Prefață

Sub cerul blând al nopților de studiu, când lumina lămpii se răsfrânge peste foi și creioane, profesorul F. Stănescu a adunat aceste probleme ca pe niște stele căzătoare — fiecare purtând în sine o scânteie de gând și o chemare la cercetare. Nu este o simplă colecție; este un drum presărat cu încercări, o călătorie în care rațiunea se împletește cu mirarea și cu bucuria descoperirii. Fiecare problemă are o istorie intrinsecă și cei ce îndrăznesc să o rezolve descoperă multe alte conexiuni și poate să compună la rândul lor alte probleme similare. Personal, ca rezolvitor la Gazeta Matematică în anii de liceu, Monthly, Mathematics Magazin (editor asociat), The College Mathematics Journal am avut ocazia să-mi petrec mult timp cu problemele propuse de profesorul Stănescu. Un cuvânt de precauție de la început: “the problems are not a walk in the park!" Dar, ideile necesare sunt la dispoziția elevilor care au experiență cu probleme de olimpiadă în analiza matematică.

Autorul nu scrie pentru laude, ci pentru acea tăcută împlinire pe care o simte când o idee se limpezește. În paginile ce urmează veți întâlni ecouri ale lecțiilor ținute în săli de curs și în sălile de pregătire, urme ale discuțiilor aprinse și ale clipei când o soluției se arată ca o rază de lumină. Problemele au fost alese cu grijă: unele pentru frumusețea lor, altele pentru puterea de a trezi curiozitatea, multe pentru a forma mâna care șlefuiește gândirea.

Să nu căutați aici doar răspunsuri; căutați felul în care mintea se transformă la întâlnirea cu o problemă demnă. Asemenea unui poet care ascultă tăcerea, matematicianul ascultă intuiția; iar în antrenament se naște măiestria. Dacă uneori veți simți frustrare, amintiți-vă că fiecare obstacol biruit aduce cu sine o nouă claritate și o bucurie mai adâncă.

Această carte este dedicată elevilor care caută adevărul în forme și profesorilor care aprind lumina cunoașterii. Să le fie călăuză în nopțile de studiu și prietenă în zilele de concurs; iar când veți închide ultima pagină, sper ca în voi să rămână nu doar tehnici, ci și o dragoste mai adâncă pentru frumusețea matematicii.

— Profesor Eugen J. Ionașcu, Columbus State University, Columbus, Georgia, 31907, USA

Argument

Această lucrare conține probleme de Analiză Matematică pe dreapta reală, ideea acestei cărți apărându-mi în urma discuțiilor unor probleme cu elevii din cadrul centrului de pregătire pentru olimpiade și concursuri. Lucrarea este structurată în trei capitole, problemele fiind însoțite de soluții aproape integrale, iar acolo unde am considerat că este mai avantajos în perspectiva implicării în rezolvarea problemelor, am prezentat numai câteva scurte indicații.

Problemele prezentate au fost selecționate din următoarele surse: 1) subiecte date la olimpiadele naționale; 2) subiecte date la concursurile naționale și internaționale; 3) probleme apărute în prestigioase reviste de specialitate; 4) probleme clasice din domeniu ; 5) probleme ale autorului. Un instrument util de selecție al problemelor s-a dovedit a fi Internetul.

Fără a face rabat de la claritate lucrarea se adresează elevilor ce se pregătesc pentru olimpiadele de matematică, examenul de bacalaureat sau pentru admiterea la facultate. De asemenea culegerea poate de folos profesorilor în pregătirea lecțiilor de la clasă sau pentru exersarea abilităților matematice ale elevilor din centrele de excelență.

Urez succes tuturor celor ce folosesc această carte ca un instrument de antrenament!

3 februarie 2026

Florin Stănescu

Enunțuri

Capitolul A. Șiruri

A.1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere pozitive cu proprietatea că $x_{n+1} \leq 2\sqrt{x_{n-1} \cdot x_n} - x_n$, oricare ar fi $n \geq 2$. Arătați că x_n este convergent.

A.2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere strict pozitive. Dacă există un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ pozitiv și o constantă $\alpha > 0$ astfel încât $b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \alpha, n \geq 1$ arătați că șirul $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, , n \geq 1$ este convergent.

A.3. Definim șirul $(a_n)_{n\geq 1}$: $a_1 > 1$ și $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{ln\, a_n}, (\forall) n \geq 1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{e^{\sqrt{2n}}}$.

A.4. Fie șirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1}^2 = n(x_n - x_{n+1}), n \geq 1$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} n^{x_n} = e$.

A.5. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \sqrt[2^k]{1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}}$.

A.6. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir definit astfel: $x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, n \geq 1$. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

A.7. Calculați: $\lim\limits_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\binom{n+k}{k}}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

A.8. Arătați că șirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}, n \geq 1$ este convergent.

A.9. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + (n-1)x_n}{x_n + n}, n \geq 1$. Arătați că $(x_n)_{n\geq 1}$ este un șir convergent și calculați limita sa.

A.10. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 3$ și $a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{a_n^4} + 4a_n\right), n \geq 1$. Arătați că șirul este convergent și calculați limita sa.

A.11. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n}$.

A.12. Se consideră un șir $(a_n)_{n\geq 1} \subset (-1,1)$ cu proprietatea că $|a_{n+1} - a_n| \geq 2 - \frac{1}{n}$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0$.

A.13. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere pozitive astfel încât șirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot a_k\right)_{n\geq 1}$ este convergent. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{\ln^2(n)} = 0$.

A.14. Există un șir de numere reale care să aibă următoarele proprietăți:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) = 7$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+7}) = 3$?

A.15. Fie $a_1, a_2, \ldots$ și $b_1, b_2, \ldots$ două șiruri de numere reale astfel încât $b_n = b_{n-1} \cdot a_n - 2, n = 2,3, \ldots$.Presupunem că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$.

A.16. Să se arate că orice șir de numere reale pozitive ce satisface relația $a_{n+1} = \sqrt{6 - 2a_n^2}$, $(\forall) n \geq 1$, este constant.

A.17. Dacă un șir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit și satisface relația $x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{2^n}$, $(\forall) n \geq 1$, arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

A.18. Fie $(x_n)_{n\geq 1}, x_1 > 1$, un șir care satisface relația: $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Arătați că șirul x_n este convergent și calculați limita sa.

A.19. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $a_0 = \frac{5}{3}$ și $a_k = a_{k-1}^2 - 2, k \geq 1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$.

A.20. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 1, a_n = \sqrt{n^2 - a_{n-1}}, n \geq 1$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} (n - a_n)$ există și este finită.

A.21. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir descrescător de numere reale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dacă $S_{2^k} - 2^k a_{2^k} \leq 1, (\forall) k \geq 1$, unde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, n \geq 1$, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = l \leq 1$.

A.22. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir astfel încât $x_0 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$. Arătați că șirul:

$$y_n = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \sqrt{n}, n \geq 0$$

Este convergent și calculați limita sa.

A.23. Arătați că $\lim\limits_{p\searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = \frac{1}{2}$.

A.24. Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \sqrt{\binom{n+i}{2}}}{n^2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{H_n}}{1+n}, a > 0, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

A.25. Fie $a \in (-1,1)$. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-a}}\left(1 + \frac{2}{1+2^a} + \ldots + \frac{n}{1+2^a+\ldots+n^a}\right)$.

A.26. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $(n+1)a_n = (n+3)a_{n-1} + n, n \geq 1, a_0 = 1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n^2}$.

A.27. Fie $\alpha \in (0,1)$. Definim șirul prin relația $x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \alpha x_{n-1}, n \geq 1$. Găsiți limita șirului în funcție de α, x_0, x_1.

A.28. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_1 = \frac{1}{3}$ și $a_{n+1} = \frac{2a_n^2+1}{3}$. Arătați că șirul este convergent și calculați limita sa.

A.29. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{ln(x_n+n)}, n \geq 1, x_1 > 0$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} \cdot x_n$.