Gheorghe Andrei
Nelu Chichirim
Andrei Velicu

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Culegere de probleme

Continuitate. Proprietatea lui Darboux

$\forall \lambda > 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| < \lambda |x - y|$$

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, R.A.
www.edituradp.ro

Cuprins

1 Capitolul I.

1.1 Exerciţii şi probleme de continuitate

1.1.1

1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţiile $f, g, h, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie continue pe $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-a}{x-1}, & x < 1 \\ bx + \frac{7}{4}, & x \geq 1 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{2^x - ax}{x-2}, & x < 2 \\ \ln(bx+4) - x, & x \geq 2 \end{cases}$

   (c) $h(x) = \begin{cases} \frac{2\left(\sqrt{1-x}-a\right)}{x}, & x < 0 \\ b \cdot e^x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$

   (d) $u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2-3x+2}, & x \neq 1 \\ -\frac{3}{4}, & x = 1 \end{cases}$

2. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât functiile de mai jos să fie continue pe $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{m^2x + mx + 1}, & x < 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{m^2x^2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4mx + 4m^2} + m\sqrt{3x-5}, & x > 2 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} m(1-x) - 15x^2, & x \leq 1 \\ 9^{mx} - 4 \cdot 3^{mx+1} + 12, & x > 1 \end{cases}$

   (c) $h(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + |m|), & x \leq 2 \\ \log_4(x^2+m^2)^2, & x > 2 \end{cases}$

3. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie continue pe $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2^{ax} \cdot 3^{bx}, & x < 1 \\ 12, & x = 1 \\ 2^{1+bx} \cdot 3^{ax-1}, & x > 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 3^{ax} \cdot 4^{bx}, & x < 1 \\ 18, & x = 1 \\ 3^{ax}\left(2^{4bx} - 2^{2bx}\right), & x > 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 2^{ax} \cdot 3^{4x} + 6^{ax}, & x < 1 \\ 12, & x = 1 \\ 2^{bx} \cdot 3^{ax} + 6^{bx}, & x > 1 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 2^{ax} + 4^{bx} - 4, & x < 1 \\ ax^3 + bx^2 - (7a+3b)(x-1), & 1 \leq x \leq 2 \\ 2^{bx} + 4^{ax} - 18, & x > 2 \end{cases}$

4. Să se determine parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţiile de mai jos să fie continue pe domeniul de definiţie, unde $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{a-2\sqrt{x-1}}{x-1}, & x < 1 \\ c - 2b, & x = 1 \\ \left(c^2 - 2c - 2\right) x + (bc - 3) \log x - 1, & x > 1 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2+8x-a}-b}{x^3-2x^2+3x-2}, & x < 1 \\ \frac{5}{3}, & x = 1 \\ \frac{\ln x^2+3x+c}{2x^2-x-1}, & x > 1 \end{cases}$

   (c) $h(x) = \begin{cases} \frac{\left|x^3+2x^2-3\right|-2\left|2x^2-3x+1\right|}{\left|x^3-5x+4\right|+3\left|3x^2-4x+1\right|}, & x < 1 \\ c, & x = 1 \\ \frac{\sqrt{2x-\sqrt{ax-b\sqrt{x}}}-1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

5. Să se studieze continuitatea funcţiilor:

   (a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\ln x]$;

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = [x] \sin \pi x$;

   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$;

   (d) $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = [x] \sin \pi x^2$;

   (e) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = [x] \cos \pi x^2$;

   (f) $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = 2[x] - \cos 3\pi\{x\}$.

6. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^{[x]} \left(x + a\left[\frac{x}{3}\right] + b\right)$.
   Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia să fie continuă în $x = 2$ şi să fie periodică cu perioada principală $T = 6$.

8 Capitolul VIII

8.1 Continuitate. Proprietatea lui Darboux

8.1.1 Unele elemente teoretice

In cele ce urmează vom considera funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este interval.

1. **Definiţie.** Funcţia f are proprietatea lui Darboux dacă, oricare ar fi punctele $a, b \in I, a < b$, şi oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există un punct c_λ cuprins între a şi b astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

2. **Teoremă.** Dacă f este o funcţie continuua, atunci f are proprietatea lui Darboux.

3. **Propoziţie.** Fie $a, b \in I, a < b$. Dacă funcţia f are proprietatea lui Darboux şi dacă $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$ (sau $f(a) > 0$ şi $f(b) < 0$), atunci există cel puţin un punct cuprins între a şi b în care funcţia se anulează.

4. **Corolar.** Dacă funcţia f are proprietatea lui Darboux şi nu se anulează în niciun punct din I, atunci f păstrează acelaşi semn pe tot intervalul I.

5. **Propoziţie.** Funcţia f are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă transformă orice interval $J \subset I$, tot într-un interval, $f(J)$.

6. **Propoziţie.** Dacă funcţia f are proprietatea lui Darboux şi este injectivă, atunci f este strict monotonă.

7. **Propoziţie.** Dacă funcţia f are proprietatea lui Darboux şi dacă există una din limitele laterale într-un punct $x_0 \in I$, atunci ea este egală cu $f(x_0)$.

8. **Corolar.** Dacă funcţia f are proprietatea lui Darboux, atunci ea nu are niciun punct de discontinuitate de prima speţă.

9. **Corolar.** Dacă $f(x_0 - 0)$ sau $f(x_0 + 0)$ există şi este diferită de $f(x_0)$ (în particular este infinită), atunci f nu are proprietatea lui Darboux.

10. **Propoziţie.** Dacă funcţia f are proprietatea lui Darboux şi este strict monotonă, atunci f este continuă.

11. **Propoziţie.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară. Atunci există două funcţii $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue pe $\mathbb{R}$ şi care au proprietatea lui Darboux, astfel încât $f = g + h$. (Teorema lui Sierpinski)

12. **Propoziţie.** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Atunci oricare ar fi $x_0 \in I \setminus \{a\}$ (sau $x_0 \in I \setminus \{b\}$) există un şir $x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ (sau $x_n \searrow x_0$) astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = x_0$.

Demonstraţie:

Fie $x_0 \in I \setminus \{a\}$, fixat şi $r_n > 0$, $r_n \to 0$. Notăm $I_n = (x_0 - r_n, x_0) \subseteq I, \forall n \geqslant 1$. Cum f are proprietatea lui Darboux, rezultă că $f(I_n) = J_n$ şi $f(I_n \cup \{x_0\}) = K_n$ sunt intervale (care diferă cep mult printr-un punct $y_0 = f(x_0)$). Aşadar, $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_0 \in f(I_n) = J_n$ sau $y_0 \in x_0 \in I \setminus \{a\}$, deci există $y_n \in f(I_n) = J_n$ cu $|y_n - y_0| \leqslant \frac{1}{n}$ (1) şi $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$, iar din $X_0 - r_n < x_n \Leftrightarrow x_n \to x_0$ relaţia (1) devine $|f(x_n) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.
Evident, se poate alege un subşir x_{n_k} strict crescător al lui x_n cu $x_{n_k} \to x_0$ şi $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$.

Consecinţa 1. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux şi $x_0 \in \text{Int} I$ ales arbitrar. Atunci există şirurile $x_n, y_n \in I \setminus \{x_0\}$ cu $x_n \nearrow x_0$ şi $y_n \searrow x_0$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$.

Consecinţa 2. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux şi $x_0 \in I \setminus \{a\}$ (respectiv $x_0 \in I \setminus \{b\}$). Dacă există $f(x_0 - 0)$ (respectiv există $f(x_0 + 0)$), atunci $f(x_0) = f(x_0 - 0)$ (respectiv $f(x_0) = f(x_0 + 0)$). Altfel spus, funcţia f nu are discontinuităţi de speţa I.

Demonstraţie: Din Consecinţa 1 rezultă că există $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ cu $x_n \nearrow x_0$ şi $f(x_n) \to f(x_0)$, dar cum există $f(x_0 - 0)$, rezultă $f(x_n) \to f(x_0 - 0)$ şi cum limita este unică, rezultă $f(x_0) = f(x_0 - 0)$.

Consecinţa 3. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Atunci f este continuă pe I.

Demonstraţie:

Din Consecinţa 2. rezultă că f nu are discontinuităţi de speţa I, dar cum f este şi monotonă, rezultă că nu are nici discontinuităţi de speţa II şi prin urmare f este continuă pe I.

13. **Propoziţie.** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in \text{Int} I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă:
(a) există $x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ astfel încât $f(x_n) \to f(x_0)$
(b) există $y_n \in I$, $y_n \searrow x_0$ astfel încât $f(y_n) \to f(x_0)$
atunci f are proprietatea lui Darboux.

1. Să se arate că urmatoarele funcţii nu au proprietatea lui Darboux:

(a) $f:[-4,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+4 & : x\in[-4,0] \\ x & : x\in(0,2]\end{cases}$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+2 & : x\le -3 \\ x+4 & : x>-3\end{cases}$

(c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -2x & : x\in[-1,0] \\ -2x+5 & : x\in(0,1]\end{cases}$

(d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn}(x^2-3x+2)$

(e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$

(f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$

(g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-[x]$.

2. Să se demonstreze că urmatoarele funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nu au proprietatea lui Darboux:

(a) $f(x)=\begin{cases} x & : x\in\mathbb{Q} \\ x^2 & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x\in\mathbb{Q} \\ 2^x+4 & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} x & : x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases} x+2 & : x\in\mathbb{Q} \\ x^2+2x-1 & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

(e) $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & : x\in\mathbb{Q} \\ 3^{x-1} & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

(f) $f(x)=\begin{cases} |x| & : x\in\mathbb{Q} \\ x^2 & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

(g) $f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\in\mathbb{Q} \\ x+3 & : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

3. Fie $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & : x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1-x & : x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]\end{cases}$. Să se arate că:

(a) f este bijectivă;

(b) $f^{-1}=f$;

(c) f nu are proprietatea lui Darboux;

(d) f are un singur punct de continuitate.

4. Să se arate că următoarele funcţii nu au proprietatea lui Darboux:

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x\neq 0 \\ 0 & : x=0\end{cases}$

(b) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$.

5.** Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ a & : x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că funcţia f are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $|a| \leqslant 1$. În plus, dacă $a \in [-1, 1]$, arătaţi că:

(a) f nu e continuă in 0;

(b) Pentru orice $I \subset \mathbb{R}$ interval compact, $f(I)$ este interval compact şi f are proprietatea lui Darboux;

(c) f nu este monotonă pe nicio vecinatate a lui 0;

(d) Pentru orice $\varepsilon > 0$, $f(\mathbb{R}) = f((0, \varepsilon)) = f((-\varepsilon, 0)) = [-1, 1]$.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ a & : x = 0 \end{cases}.$$

(a) Demonstraţi că f nu este continuă in 0;

(b) Arătaţi că f are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;

(c) Dacă $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, arătaţi că, pentru orice $I \subset \mathbb{R}$, I interval compact, $f(I)$ este interval compact.

7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a \sin \frac{1}{x} + b \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ \alpha & : x = 0 \end{cases},$$

unde a şi b sunt date. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât f are proprietatea lui Darboux.

8. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 2^x & : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux.

9. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 2 & : x = 0 \end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux.