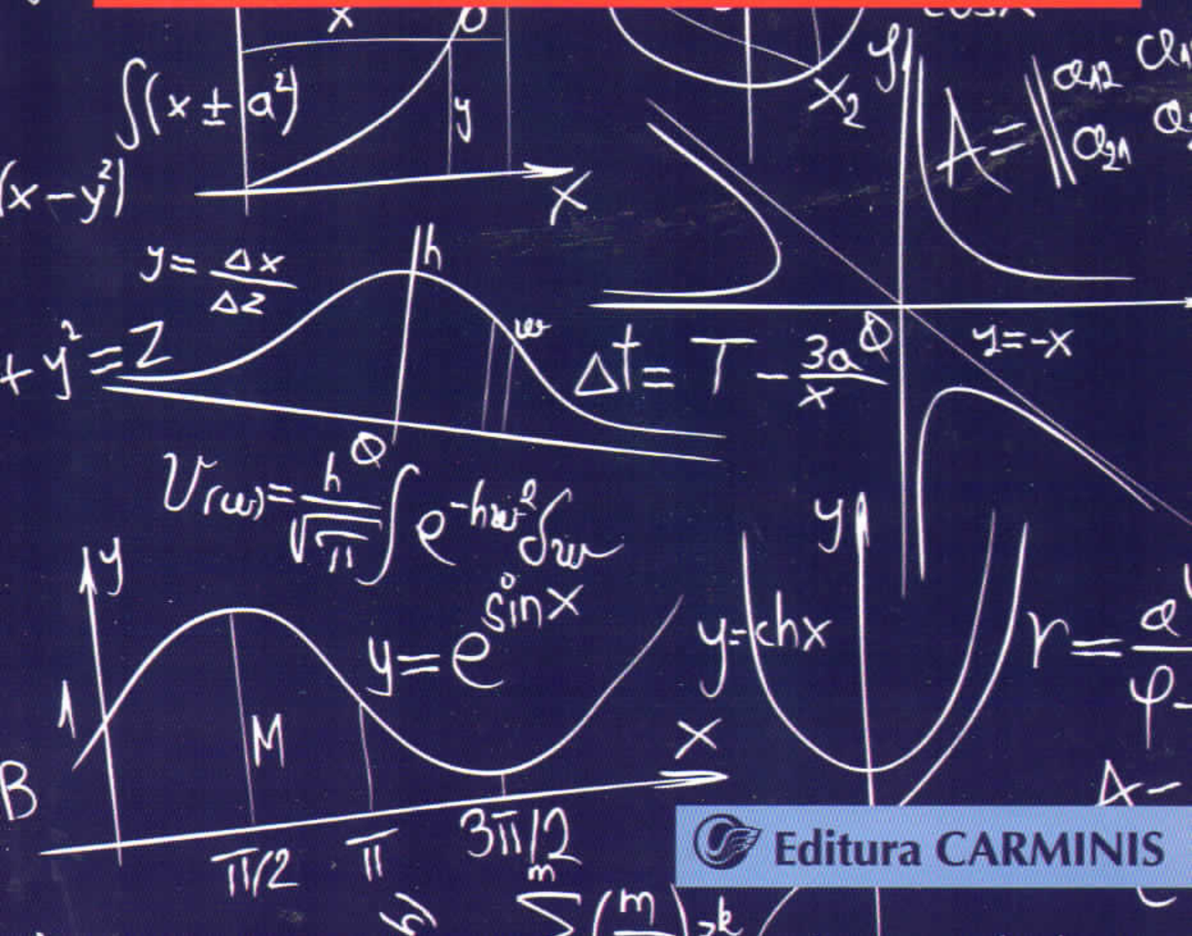
Ion Bucur Popescu

Ghid de pregătire BACALAUREAT MATEMATICĂ

M_şt-nat



Editura CARMINIS

CUPRINS

TEME RECAPITULATIVE

TEME RECAPITULATIVE

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Noțiuni teoretice

Modulul numărului $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

Proprietățile modulului: $|x| \geq 0$ pentru $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x| = \max(x, -x)$;

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pentru $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pentru $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ și $y \neq 0$; $|x + y| \leq |x| + |y|$;

$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$; $|x| \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$, unde $r > 0$; $|x| > r \Leftrightarrow x \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)$.

Pentru $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n \leq x < n + 1$, $n \overset{\text{not}}{=} [x]$ – partea întreagă a lui x, $x - [x] = \{x\}$ – partea fracționară a lui x.

Proprietăți: $x - 1 < [x] \leq x$; $\{x\} \in [0, 1)$; $[x + n] = [x] + n$ și $\{x + n\} = \{x\}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Principiul inducției matematice. Fiind dat un predicat $P(n)$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dacă propoziția $P(n_0)$ este adevărată și, de asemenea, implicația $P(k) \rightarrow P(k+1)$ este adevărată, atunci propoziția $(\forall\, n \geq n_0) P(n)$ este adevărată.

Cardinalul unei mulțimi finite (notat $\operatorname{card}(A)$ sau $|A|$) reprezintă numărul său de elemente.

Proprietăți: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, $|P(A)| = 2^{|A|}$ ($P(A) = \{B \mid B \subset A\}$).

O funcție definită pe mulțimea nevidă A cu valori în mulțimea nevidă B (notație $f : A \rightarrow B$) reprezintă o lege prin care, pentru $\forall\, a \in A$, $\exists!\, b \in B$ astfel încât $a \xrightarrow{f} b$.

Pentru $A' \subset A$, $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$ reprezintă imaginea lui A' prin f, iar $\operatorname{Im} f = f(A)$ reprezintă imaginea funcției f, iar pentru $B' \subset B$, $f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ reprezintă preimaginea lui B' prin f.

Mulțimea $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ reprezintă graficul funcției f.

Pentru $A' \subset A$, funcția $f_{A'} : A' \rightarrow B$, unde $f_{A'}(a) = f(a)$, $\forall\, a \in A'$, reprezintă restricția funcției f la mulțimea A', iar f reprezintă prelungirea funcției $f_{A'}$ la A.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, se numește mărginită dacă $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $a \leq f(x) \leq b$, $\forall\, x \in D$.

Mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ se numește simetrică dacă $-x \in D$, pentru $\forall\, x \in D$.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, D simetrică, se numește pară (respectiv impară) dacă $f(-x) = f(x)$ (respectiv $f(-x) = -f(x)$) pentru $\forall\, x \in D$. Graficul unei funcții pare este simetric față de axa

Oy, iar graficul unei funcții impare este simetric față de originea O. Mai general, dreapta $x = m$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f dacă $f(x) = f(2m - x),\ \forall\ x \in D$, iar punctul $C(a, b)$ este centru de simetrie pentru grafic dacă $f(x) + f(2a - x) = 2b,\ \forall\ x \in D$.

Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ se numește periodică dacă $\exists\ T > 0$ (numit perioadă) astfel încât $f(x + T) = f(x),\ \forall\ x \in D$.

Pentru $f : A \to B$ și $g : B \to C$, se definește funcția $g \circ f : A \to C$ (g compus cu f) prin $(g \circ f)(a) = g(f(a)),\ \forall\ a \in A$.

Spunem că termenii șirului (a_n) sunt în progresie aritmetică (și notăm $\div(a_n)$) dacă $\exists\ r \in \mathbb{R}$ (numit rație) astfel încât $a_{n+1} - a_n = r,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Avem $a_n = a_1 + (n-1)r$ pentru $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ \forall\ n \geq 2,\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Spunem că termenii șirului (b_n) sunt în progresie geometrică (și notăm $\div\div(b_n)$) dacă $\exists\ q \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $b_{n+1} = b_n q,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Avem $b_n = b_1 q^{n-1},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1},\ \forall\ n \geq 2$ și $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \begin{cases} \frac{b_1 - b_{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$.

Funcția de gradul I $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, este strict crescătoare dacă $a > 0$, respectiv strict descrescătoare dacă $a < 0$ și are, ca reprezentare grafică, o dreaptă.

Ecuația de gradul al II-lea $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, admite două rădăcini reale distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, rădăcină dublă $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dacă $\Delta = 0$, respectiv nu admite rădăcini reale dacă $\Delta < 0$.

Avem $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ și $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (relațiile lui Viète).

Funcția de gradul al II-lea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, are forma canonică $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ dacă $a > 0$, respectiv strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ dacă $a < 0$, are în $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ (vârf) punct de extrem (minim dacă $a > 0$, respectiv maxim dacă $a < 0$), $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$ dacă $a > 0$, respectiv $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ dacă $a < 0$, și are, ca reprezentare grafică, o parabolă.

Aplicații

1. Să se determine valorile reale nenule ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-(m+1)x+1$ este tangent axei Ox.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(x-2)(x+1)\leq 3(x+1)$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=3$.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, știind că valoarea maximă a funcției $f(x)=-x^2+2x-m+3$ este egală cu 10.

5. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice cu rație 4, știind că suma primilor doi termeni este 10.

6. Să se determine valorile reale ale numărului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-mx+m+2=0$ verifică egalitatea $2x_1x_2=x_1+x_2$.

7. Într-o progresie geometrică, al doilea termen este 3 și raportul dintre primul și al patrulea termen este $\frac{1}{8}$. Să se determine primul termen al progresiei.

8. Să se determine valorile reale ale lui m, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-mx-m-6=0$ verifică relația $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.

9. Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ cu axele de coordonate.

10. Să se demonstreze că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, ecuația $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluții reale distincte.

11. Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.

12. Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4<3x+2<4$.

13. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$.

14. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m$ să fie egal cu 1.

15. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-2mx+m^2-1=0$ verifică relația $x_1x_2-2(x_1+x_2)+2\geq 0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

16. Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice, știind că primul termen al progresiei este 7 și al doilea termen este 9.

17. Să se determine rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=3$ și $b_2-b_1=3$.

18. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică relațiile

$$\begin{cases} x_1+x_2=11 \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{11}{30} \end{cases}.$$

19. Să se determine punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-1$ și $g(x)=x+4$.

20. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(6)$.

21. Să se arate că, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$, parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox.

22. Se consideră funcţiile $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$, $g(x)=2x+2$, $h(x)=3x+3$. Să se determine numărul real a astfel încât $a(f(x)+h(x))=g(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$. Să se arate că numerele $f(1)$, $f(0)$ şi $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

24. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x=y \end{cases}$, unde $x, y\in\mathbb{R}$.

25. Să se compare numerele $a=\sqrt{2}$ şi $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

26. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases}$, unde $x, y\in\mathbb{R}$.

27. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2-x+m=0$ să admită soluţii de semne contrare.

28. Să se determine valoarea minimă a funcţiei $f:[-2, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

29. Să se calculeze suma $1+2+2^2+\ldots+2^6$.

30. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x^2-1)(x+1)\geq 0$.

31. Să se determine punctele de intersecţie a parabolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

32. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f(2\cdot f(-1))$.

33. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ şi $g(x)=x-2009$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0$.

34. Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

35. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$.

Rezolvări

1. G_f este tangent la Ox $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1$.

2. $(x-2)(x+1)\leq 3(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-5)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1, 5]$.

3. Se impune condiţia $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2, \infty)$. Avem $\sqrt{x+2}=3 \Leftrightarrow x+2=3^2=9 \Leftrightarrow x=7\in[-2, \infty)$.

4. $a=-1,\ b=2,\ c=-m+3,\ \Delta=4(-m+4),\ y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-m+4.\ \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_V=-m+4=10\Leftrightarrow m=-6.$

5. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia aritmetică. Avem $a_2=a_1+r=a_1+4$ și $S_2=a_1+a_2=2a_1+4=10\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=3.$

6. Avem $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=m,\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=m+2$, deci $2x_1x_2=x_1+x_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(m+2)=m\Leftrightarrow m=-4.$

7. Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia geometrică. Avem $b_n=b_1q^{n-1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, unde $q\in\mathbb{R}^*$ este rația progresiei geometrice. Atunci $\frac{b_1}{b_4}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{b_1}{b_1q^3}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow q^3=8\Leftrightarrow q=2$. Avem $b_2=b_1q\Rightarrow$

$\Rightarrow b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{3}{2}.$

8. Avem $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=m$ și $P=x_1x_2=\frac{c}{a}=-m-6$. deci $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4m-m-6=0\Leftrightarrow m=2.$

9. $f(0)=0^2-1=-1\Rightarrow G_f\cap Oy=\{V(0,-1)\}$ și $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm1\Rightarrow$

$\Rightarrow G_f\cap Ox=\{A(-1,0),\ B(1,0)\}.$

10. Avem $\Delta=m^2-4(-m^2-1)=5m^2+4>0,\ \forall\, m\in\mathbb{R}$, deci ecuația admite două soluții reale distincte.

11. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia geometrică. Avem $x_n=x_1q^{n-1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, unde $q\in\mathbb{R}^*$ este rația.

$\begin{cases}x_1+x_2=8\\ x_2-x_1=4\end{cases}\Rightarrow x_2=6$ și $x_1=2$, deci $q=\frac{x_2}{x_1}=3$. Atunci $S_3=x_1+x_2+x_3=$

$=x_1(1+q+q^2)=26.$

12. $-4<3x+2<4\ \big|-2\Leftrightarrow -6<3x<2\ \big|:3\Leftrightarrow -2<x<\frac{2}{3}\Leftrightarrow x\in\left(-2,\frac{2}{3}\right).$

13. Se impun condițiile $3x+4\geq0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{4}{3},\infty\right)$ și $x\geq0\Leftrightarrow x\in[0,\infty)$, deci

$x\in\left[-\frac{4}{3},\infty\right)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$. Atunci $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}\Leftrightarrow 3x+4=4x\Leftrightarrow x=4\in[0,\infty).$

14. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=y_V=-\frac{\Delta}{4\cdot1}=\frac{m^2-4m}{4}=1\Rightarrow m^2-4m+4=0\Rightarrow m=2.$

15. Avem $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2m,\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=m^2-1$, deci $x_1x_2-2(x_1+x_2)+2=$

$=m^2-1-2m+2=(m-1)^2\geq0$ pentru $\forall\, m\in\mathbb{R}.$

16. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia aritmetică, $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, unde $r \in \mathbb{R}$ este rația progresiei. Avem $a_1 = 7$, $a_2 = 9 \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 2$. Deci $a_n = 7 + (n-1)\cdot 2 = 2n+5$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. în particular $a_5 = 15$.

17. Avem $b_2 = b_1 + 3 = 6 \Rightarrow q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{6}{3} = 2$.

18. Avem $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} \Rightarrow \dfrac{11}{x_1x_2} = \dfrac{11}{30} \Rightarrow x_1x_2 = 30$. Deci $S = x_1 + x_2 = 11$ și $P = x_1x_2 = 30 \Rightarrow x_1$ și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - Sx + P = x^2 - 11x + 30 = 0$.

19. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 5$. Avem $g(-1) = 3$ și $g(5) = 9$, deci punctele de intersecție au coordonatele $(-1, g(-1)) = (-1, 3)$ și $(5, g(5)) = (5, 9)$.

20. Avem factorul $f(2) = 0$, deci întreg produsul este nul.

21. Avem $a = 1 > 0$ și $\Delta = (-m)^2 - 4(m^2+1) = -3m^2 - 4 < 0 \Rightarrow f(x) > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

22. Avem $f(x) + h(x) = 4x + 4 = 2(2x+2) = 2g(x)$, deci $a(f(x) + h(x)) = g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2ag(x) = g(x) \Leftrightarrow (2a-1)g(x) = 0$ pentru $\forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2a - 1 = 0$, adică $a = \dfrac{1}{2}$.

23. Avem $f(1) = 1$, $f(0) = 3$, $f(-3) = 9$ și $3^2 = 1\cdot 9$, deci $f(1)$, $f(0)$ și $f(-3)$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice de rație 3.

24. Avem $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$. Înlocuind în ecuația a doua, obținem $x^2 + x = 3 - x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -3$ și $x_2 = 1$, corespunzător $y_1 = 3 - x_1 = 6$ și $y_2 = 3 - x_2 = 2$, deci $(x, y) \in \{(-3, 6), (1, 2)\}$.

25. Avem $b = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Cum $\sqrt{3} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{2} \Rightarrow b < a$.

26. Avem $S = x + y = -6$ și $P = xy = 8$, deci x și y sunt soluțiile ecuației $t^2 - St + P = t^2 + 6t + 8 = 0$, adică $t_1 = -4$ și $t_2 = -2$, deci $(x, y) \in \{(-4, -2), (-2, -4)\}$.

27. $\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluții ale ecuației $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$. Rădăcinile x_1 și x_2 sunt de semne contrare dacă și numai dacă $P = x_1x_2 = m < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0)$.

În concluzie, $m \in (-\infty, 0) \cap \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right] = (-\infty, 0)$.

28. Observăm că funcția f este descrescătoare, deci $\min\limits_{x\in[-2,1]} f(x) = f(1) = -1 + 1 = 0$.

29. Avem $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^6 = \dfrac{2^7 - 1}{2 - 1} = 127$.

TESTUL 15

Subiectul I (30 puncte)

1. Să se determine numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $125^x = \frac{1}{5}$.

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + m + 6$. Să se determine valorile reale ale lui m, ştiind că $f(x) \geq 0$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

4. Să se determine numărul real x, ştiind că $2^x - 1$, 4^x şi $2^{x+1} + 3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, ştiind că A, B şi C sunt vârfurile unui triunghi.

6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB = 5$, $AC = 4$ şi $m(\hat{A}) = 60°$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $AB = BA$.

b) Să se calculeze $A^2 + B^2$, unde $A^2 = A \cdot A$ şi $B^2 = B \cdot B$.

c) Să se arate că $C^4 = 5^4 \cdot I_2$, unde $C = A + B$ şi $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienţi raţionali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ şi $g = X^3 + X - 2$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$, să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{-x} - 1$ şi $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine $f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcţiei f_0.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xe^{-x}f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)dx$.

Rezolvări

I. 1. Avem $C_4^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$ astfel de submulțimi.

2. $125^x=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 5^{3x}=5^{-1}\Leftrightarrow 3x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

3. Avem $a=1$, $b=5$, $c=m+6$, $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot 1\cdot(m+6)=1-4m$. Știind că $f(x)\geq 0$ pentru $\forall\ x\in\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\Delta\leq 0$, obținem că $1-4m\leq 0\Leftrightarrow m\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

4. $\div\ 2^x-1,\ 4^x,\ 2^{x+1}+3\Leftrightarrow\left(2^x-1\right)+\left(2^{x+1}+3\right)=2\cdot 4^x\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-2=0$. Cu notația $2^x=y, y>0$, ecuația devine $2y^2-3y-2=0$, cu soluțiile $y_1=-\frac{1}{2}\notin(0,\infty)$, respectiv $y_2=2\in(0,\infty)\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$.

5. Conform regulii poligonului pentru adunarea vectorilor, avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

6. Aplicând teorema lui Pitagora generalizată, obținem: $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\hat{A}=$ $=5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cdot\cos 60^\circ=21\Rightarrow BC=\sqrt{21}$, deci perimetrul triunghiului ABC este $AB+BC+AC=$ $=5+\sqrt{21}+4=9+\sqrt{21}$.

II. 1. a) Avem $AB=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ și $BA=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, deci $AB=BA=O_2$.

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\10&20\end{pmatrix}$, $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&-10\\-10&5\end{pmatrix}$, deci $A^2+B^2=\begin{pmatrix}5&10\\10&20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20&-10\\-10&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}$.

c) $C=A+B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=5I_2\Rightarrow C^4=\left(5I_2\right)^4=5^4\cdot I_2^4=5^4I_2$.

2. a) Împărțind pe f la g, obținem $f=g\cdot(X+a)+(b-1)X^2-(a+3)X+2a+6$.

$g\mid f\Leftrightarrow r=(b-1)X^2-(a+3)X+2a+6=0\Leftrightarrow a=-3$ și $b=1$. În acest caz avem $f=g\cdot(X-3)$.

b) Observăm că $g=X^3-1+X-1=(X-1)\left(X^2+X+2\right)$, iar X^2+X+2 are $\Delta=-7<0$, deci este ireductibil în $\mathbb{R}[X]$, cu atât mai mult în $\mathbb{Q}[X]$. În concluzie, $f=g(X-3)=$ $=(X-1)(X-3)\left(X^2+X+2\right)$.

c) Fie $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția polinomială atașată lui f. Avem: $\tilde{f}(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x^2+x+2)$. Atunci $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0 \mid \cdot 3^x \Leftrightarrow 3^{4x} - 3^{3x+1} + 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \tilde{f}(3^x) = 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x - 3)(3^{2x} + 3^x + 2) = 0 \Rightarrow 3^x - 1 = 0$, cu soluția $x_1 = 0$, respectiv $3^x - 3 = 0$, cu soluția $x_2 = 1$.

III. 1. a) Avem $f_1(x) = f_0'(x) = (e^{-x} - 1)' = -e^{-x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(e^{-x} - 1) = -1 \Rightarrow$ ecuația asimptotei (orizontale) către $+\infty$ a graficului funcției f_0 este $y = -1$.

c) Avem $f_2(x) = f_1'(x) = (-e^{-x})' = e^{-x}$ pentru $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_2(x) + x - 1}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{-x} + x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{(-e^{-x} + 1)'}{x'} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} e^{-x} = \frac{1}{2}.$$

2. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$

b) $\displaystyle S = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$

c) Avem $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1} \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^1 (x^2+1)\, e^x dx = \int_{-1}^1 (x^2+1)\,(e^x)' dx = (x^2+1)e^x\Big|_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 xe^x dx = 2(e - e^{-1}) - 2\Big[(x-1)\, e^x\Big]_{-1}^1 = 2(e + e^{-1}).$

TESTUL 16

Subiectul I (30 puncte)

1. Să se calculeze $C_8^3 - C_8^5$.

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+5) = 3$.

3. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică relațiile $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 x_2 = -2$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Să se calculeze $f(f(0)) - f(2)$.

5. Să se determine coordonatele punctului C, simetricul punctului $A(5, 4)$ față de punctul $B(-2, 1)$.

6. Triunghiul ABC are $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A.

TESTUL 60

Subiectul I (30 puncte)

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+x}=9$.

2. Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg(2x-3)$.

3. Să se determine valorile reale ale numărului m știind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+3m$ este egală cu 2.

4. Să se calculeze $C_{2009}^2-C_{2008}^2-C_{2008}^1$.

5. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC știind că $AB=10$, $BC=15$ și $m(\hat{B})=60°$.

6. Să se determine coordonatele punctului M care aparține dreptei AB și este egal depărtat de punctele $A(1,-1)$ și $B(5,-3)$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\{X\in M_2(\mathbb{R})\,|\,XA=AX\}$.

a) Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2$.

b) Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-2I_2$ și $A^2=A\cdot A$.

c) Să se arate că, dacă $X\in C(A)$, atunci există $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $G=(-1,1)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

a) Să se rezolve în G ecuația $x*x=\dfrac{4}{5}$.

b) Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, pentru oricare $x, y\in G$.

c) Să se arate că pentru oricare $x, y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

Subiectul III (30 puncte)

1. a) Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze derivata funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^3-15x^2+24x-1$.

c) Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+n}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x)\,dx$.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n, axa Ox și dreptele $x = 1$, $x = 2$.

c) Știind că F este o primitivă a funcției f_1, să se arate că funcția $G : [1, 2] \to \mathbb{R}$, definită prin $G(x) = F(x) - \frac{5}{6}x$ este crescătoare.

Rezolvări

I. 1. $3^{x^2+x} = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -2$ și $x_2 = 1$.

2. Se impune condiția $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = D$.

3. Avem $a = 1$, $b = -2m$, $c = 3m$, $\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 12m$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -m^2 + 3m$, $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = y_V \Leftrightarrow -m^2 + 3m = 2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m_1 = 1$ și $m_2 = 2$.

4. Conform formulei de recurență a combinărilor, avem $C_{2009}^2 = C_{2008}^2 + C_{2008}^1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow C_{2009}^2 - C_{2008}^2 - C_{2008}^1 = 0$.

5. Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\hat{B} = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60° = 175 \Rightarrow AC = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$.

6. Punctul $M(x_M, y_M)$ este mijlocul segmentului AB, deci $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -2$, adică punctul M are coordonatele $(x_M, y_M) = (3, -2)$.

II. 1. a) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow 3b = 1$, adică $b = \frac{1}{3}$, și $a = 1$.

b) Avem $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$, deci $A^3 = A^2 \cdot A = 3I_2 \cdot A = 3A$.

Atunci $A \cdot B = A \cdot (A^2 - 2I_2) = A^3 - 2A = 3A - 2A = A$.

c) Fie $X \in C(A)$, $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Avem $XA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3a \\ d & 3b \end{pmatrix}$ și $AX = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 3d \\ a & c \end{pmatrix}$, deci $XA = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & 3a \\ d & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 3d \\ a & c \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = 3b$ și

$d = a \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

2. a) $x * x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = \frac{1}{2} \in G$ și $x_2 = 2 \notin G$, deci $x = \frac{1}{2}$.

b) Avem $(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1) = xy+x+y+1-(xy-x-y+1) = 2(x+y)$ și $(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1) = xy+x+y+1+xy-x-y+1 = 2(1+xy)$, deci:

$$\frac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)} = \frac{2(x+y)}{2(1+xy)} = \frac{x+y}{1+xy} = x * y, \text{ pentru } \forall\ x, y \in G.$$

c) Pentru $x, y \in (-1, 1)$, avem $|x| < 1$ și $|y| < 1 \Rightarrow |x| \cdot |y| = |xy| < 1 \Rightarrow -1 < xy < 1 \Rightarrow 1 + xy > 0$.

Din $-1 < x < 1$ și $-1 < y < 1$ obținem și $0 < 1+x,\ 0 < 1+y \Rightarrow 0 < (1+x)(1+y) \Rightarrow$ $\Rightarrow -(1+xy) < x+y \Rightarrow -1 < \frac{x+y}{1+xy}$, precum și $x-1<0,\ y-1<0 \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x+y < 1+xy \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} < 1$. În concluzie, $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$, adică $x * y \in (-1, 1) = G$.

III. 1. a) Avem $f_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(-x+1) = 0$, $f(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$, deci $f_s(1) \neq f(1)$, adică funcția f nu este continuă în punctul $x_0 = 1$.

b) $g'(x) = (2x^3 - 15x^2 + 24x - 1)' = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4) = 6(x-1)(x-4)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim\limits_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a) = 4a\sqrt{a}$,

deci $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 32 \Leftrightarrow 4a\sqrt{a} = 32 \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 8 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$.

2. a) Avem $f_0(x) = \frac{1}{x}$, $\forall\ x \in [1, 2]$, deci $\int_1^2 f_0(x)\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$.

b) $\int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+n}\right)dx = \left[\ln x + \ln(x+1) + \ln(x+2) + \ldots + \ln(x+n)\right]_1^2 =$

$= -\ln 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \ldots - \ln(n+1) + \ln(n+2) = \ln(n+2)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

c) Pentru $x \in [1, 2] \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ și $x+1 \in [2, 3] \Rightarrow \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{3}$, deci $f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, $\forall\ x \in [1, 2]$. Cum $G'(x) = F'(x) - \frac{5}{6} = f_1(x) - \frac{5}{6} \geq 0$, $\forall\ x \in [1, 2] \Rightarrow$ funcția G este crescătoare.