichității. A activat în Alexandria. A scris cărți dedicate geometriei, opticii, astronomiei, muzicii și mecanicii. Cea mai cunoscută este ***„Stihia” („Elementele”)*** *lui Euclid. Euclid utilizează pentru prima dată raționamentul de demonstrație prin reducere la absurd.*

Teorema lui Euclid:

Șirul numerelor prime este infinit.

Demonstrație (conform *Cărții a IX-a* din lucrarea *„Elementele”* a lui Euclid):

Să presupunem că mulțimea numerelor prime din $\mathbb{N}$ este finită și o vom nota cu $P = \{p_1, p_1, \ldots, p_k\}$.

Definim numărul $M = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Cum $M \in \mathbb{N}$, $M \geqslant 2$, rezultă că există un număr prim q care divide pe M, deci există $1 \leqslant i \leqslant k$ astfel încât $q = p_i$. Din $q \mid p_1 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ și $q \mid M$ rezultă că q divide și diferența lor, adică $q \mid 1$, adică $q = 1$, contradicție cu $q =$ prim. Deci, ipoteza noastră este falsă, de unde rezultă concluzia. ∢

Observație: Genialitatea demonstrației lui Euclid constă în a nu determina numărul prim consecutiv din șirul numerelor prime, modalitate ce nici până astăzi nu a fost descoperită. Cu ajutorul celor mai performante calculatoare se determină, la un moment dat, cel mai mare număr prim cunoscut. Nu se cunoaște o regulă de a găsi numărul prim consecutiv acestuia din șirul numerelor prime. (În anul 1961, cel mai mare număr prim cunoscut era $p = 2^{4\,423} - 1$).

Exercițiu rezolvat

Orice număr neprim $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, are cel puțin un divizor prim p cu proprietatea că $p^2 \leqslant n$.

Soluție: n are cel puțin un cel mai mic divizor prim p, deci $n = p \cdot q$, $p \leqslant q$. Deci $p^2 \leqslant p \cdot q = n$.

Ciurul lui Eratostene:

Un procedeu practic de determinare a numerelor prime mai mici decât numărul natural M este următorul: se scriu toate numerele naturale 2, 3, 4,... , M, apoi se șterg succesiv multiplii de 2, de 3,… ai tuturor numerelor prime p ce îndeplinesc condiția $p^2 \leqslant M$. Numerele neșterse din tabel (rămase în *ciurul lui Eratostene*, ciur = sită) reprezintă toate numerele prime mai mici sau egale cu M.

Exercițiu rezolvat

Să se determine cu ajutorul ciurului lui Eratostene toate numerele naturale mai mici decât 20.

Soluție: Scriem un tabel cu toate numerele naturale cuprinse între 2 și 20. Apoi îl lăsăm pe 2 și ștergem toți multiplii de 2; îl considerăm pe cel mai mic număr rămas, care este 3, îl păstrăm și ștergem toți multiplii săi; din lista rămasă, cel mai mic număr este 5 și cum $5^2 > 20$, algoritmul se oprește, adică numerele rămase în ciur sunt numerele căutate: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Teorema fundamentală a aritmeticii:

Orice număr natural $n \geqslant 2$ se descompune în factori primi în mod unic exceptând ordinea factorilor.

Exercițiu rezolvat

Descompuneți în factori primi numerele: 220 și 284.

Soluție: $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, $284 = 2^2 \cdot 71$.

Observație: Ca aplicație a teoremei fundamentale a aritmeticii, ne propunem să determinăm numărul de divizori naturali ai unui număr natural dat.

Exercițiu rezolvat

Câți divizori naturali are numărul $a = 500$?

Soluție: Descompunem numărul dat în factori primi: $a = 2^2 \cdot 5^3$. Toți divizorii săi sunt de forma: $2^a \cdot 5^b$, unde $0 \leqslant a \leqslant 2$ și $0 \leqslant b \leqslant 3$. Deci a poate lua 3 valori și b poate lua 4 valori. În total vom obține 12 valori, adică numărul de divizori este egal cu:
$(2 + 1) \cdot (3 + 1) = 12$.

Generalizare:

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, considerăm toți factorii primi diferiți care apar în descompunerea sa de forma $p_1, p_2, \ldots, p_k$, atunci: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$.

Numărul de divizori naturali ai lui n este egal cu:

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1).$$