Ion Bucur Popescu

MATEMATICĂ

M1 Subiecte rezolvate BAC 2017

- Filiera teoretică: profilul real, specializarea • matematică-informatică
- Filiera vocațională: profilul militar, specializarea • matematică-informatică

Editura CARMINIS

SUBIECTUL I

Varianta 1

1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+\cdots+x=231$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\le 0$.

3. Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.

4. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\cdots 10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul 1.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.

6. Să se calculeze $\cos\dfrac{23\pi}{12}\cdot\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Rezolvări

1. Termenii sumei aparțin unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu primul termen $a_1=1$ și rația $r=a_2-a_1=5-1=4$. Avem $a_n=a_1+(n-1)\cdot r=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, de unde deducem că $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\dfrac{(1+4n-3)\cdot n}{2}=(2n-1)\cdot n=2n^2-n$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $S_n=2n^2-n=231$, obținem ecuația de gradul al II-lea $2n^2-n-231=0$, cu $a=2$, $b=-1$, $c=-231$, $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-231)=1849=43^2$, deci $n_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1\pm 43}{4}$, $n_1=\dfrac{1-43}{4}=-\dfrac{21}{2}\notin\mathbb{N}$, $n_2=\dfrac{1+43}{4}=11\in\mathbb{N}$, deci $n=11\Rightarrow$ $x\quad a_n\quad a_{11}=4\cdot 11-3=41$, adică $x=41$.

2. Avem o inecuație de gradul al II-lea cu $a=2$, $b=-5$, $c=3$, $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=1$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5\pm 1}{4}$, $x_1=\dfrac{5-1}{4}=1$, $x_2=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Din relațiile $a=2>0$, $x_1=1$ și $x_2=\dfrac{3}{2}$, deducem că $2x^2-5x+3\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$.

3. Pentru $x\in(0,\infty)$ și $y\in(1,\infty)$, avem $x^2+1=y \Leftrightarrow x^2=y-1 \Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$, deci $f^{-1}(y)=x=\sqrt{y-1}$ sau, notând variabila tot cu x, avem $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$, $f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty)$.

4. Fie $A'=A-\{1\}$ submulțimea elementelor diferite de elementul 1. Evident $|A|=10$ și $|A'|=9$. Mulțimea A admite C_{10}^3 submulțimi de trei elemente, dintre care C_9^3 sunt și submulțimile lui $A'\subset A$, submulțimi care nu conțin elementul 1, deci rămân $C_{10}^3-C_9^3=C_9^2=\dfrac{8\cdot 9}{2}=36$ de submulțimi cu trei elemente care conțin elementul 1.

5. Avem $AB=\sqrt{(2-m)^2+[m-(-2)]^2}=\sqrt{(2-m)^2+(m+2)^2}=\sqrt{2m^2+8}$, deci $AB=4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{2m^2+8}=4 \Leftrightarrow 2m^2+8=4^2=16 \Leftrightarrow 2m^2=16-8=8 \Leftrightarrow m^2=\frac{8}{2}=4 \Leftrightarrow m_{1,2}=\pm 2$, deci $m \in \{-2, 2\} \subset \mathbb{R}$.

6. $\cos\frac{23\pi}{12}=\cos\frac{(24-1)\pi}{12}=\cos\left(\frac{24\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, unde am folosit periodicitatea şi paritatea funcţiei cosinus.

Atunci $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Varianta 2

1. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

3. Să se determine inversa funcţiei bijective $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=e^x+1$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.

5. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1)$, $B(2,0)$, $C(0,6)$.

6. Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

Rezolvări

1. Avem $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i \Rightarrow (1-i)^{24}=\left[(1-i)^2\right]^{12}=(-2i)^{12}=2^{12}\cdot\left(i^4\right)^3=2^{12}\in\mathbb{R}$.

2. Se impun condiţiile $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ şi $2x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2}$, deci $x\in\mathbb{R}-\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

$\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3 \;\Big|\; \cdot(x+1)(2x-1) \Rightarrow (3x-1)(2x-1)+(x+1)^2=3(x+1)(2x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2-5x+1+x^2+2x+1=3\left(2x^2+x-1\right) \Rightarrow 7x^2-3x+2=6x^2+3x-3 \Rightarrow x^2-6x+5=0$.

Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea cu $a=1$, $b=-6$, $c=5$, $\Delta=b^2-4ac=$ $=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=16>0$, deci ecuaţia admite rădăcinile reale distincte $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=$ $=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2}=\frac{2(3\pm2)}{2}=3\pm2$, deci $x_1=3-2=1$ şi $x_2=3+2=5$.

În plus, observăm că $S = \{1,5\} \subset \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

3. Avem $e^x + 1 = y \Leftrightarrow e^x = y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(y-1)$, deci $f^{-1}(y) = x = \ln(y-1)$ sau, folosind tot variabila x, avem $f^{-1}(x) = \ln(x-1)$, unde $f^{-1} : (1,\infty) \to \mathbb{R}$.

4. Fie $A = \{10, 11, 12, \cdots, 99\}$ mulțimea numerelor de două cifre. Observăm că $|A| = 99 - 9 = 90$. Fie $A' = \{11, 22, \cdots, 99\}$ mulțimea numerelor formate din două cifre egale. Observăm că $|A'| = 9$ și că $A' \subset A$, ceea ce ne permite să scriem că $|A - A'| = |A| - |A'| = 90 - 9 = 81$. În final, observăm că $B = \left\{\overline{ab} \mid \overline{ab} \in A, a \neq b\right\} = A - A'$, deci $|B| = |A - A'| = 81$, de unde deducem că probabilitatea căutată este $p = \frac{|B|}{|A|} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10} = 0,9$.

5. Fie M mijlocul segmentului BC. Avem $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$ și $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$, deci M are coordonatele $(x_M, y_M) = (1,3)$. Lungimea medianei din A a triunghiului ABC este lungimea segmentului determinat de punctele $A(-2,-1)$ și $M(1,3)$, deci $AM = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

6. Avem $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(m\vec{i} + 3\vec{j}\right) \cdot \left[(m-2)\vec{i} - \vec{j}\right] = 0 \Leftrightarrow m(m-2) + 3 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m^2 - 3m - 2 = 0$. Am obținut astfel o ecuație de gradul al II-lea în necunoscuta m, cu $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, deci $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$, adică ecuația admite rădăcinile reale distincte $m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \frac{2(1 \pm 2)}{2} = 1 \pm 2$, de unde $m_1 = 1 - 2 = -1 \notin (0, \infty)$ și $m_2 = 1 + 2 = 3 > 0$. În concluzie, $m = 3$ este valoarea căutată.

Varianta 3

1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$.

2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 2x - 3y + 1 = 0$.

6. Știind că $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

SUBIECTUL II

Varianta 1

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $b \neq 0$.

a) Să se arate că, dacă matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există u, $\mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$, $= \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

c) Să se rezolve în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

a) Să se verifice că, pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

b) Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Să se demonstreze că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

zolvări

a) Fie $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} u & v \\ z & t \end{pmatrix}$, astfel încât $AX = XA$. Avem $AX = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ z & t \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} au+bz & av+bt \\ bu+az & bv+at \end{pmatrix}$ şi $XA = \begin{pmatrix} u & v \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bv & bu+av \\ az+bt & bz+at \end{pmatrix}$, deci $AX = XA \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} au+bz & av+bt \\ bu+az & bv+at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bv & av+bt \\ az+bt & bz+at \end{pmatrix} \Leftrightarrow au+bz = au+bv$, $av+bt = bu+av$,
$-az = az+bt$ şi $bv+at = bz+at \Leftrightarrow bz = bv$ şi $bt = bu \Leftrightarrow z = v$ şi $t = u$, deoarece $b \neq 0$.
$\text{ci}\ X = \begin{pmatrix} u & v \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Demonstrăm prin metoda inducției matematice proprietatea $P(n): A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$,
$n \in \mathbb{N}^*$, unde $x_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$ şi $y_n = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

Pentru $n=1$ obținem $P(1): A^1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$, evident adevărată, deoarece

$x_1 = \dfrac{(a+b)^1 + (a-b)^1}{2} = a$ şi $y_1 = \dfrac{(a+b)^1 - (a-b)^1}{2} = b$. Presupunem adevărată proprietatea $P(k)$ pentru un $k \in \mathbb{N}^*$ oarecare şi demonstrăm că şi proprietatea $P(k+1)$ este adevărată.

Avem $A^k = \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix}$, unde $x_k = \dfrac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2}$ şi $y_k = \dfrac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2}$.

Atunci $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_k + by_k & bx_k + ay_k \\ ay_k + bx_k & by_k + ax_k \end{pmatrix}$. Observăm că

$ax_k + by_k = a \cdot \dfrac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2} + b \cdot \dfrac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2} = \dfrac{(a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1}}{2} = x_{k+1}$, şi

$ay_k + bx_k = a \cdot \dfrac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2} + b \cdot \dfrac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2} = \dfrac{(a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}}{2} = y_{k+1}$, deci

$A^{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ y_{k+1} & x_{k+1} \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1)$ este adevărată. Deci proprietatea $P(n): A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$,

unde $x_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$ şi $y_n = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$, este adevărată pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Deoarece $X^4 = X \cdot X^3 = X^3 \cdot X \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât

$X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$. Atunci $X^3 = \begin{pmatrix} u_3 & v_3 \\ v_3 & u_3 \end{pmatrix}$, unde $u_3 = \dfrac{(u+v)^3 + (u-v)^3}{2}$ şi

$v_3 = \dfrac{(u+v)^3 - (u-v)^3}{2}$. Din $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{(u+v)^3 + (u-v)^3}{2} = 2$ şi

$\dfrac{(u+v)^3 - (u-v)^3}{2} = 1$. Adunând, respectiv scăzând aceste relații, obținem $(u+v)^3 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u + v = \sqrt[3]{3}$ şi $(u-v)^3 = 1 \Leftrightarrow u - v = 1$, de unde deducem că $u = \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$ şi $v = \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$, deci

$X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{3}+1 & \sqrt[3]{3}-1 \\ \sqrt[3]{3}-1 & \sqrt[3]{3}+1 \end{pmatrix}$.

2. a) În $\mathbb{Z}_7$ avem $\hat{1}^6 = \hat{1}$, $\hat{2}^3 = \hat{1} \Rightarrow \hat{2}^6 = \left(\hat{2}^3\right)^2 = \hat{1}^2 = \hat{1}$, $\hat{3}^2 = \hat{2} \Rightarrow \hat{3}^6 = \left(\hat{3}^2\right)^3 = \hat{2}^3 = \hat{1}$,

$\hat{4}^2 = \hat{2} \Rightarrow \hat{4}^6 = \left(\hat{4}^2\right)^3 = \hat{2}^3 = \hat{1}$, $\hat{5}^2 = \hat{4} \Rightarrow \hat{5}^6 = \left(\hat{5}^2\right)^3 = \hat{4}^3 = \hat{4}^2 \cdot \hat{4} = \hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{1}$ şi $\hat{6}^2 = \hat{1} \Rightarrow \hat{6}^6 = \hat{1}$,

deci $b^6 = \hat{1}$ pentru $\forall\, b \in \mathbb{Z}_7^*$.

b) Avem $\left(x^3 - \hat{4}\right)\left(x^3 + \hat{4}\right) = x^6 - \hat{4}^2 = x^6 - \hat{2} = x^6 + \hat{5}$, pentru $\forall\, x \in \mathbb{Z}_7$.

SUBIECTUL III

Varianta 1

1. Se consideră numărul real $a > 0$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ax$.

a) Să se determine asimptota oblică la graficul funcţiei f către $-\infty$.

b) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

c) Să se determine $a \in (0,\infty)$, ştiind că $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se arate că funcţia $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, **este** o primitivă a funcţiei f.

b) Să se arate că orice primitivă G a funcţiei f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi

ptele de ecuaţii $x = \frac{1}{e}$ şi $x = e$.

zolvări

a) Avem $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - ax}{x} = -a$ şi

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x - ax + ax\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, deci $y = mx + n = -ax$ este ecuaţia

mptotei oblice la graficul funcţiei f către $-\infty$.

Avem $f'(x) = \left(e^x - ax\right)' = e^x - a$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. Observăm că $f'(x) < 0$ pentru $\forall x < \ln a$,

i funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, \ln a)$, respectiv $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \ln a$,

cum şi faptul că $f'(x) > 0$ pentru $\forall x > \ln a$, adică funcţia f este strict crescătoare pe inter-

l $(\ln a, \infty)$.

Observăm că $f(0) = e^0 - a\cdot 0 = 1$, deci $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde

ucem că $x_0 = 0$ este punct de minim global pentru funcţia f şi atunci, conform teoremei lui

mat, avem $f'(0) = 0$, deci $e^0 - a = 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

) Observăm că funcţia F este derivabilă pe domeniul $(0,\infty)$ şi

$x) = \left[2\sqrt{x}(\ln x - 2)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) + 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = f(x)$ pentru $\forall x \in (0,\infty)$, adică

ţia F este o primitivă a funcţiei f.

e $G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă oarecare a funcţiei f. Atunci $G'(x) = f(x)$ pentru $\forall x \in (0,\infty)$

particular, $G'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0$ pentru $\forall x \geq 1$, adică primitiva G este crescătoare pe

valul $[1,\infty)$.

c) Observăm că $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}<0$ pentru $\forall x\in(0,1)$ și $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\geq 0$ pentru $\forall x\in[1,\infty)$.

Aria cerută este dată de formula $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|f(x)|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{e}|f(x)|dx=$

$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=-F(x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+F(x)\Big|_{1}^{e}=-\left(F(1)-F\left(\frac{1}{e}\right)\right)+F(e)-F(1)=$$

$$=F\left(\frac{1}{e}\right)-2F(1)+F(e)=2\sqrt{\frac{1}{e}}\left(\ln\frac{1}{e}-2\right)-4\sqrt{1}(\ln 1-2)+2\sqrt{e}(\ln e-2)=-\frac{6}{\sqrt{e}}+8-2\sqrt{e}=$$

$$=\frac{-2e+8\sqrt{e}-6}{\sqrt{e}}.$$

Varianta 2

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1\in(0,1)$ și $a_{n+1}=a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $a_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

c) Să se arate că șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

a) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0$, $x=1$, Ox și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvări

1. a) Observăm că din $a_1\in(0,1)$ obținem $\sqrt{a_1}\in(0,1)\Rightarrow 1-\sqrt{a_1}\in(0,1)$, deci $a_1\left(1-\sqrt{a_1}\right)\in(0,1)\Rightarrow a_2\in(0,1)$.

Demonstrăm prin metoda inducției matematice proprietatea $P(n): a_n\in(0,1)$ pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $n=1$ sau $n=2$ obținem $P(1): a_1\in(0,1)$, respectiv $P(2): a_2\in(0,1)$, care sunt evident adevărate conform ipotezei și celor demonstrate anterior.

upunem adevărată proprietatea $P(k): a_k \in (0,1)$ pentru un $k \in \mathbb{N}^*$ oarecare şi demonstrăm
ste îndeplinită proprietatea $P(k+1): a_{k+1} \in (0,1)$.
m $a_k \in (0,1) \Rightarrow \sqrt{a_k} \in (0,1) \Rightarrow 1-\sqrt{a_k} \in (0,1) \Rightarrow a_k\left(1-\sqrt{a_k}\right) \in (0,1) \Rightarrow a_{k+1} \in (0,1) \Rightarrow$
$P(k+1)$. Deci proprietatea $P(n): a_n \in (0,1)$ este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
vem $a_{n+1} = a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right) < a_n \cdot 1 = a_n$, deci $a_{n+1} < a_n$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
strict descrescător.
$_{-1} = a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right) \Leftrightarrow a_n\sqrt{a_n} = a_n - a_{n+1}$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n \in (0,1) \Rightarrow \sqrt{a_n} < 1 \Rightarrow$
$< \sqrt{a_n} \Rightarrow a_n^2 < a_n\sqrt{a_n}$, deducem că $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
ci $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1} < a_1$ pentru
$\in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit superior de a_1.

Observăm că funcţia F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]' =$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4x^2+4x+4} = \frac{1}{x^2+x+1} = f(x)$$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcţia F

o primitivă a funcţiei f.
a este dată de formula $\int_0^1 |g(x)|dx = \int_0^1 \left|\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right| dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1 =$

$(1^2+1+1) - \ln\left(0^2+0+1\right) = \ln 3$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[F(x)\Big|_{-n}^{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2n+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2n+1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Varianta 3

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 18x^2 - \ln x$.

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) \geq a$, $\forall x \in (0,\infty)$.

c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, unde m este un para-
real.