

Redactare: Alina Scurtu
Tehnoredactare computerizată: Emil Stoica, Cristina Aprodu

Date despre autor

Emil Stoica este autorul lucrărilor: *Calculatoare electronice și sisteme de operare*, curs, 2 vol. (coautor, Facultatea de Cibernetică, 1972); *Baze logice pentru calculatoare numerice* (Editura Tehnică, București, 1978); *Tomografia computerizată* (revista „Știință și tehnică”, 1989); *Algebra. Sinteze ale elementelor teoretice de bază* (Editura Odeon, București, 1996); *Algebra. Ghid practic* (Editura Eikon, Cluj-Napoca, 2007); *Trigonometria* (Editura Corint, București, 2009).

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii CORINT,
parte componentă a GRUPULUI EDITORIAL CORINT.

ISBN 978-973-135-502-3

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
STOICA, EMIL**

**Algebra: elementele de bază în rezolvarea de
exerciții și probleme: culegere de exerciții și probleme
aplicative: pentru gimnaziu și liceu / Emil Stoica. -
București: Corint, 2009**

Bibliogr.

ISBN 978-973-135-502-3

512

Emil Stoica

ALGEBRA

**Elementele de bază
în rezolvarea de exerciții și probleme**

**Culegere de exerciții și probleme
aplicative**

PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU

CORINT

PREFAȚĂ

Dintotdeauna, și mai ales în ultimii ani, s-au scris și s-au publicat numeroase culegeri de exerciții și probleme, care acoperă toate capitolele matematicii, atât pentru fixarea și aprofundarea materialului expus în lecțiile predate în școli, cât și pentru pregătirea examenelor de admitere la liceu, a examenului de bacalaureat sau a examenelor de admitere în diverse forme specializate de învățământ, inclusiv învățământul superior.

Aceste culegeri au fost și sunt considerate materialul cel mai solicitat în pregătirea elevilor, practica rezolvării de exerciții și probleme fiind de o indiscutabilă utilitate în vederea susținerii majorității formelor de examinare; această practică este și obiectivul principal în toate formele de pregătire, individuală sau, mai ales, asistată (de tip „meditații”).

Rezolvarea de exerciții și probleme constă însă în punerea în aplicare a unor instrumente care sunt furnizate doar de teoria matematicii, absolut și evident indispensabile oricărei tentative de a aborda — fundamentat, creativ și nu mecanic — practica rezolvării a ceea ce propun culegerile amintite.

Publicațiile sintetice de tip „Tabele și formule matematice”, prin forma foarte concentrată a conținutului, nu pot constitui un material de studiu, fiind foarte utile doar după parcurgerea acestuia.

În aceste condiții (și în mod curent), baza pregătirii teoretice a elevilor o constituie manualele școlare, care urmăresc (cronologic, cu inevitabila dispersie) o programă analitică eșalonată pe toată perioada pregătirii școlare.

În fața unui examen, elevii au la dispoziție și utilizează în general, pentru partea teoretică, doar multitudinea manualelor școlare; acestea oferă un bogat conținut informațional (foarte util primului contact), dar sunt de o eficiență redusă pentru un scop recapitulativ sau pentru aprofundare; la fel, în practica rezolvării de exerciții și probleme.

În PARTEA I, lucrarea de față își propune să ofere — într-o formă compactă, dar nu sumară, și evitând intenționat o prezentare sofisticată — sinteza elementelor teoretice de bază ale instrumentarului practic din ALGEBRA învățământului mediu; la provocarea „CE” a culegerilor de exerciții și probleme se intenționează a se da răspunsul „CU CE” și „CUM”.

Scopul principal urmărit este punerea la dispoziția elevilor (și nu numai) a unui material ușor accesibil și unitar, sintetic, însă suficient de detaliat încât să poată constitui un material de însușire, de aprofundare sau de recapitulare — cu aplicare practică directă și prin studiu individual — a informațiilor furnizate în mai mulți ani de școlarizare.

Fără stăpânirea acestor informații (evident greșit catalogate uneori ca „teorie sterilă”), tentativa rezolvării practice de exerciții și probleme este un demers aproape inutil sau, cel mult, mecanic.

Prezentarea noțiunilor teoretice este însoțită de exemple și sugestii de aplicare, dându-se soluții sau metode de rezolvare a celor mai frecvent întâlnite cazuri în practica rezolvării de exerciții și probleme; din acest punct de vedere, lucrarea constituie un GHID PRACTIC aplicativ, care poate fi consultat și utilizat eficient chiar în timpul rezolvării unui exercițiu sau a unei probleme concrete.

În PARTEA a II-a sunt prezentate exerciții și probleme aplicative, cu indicații de rezolvare și răspunsuri corelate cu, și cu trimitere la PARTEA I, precum și exerciții și probleme aplicative fără indicații și răspunsuri.

Modul de prezentare vizează un nivel mediu de pregătire prealabilă, urmărind eficiența percepției, înțelegerea fondului noțiunilor — cu scop aplicativ în practica rezolvării de exerciții și probleme — și intenționând ca lucrarea să fie utilă elevilor atât în pregătirea școlară curentă, cât și, mai ales, în pregătirea premergătoare diverselor forme de testare sau examinare.

Autorul

CUPRINS

PARTEA I. Elementele de bază

1. MULȚIMI	9
2. OPERAȚII ALGEBRICE	13
Noțiuni generale. Proprietăți. Structuri algebrice	13
Ridicarea la putere; puterea	18
Extragerea de rădăcină; radicalul	21
Logaritmarea; logaritmul	25
Exemple de aplicații	30
3. NUMERE COMPLEXE	31
Exemple de aplicații	37
4. EXPRESII ALGEBRICE	38
Noțiuni generale.	
Egalitate, identitate, inegalitate	38
Expresii algebrice particulare	40
Monom	40
Polinom	41
Trinomul de gradul 2	47
Exemple de aplicații	51
5. EGALITĂȚI. Metode de rezolvare	52
6. FUNCȚII	54
7. PROGRESII. INSERĂRI	59
Progresia aritmetică	59
Progresia geometrică	60
Exemple de aplicații	62
8. ANALIZA COMBINATORIE	63
Permutări	63
Combinări	64
Aranjamente	65
Binomul lui Newton	66
Exemple de aplicații	67

9. SUME PARTICULARE. Metode de calcul	68
10. MEDII	71
11. MATRICE	72
DETERMINANȚI	75
12. ECUAȚII. Metode de rezolvare	78
Noțiuni generale	78
Ecuția de gradul 1	79
Ecuția de gradul 2	80
Ecuția bipătrată	82
Ecuția reciprocă	82
Ecuția binomă	84
Ecuția trinomă	84
Ecuția exponențială	85
Ecuția logaritmică	85
Ecuții în combinatorică	86
Ecuții algebrice de grad n	87
Relațiile lui Viète	88
13. SISTEME DE ECUAȚII. Metode de rezolvare	90
Sisteme de ecuații liniare	94
14. INECUAȚII.	
SISTEME DE INECUAȚII. Metode de rezolvare	97
 <u>PARTEA a II-a. Culegere de exerciții și probleme aplicative</u>	
15. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME cu indicații de rezolvare	101
16. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME fără indicații de rezolvare	109
SINTEZA INDEXATĂ DE RELAȚII ȘI FORMULE	135

PARTEA I. Elementele de bază

MULȚIMI

În sens matematic, o mulțime, fie ea M , se definește ca fiind o grupare sau o colecție, ale cărei componente se numesc ELEMENTE ale mulțimii, și care este privită, considerată și tratată ca un ansamblu unitar prin una dintre următoarele modalități:

- specificarea unei caracteristici / proprietăți comune tuturor elementelor mulțimii definite;
- indicarea / specificarea concretă a elementelor care compun mulțimea definită, fie ele $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$; se scrie $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$

După numărul, finit sau infinit, de elemente, mulțimile pot fi mulțimi finite sau, respectiv, mulțimi infinite.

Mulțimea VIDĂ: o mulțime fără niciun element; se notează cu \emptyset .

RELAȚII

– Elementele m_k ale unei mulțimi M sunt legate de aceasta prin relația de **APARTENENȚĂ**; se scrie:

$$m_k \in M$$

(elementul m_k „aparține” mulțimii M)

O mulțime M' este **SUBMULȚIME** a unei mulțimi M dacă toate elementele mulțimii M' sunt și elemente ale mulțimii M , adică avem:

$$m_k' \in M' \text{ implică } m_k' \in M, \text{ pentru orice } m_k'$$

– Submulțimea M' a unei mulțimi M este legată de aceasta prin relația de **INCLUZIUNE** (relație reflexivă, antisimetrică, tranzitivă, vezi pag. 12); se scrie:

$$M' \subset M$$

(mulțimea M' este „inclusă” în mulțimea M)

Mulțimea **COMPLEMENTARĂ** a unei submulțimi M' față de o mulțime M în care este inclusă ($M' \subset M$): mulțimea ale cărei elemente aparțin mulțimii M dar nu aparțin și submulțimii M' .

Se mai numește și **DIFERENȚĂ**, și se notează

$$C_M M' = M - M' \text{ (complementara mulțimii } M' \text{ în } M).$$

$$\text{Exemplu: } M = \{a, b, c, d\}; M' = \{b, d\}; C_M M' = M - M' = \{a, c\}$$

OPERAȚII

– Operația de **REUNIRE**: operația prin care, din două mulțimi date, M_1 și M_2 , se obține ca rezultat o mulțime M , numită REUNIUNE, care are ca elemente toate elementele, comune și necomune, ale mulțimilor date, luate câte o singură dată. Se scrie:

$$M_1 \cup M_2 = M$$

Exemplu:

$$\{a, b, c, x, y, z\} \cup \{b, c, d, x, v, w\} = \{a, b, c, d, x, y, z, v, w\}$$

OBS.: mulțimea vidă \emptyset este element neutru pentru operația de reunire,

$$M \cup \emptyset = \emptyset \cup M = M, \text{ pentru orice } M \text{ (vezi pag. 16).}$$

– Operația de **INTERSECTARE**: operația prin care, din două mulțimi date, M_1 și M_2 , se obține ca rezultat o mulțime M , numită INTERSECȚIE, care are ca elemente elementele comune ale mulțimilor date, luate câte o singură dată. Se scrie:

$$M_1 \cap M_2 = M$$

Exemplu:

$$\{a, b, c, x, y, z\} \cap \{b, c, d, x, v, w\} = \{b, c, x\}$$

Mulțimi disjuncte (fie ele M_1 și M_2) – nu au niciun element comun; rezultă că intersecția lor este mulțimea vidă:

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

PRODUS CARTEZIAN a două mulțimi date, A și B : o mulțime M ale cărei elemente sunt perechi formate din elemente aparținând, respectiv, mulțimilor date. Se scrie: **$A \times B = M$**

Dacă $a \in A$ și $b \in B$ rezultă $(a, b) \in M$

De notat: în perechile (a, b) , elementele a și b sunt ordonate strict în ordinea indicată de ordinea factorilor din produsul cartezian; inversarea ordinii factorilor conduce la formarea altor perechi, (b, a) , diferite de perechile inițiale, deci produsul cartezian rezultat este diferit în consecință, având alte elemente. Prin urmare, produsul cartezian este (în general) necomutativ.

Un exemplu elocvent de produs cartezian este mulțimea M a coordonatelor (x, y) ale punctelor din planul format de axele absciselor, $x \in X$, și ordonatelor, $y \in Y$, cu $M = X \times Y$ și $(x, y) \in M$.

Corespondența / punerea în corespondență a două mulțimi (M_1 și M_2)

– corespondență UNIVOCĂ: fiecărui element din M_1 îi corespunde, prin „atașare”, un element din M_2 , dar nu și reciproc;
– corespondență BI-UNIVOCĂ: corespondență UNIVOCĂ în ambele sensuri, pentru elementele celor două mulțimi.

MULȚIMI NUMERICE: mulțimi ale căror elemente sunt numere.

– Mulțimea numerelor **NATURALE**, notată **N**: mulțimea, definită extensiv, a numerelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Se notează **N*** mulțimea **N** din care se exclude numărul 0; este mulțimea numerelor naturale nenule

$$N^* = N - \{0\} \quad N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

– Mulțimea numerelor **ÎNTREGI**, notată **Z**: mulțimea numerelor naturale reunită cu mulțimea numerelor algebrice (cu „semn”, pozitive sau negative) a căror valoare absolută este mulțimea **N**.

– Mulțimea numerelor **RAȚIONALE**, notată **Q**: mulțimea numerelor care se pot scrie sub forma $\frac{a}{b}$, cu a și b numere întregi ($b \neq 0$).

Altfel, numere iraționale.

– Mulțimea numerelor **REALE**, notată **R**: mulțimea numerelor care nu conțin „unitatea imaginară” / radicali de indice par din numere negative. Este reuniunea numerelor raționale cu numerele iraționale. Se reprezintă prin puncte pe axa numerelor reale.

– Mulțimea numerelor **COMPLEXE**, notată **C**: mulțimea numerelor care acceptă radicali de indice par și impar oricare ar fi semnul algebric al expresiei de sub radical / admit „unitatea imaginară” (vezi Cap. 3). Este reuniunea numerelor reale cu numerele imaginare. Se reprezintă prin puncte în planul complex. Avem relațiile de incluziune:

$$N^* \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Mulțimile numerelor FRAȚIONARE, IRAȚIONALE, IMAGINARE constituie mulțimile complementare ale, respectiv, mulțimilor numerelor ÎNTREGI, RAȚIONALE, REALE, (ale căror definiții le contrazic), față de mulțimile de nivel imediat superior în relațiile de incluziune de mai sus; nu au simboluri / notații proprii consacrate.

MULȚIME ORDONATĂ: o mulțime nevidă, fie ea M , pe care (între elementele căreia) se definește o relație binară „ \leq ”, zisă de ordine dacă, pentru orice $a, b, c \in M$, sunt verificate următoarele condiții: reflexivitatea ($a \leq a$), antisimetria ($a \leq b$ și $b \leq a$ implică $a = b$) și tranzitivitatea ($a \leq b$ și $b \leq c$ implică $a \leq c$).

Mulțimea \mathbf{N} a numerelor naturale este o mulțime infinită și ordonată. (Uzual, se consideră ca fiind mulțime ordonată o mulțime nevidă ale cărei elemente sunt puse în corespondență bi-univocă cu mulțimea \mathbf{N} a numerelor naturale, sau cu o submulțime finită și ordonată a acesteia).

Relație reflexivă, antisimetrică, tranzitivă

În general, într-o mulțime nevidă, fie ea M , o relație, notată aici „**rel**”, între elementele sale este:

- reflexivă, dacă $a \text{ rel } a$, pentru orice $a \in M$
- antisimetrică, dacă $a \text{ rel } b$ și $b \text{ rel } a$ implică $a = b$,
pentru orice $a, b \in M$
- tranzitivă, dacă $a \text{ rel } b$ și $b \text{ rel } c$ implică $a \text{ rel } c$,
pentru orice $a, b, c \in M$

Observație: a, b, c pot fi considerate mulțimi, cu M reuniunea lor, caz în care proprietățile de mai sus se mențin ca proprietăți ale unor relații între mulțimi (vezi relația de INCLUZIUNE, pag. 9).

NOTĂ

Conceptul de mulțime este un concept de bază și esențial pentru definirea fundamentelor matematicii (vezi și pag. 17).

OPERAȚII ALGEBRICE

În sens matematic, o operație – definită ca lege de compoziție pe o mulțime dată – este procedeu, strict și complet definit, prin care, pornind de la numere (expresii) date, se generează un număr (expresie), direct și exclusiv legat de numerele (expresiile) date prin însuși procedeu care l-a generat. Se scrie:

$$A \text{ \& } B = C$$

unde:

- A, B numerele (expresiile) date – OPERANZI
§ simbolul operației, indicând univoc fiecare operație
concretă (+, -, x, :, etc)
- C numărul (expresia) generat prin operație – REZULTAT

Operația asociază rezultatul la operanzi dați, după un procedeu determinat, bine și strict definit.

(Într-o exprimare simplistă, operația este „rețeta” prin care se obține REZULTATUL din OPERANZI).

Operațiile se diferențiază în funcție de ceea ce se urmărește prin efectuarea lor, cu consecințe directe asupra procedurii în sine, a valorii rezultatului și, evident, a simbolului (particulare fiecărei operații).

A defini o operație înseamnă de fapt a defini procedeu practic de obținere a rezultatului său, din operanzi dați.

Primele operații matematice au fost operațiile aritmetice, apărute ca și corespondente ale unor operații fizice cu obiecte concrete; introducerea numerelor, care caracterizează sub aspect cantitativ obiecte sau grupări de obiecte, a transformat operațiile cu obiecte fizice în operații cu echivalentele cantitative ale acestora, adică în operații matematice cu numere, ignorând natura fizică a obiectelor și deci generalizând, prin abstractizare, operațiile fizice.

Operațiile matematice fac mult mai comodă și substituie efectuarea operațiilor fizice când este urmărit doar aspectul cantitativ; în plus, ele devin operații de sine stătătoare cu numere, deci cu orice poate fi reprezentat sub formă de număr.

Se realizează astfel abstractizarea și generalizarea, prin ignorarea – în operație – a naturii fizice a ceea ce e reprezentabil prin numere sau un echivalent convenit al acestora; se operează cu numere pur și simplu, ceea ce a permis matematicii să se dezvolte ca teorie abstractă independentă care a creat astfel instrumente utile și valorificabile în domeniul care a născut-o de fapt,

domeniul fizic, practic, concret.

Matematica este o știință care utilizează, în esență, două instrumente fundamentale:

- raționamentul, bazat pe principiile logicii;
- calculul, bazat pe operațiile matematice.

Dacă raționamentul este „împrumutat” din logică (știință cu care matematica este esențial înrudită), calculul este un produs propriu al matematicii, prin însăși definirea și utilizarea operațiilor matematice.

În definirea operațiilor matematice se respectă strict legile logicii, legi care fac de fapt legătura corectă cu realitatea fizică, pe care operațiile trebuie să o respecte și să o reflecte.

Matematica realizează astfel legătura bi-sens dintre realul fizic concret și „realul” abstract (având, ca fundamentare și elemente de legătură, principiile logicii): se „inspiră” din concret, „creează” în abstract și valorifică în același concret fizic de la care a pornit (vezi aplicațiile matematicii în fizică).

Matematica nu este abstractă! Abstractul este doar forma și mediul în care matematica produce și evoluează, dar, dintotdeauna, matematica a plecat de la și s-a întors – prin ceea ce a produs – la concretul fizic, fiind astfel un exponent al gândirii și imaginației intelectuale precum și, poate, cel mai productiv instrument în evoluția, dirijată de om, a lumii fizice.

Definirea operațiilor, ca instrumente de calcul, este un proces creativ; calculul, care înseamnă efectuarea operațiilor, este un proces „mecanic”, de uzură, și este practic preluat de mijloace de calcul mecanice sau electronice, auxiliare (dar produse ale) inteligenței umane.

Operația este definită ca lege de compoziție pe o mulțime dată.

Considerând o mulțime nevidă M și două elemente oarecare ale acesteia, $m_1 \in M$ și $m_2 \in M$, o operație ξ pe M asociază fiecărei perechi (m_1, m_2) un element $r = m_1 \xi m_2$; $r \in M$ și este rezultatul operației ξ asupra operanzilor m_1 și m_2 .

Mulțimea perechilor (m_1, m_2) este însă produsul cartezian $M \times M$
(vezi pag. 10).

Rezultă atunci că o operație algebrică ξ pe mulțimea M este o funcție definită pe produsul cartezian $M \times M$, și cu valori în M (vezi și Cap. 6):

$$\xi : M \times M \rightarrow M$$

Această funcție asociază fiecărei perechi $(m_1, m_2) \in M \times M$
elementul unic $(m_1 \xi m_2) \in M$.

PROPRIETĂȚI GENERALE ALE OPERAȚIILOR

Se spune despre o operație ξ (pe M) că este:

– **ASOCIATIVĂ**, dacă o parte din operanzi pot fi „asociați” în operare și înlocuiți prin rezultatul aceleiași operații efectuate asupra operanzilor respectivi, adică, pentru orice $a, b, c \in M$:

$$(a \xi b) \xi c = a \xi (b \xi c) = a \xi d, \text{ cu } d = b \xi c$$

– **COMUTATIVĂ**, dacă rezultatul operației nu se schimbă schimbând ordinea operanzilor în operație („comutându-le” poziția), adică, pentru orice $a, b \in M$:

$$a \xi b = b \xi a$$

Se spune despre o operație ξ_1 (pe M) că este

– **DISTRIBUTIVĂ** față de o operație ξ_2 (pe M) dacă, pentru orice $a, b, c \in M$:

$$a \xi_1 (b \xi_2 c) = (a \xi_1 b) \xi_2 (a \xi_1 c) \quad (\text{distributivă „la stânga”})$$

și

$$(b \xi_2 c) \xi_1 a = (b \xi_1 a) \xi_2 (c \xi_1 a) \quad (\text{distributivă „la dreapta”})$$

(Operația ξ_1 se „distribuie” asupra operanzilor operației ξ_2)

Exemplu:

operația de înmulțire este distributivă față de operația de adunare, adică avem

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

și

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Fiecare operație are reguli de efectuare și simbol proprii; de asemenea, are proprietăți, specifice sau comune unui grup de operații, și restricții de efectuare / valabilitate, restricțiile decurgând în principal din condițiile de existență impuse rezultatului și / sau operanzilor (adică din condițiile care, într-un context dat, fac posibilă efectuarea operației).

ELEMENT NEUTRU (e) al unei operații § pe o mulțime M:

dacă există, este un element $e \in M$, unic, astfel încât, pentru orice $m \in M$, să avem

$$m \text{ § } e = e \text{ § } m = m$$

ELEMENT SIMETRIZABIL. SIMETRICUL UNUI ELEMENT

Considerând o operație §, pe o mulțime M și cu elementul neutru e, un element $m \in M$ este simetrizabil față de operația § dacă există un element $m_s \in M$, numit „simetricul” lui m față de operația §, astfel încât

$$m \text{ § } m_s = m_s \text{ § } m = e$$

De notat: dacă există e, atunci $e_s = e$

Exemple:

Operația algebrică de

– ÎNSUMARE

$$\begin{array}{ll} e = 0 & X + 0 = 0 + X = X \\ X_s = -X & X + (-X) = (-X) + X = 0 \\ (-X) \text{ este „opusul” lui } X & \end{array}$$

– ÎNMULȚIRE

(RIDICARE LA PUTERE)

$$\begin{array}{ll} e = 1 & Y \times 1 = 1 \times Y = Y \\ Y^0 = e = 1 & \\ Y_s = \frac{1}{Y} = Y^{-1} & Y \times \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y} \times Y = 1 \\ \frac{1}{Y} = Y^{-1} \text{ este „inversul” lui } Y & (Y^{-1} \times Y^{-1} = Y^0 = 1) \end{array}$$

– REUNIRE

$$e = \emptyset \quad M \cup \emptyset = \emptyset \cup M = M$$

(cu restricțiile de existență X_s, Y_s în mulțimile asociate operațiilor;
vezi și pag. 17, grup / monoid).

Asocierea dintre conceptul de operație algebrică și conceptul de mulțime constituie baza de definire, axiomatică, a STRUCTURILOR ALGEBRICE, fundamentale în matematică (și magnifice prin „complexitatea” și universalitatea simplității lor – Niels Henrik ABEL, 1802-1829 și Evariste GALOIS, 1811-1832).

Structura algebrică (în speță, teoria grupurilor) constituie conceptul care a permis tranziția de la algebra tradițională, care se ocupa doar de numere, spre o generalizare care implică și permite operații între elemente de orice fel. (O reconfirmare a „realismului”, înalt abstractizat, al matematicii! Vezi pag. 14 și Bibliografia [2]).

Tratarea exhaustivă a acestui subiect nu intră în obiectivul lucrării de față. Vom reaminti însă definițiile:

STRUCTURĂ ALGEBRICĂ – un cuplu format dintr-o mulțime nevidă, fie ea M, și (cel puțin) o operație algebrică, fie ea §, pe această mulțime, operație care satisface una sau mai multe axiome.

Se scrie: $(M, \text{ § })$

– SEMIGRUP: o structură algebrică $(M, \text{ § })$ în care operația § satisface axioma, unică: 1) este asociativă (vezi pag. 15).

Dacă, suplimentar, operația § este și comutativă, semigrupul se numește semigrup comutativ.

– MONOID: o structură algebrică $(M, \text{ § })$ în care operația § satisface două axiome: 1) este asociativă; 2) are element neutru (vezi pag. 16).

Dacă, suplimentar, operația § este și comutativă, monoidul se numește monoid comutativ.

Exemple: $(\mathbf{N}, +)$; (\mathbf{N}^*, \times) ; (\mathbf{Z}, \times) ; (\mathbf{Q}, \times)

– GRUP: o structură algebrică $(M, \text{ § })$ în care operația § satisface trei axiome: 1) este asociativă; 2) are element neutru; 3) orice element $m \in M$ este simetrizabil față de operația § (vezi pag. 16).

Dacă, suplimentar, operația § este și comutativă, grupul se numește grup comutativ (sau grup abelian).

Exemple: $(\mathbf{Z}, +)$; $(\mathbf{Q}, +)$

Ridicarea la putere; puterea

DEFINIȚII

Operația de RIDICARE LA PUTERE derivă din operația de înmulțire, ca un caz particular al acesteia când factorii sunt identici, și presupune efectuarea produsului:

$$(1) \quad P = \underset{\substack{\text{-----} \\ \blacklozenge \text{-----} \blacklozenge \\ n \text{ factori identici}}}{a \times a \times \dots \times a}$$

(numărul a înmulțit cu el însuși de n ori)

Se spune: „ridicarea numărului a la puterea n ” și se scrie, ca simbol al operației de ridicare la putere, a^n .

Simbolul a^n se numește PUTERE, cu:

a – BAZA puterii
 n – EXPONENTUL puterii

și indică efectuarea operației de ridicare la putere:

Simbol	Operație
a^n	RIDICARE LA PUTERE
PUTERE	

Date: a, n -----> RIDICARE LA PUTERE -----> rezultă: P
 (vezi și pag. 29)

Numărul P (valoarea produsului (1)) este rezultatul operației de ridicare la putere și reprezintă valoarea numerică a expresiei algebrice PUTERE, a^n , pentru a și n date.

NOTA

Puterea naturală a^n ($a^n = a \times a \times \dots \times a$, de n ori) a unui element a este un element care aparține monoidului multiplicativ (M, \times) , cu $a \in M$ și $n \in \mathbf{N}^*$ (puterea a n -a a elementului a).

Vorbim despre puteri naturale ($n \in \mathbf{N}^*$) ale unui element, sau puteri în-tregi ($n \in \mathbf{Z}$) ale unui element simetrizabil (inversabil) în monoid / grup.
 (Vezi pag. 16 și 17)

Fie expresia $C \times a^n$,

în care se definește C ca fiind COEFICIENTUL puterii a^n .

Expresiile $C_1 \times a^n$ și $C_2 \times a^n$ sunt PUTERI ASEMENEA, deoarece au, independent de coeficient:

- aceeași bază
- același exponent.

EGALITĂȚI

$a^m = b^n$ doar dacă au aceeași valoare numerică, adică, simultan,

$$a^m = P \quad \text{și} \quad b^n = P$$

OBS.: nu rezultă, cu necesitate, că $a = b$ și $m = n$

$$\begin{array}{ll} a^m = a^n & \text{implică } m = n \\ a^n = b^n & \text{implică } a = b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1 & \text{pentru orice } a \\ a^{-1} = \frac{1}{a} & \text{pentru orice } a \neq 0 \end{array}$$

(Vezi și pag. 16)

OPERAȚII

Avem:

$$C_1 \times (C_2 \times a^n) = (C_1 \times C_2) \times a^n = C \times a^n, \text{ cu } C = C_1 \times C_2$$

Exemple: $-3 \times (C \times a^n) = (-3 \times C) \times a^n$;

$$-3(12a^n) = -36a^n; \quad \frac{12a^n}{3} = \frac{1}{3}(12a^n) = 4a^n$$

Adunare / scădere (însurmare algebrică): posibilă doar între puteri / termeni asemenea și se efectuează prin însumarea algebrică a coeficienților acestora, puterea comună păstrându-se în suma algebrică rezultat:

$$C_1 a^n \pm C_2 a^n = C_1 a^n + (\pm C_2) a^n = [C_1 + (\pm C_2)] a^n$$

Exemplu: $3 a^5 - 4 a^5 = 3 a^5 + (-4) a^5 = [3 + (-4)] a^5 = -a^5$

Înmulțire / împărțire – posibile doar între puteri cu aceeași bază și se efectuează:

Înmulțirea – prin înmulțirea coeficienților și însumarea exponenților

$$C_1 a^m \times C_2 a^n = (C_1 \times C_2) a^{m+n}$$

Exemple: $-a^3 \times 4 a^5 = -4 a^8$; $a^7 = a^5 \times a^2 = a^4 \times a^3 = a^4 \times a^2 \times a$

Împărțirea – prin împărțirea coeficienților și scăderea exponenților

$$C_1 a^m : C_2 a^n = (C_1 : C_2) a^{m-n}$$

Exemple: $6 a^8 : (-2) a^5 = -3 a^3$; $a^3 = a^5 : a^2 = a^{10} : a^7$

În ambele cazuri păstrându-se, în rezultat, baza comună a operanzilor.

Ridicarea la putere a unei puteri – caz particular de înmulțire de puteri; se efectuează prin reproducerea bazei și înmulțirea exponenților:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \dots \times a^m}_n = a^{m + \dots + m} = a^{n \times m}$$

◆-----◆ ◆-----◆
n factori identici n termeni identici

Exemple: $(a^4)^3 = (a^6)^2 = (a^2)^6 = (a^3)^4 = a^{12}$; $(a^2)^{-3} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$

Extragerea de rădăcină; radicalul

DEFINIȚII

Operația de EXTRAGERE A RĂDĂCINII DE ORDINUL n este operația inversă operației de RIDICARE LA PUTERE CU EXPONENT n ; permite determinarea bazei a a unei puteri când se cunoaște valoarea P a puterii și exponentul n al acesteia ($a^n = P$).

Se spune: „extragerea rădăcinii de ordinul n din numărul P ” și se scrie, ca simbol al operației de extragere a rădăcinii, $\sqrt[n]{P}$.

Simbolul $\sqrt[n]{P}$ se numește RADICAL de ordinul / indice n din P , cu:

n – INDICELE radicalului

P – EXPRESIA DE SUB radical

și indică efectuarea operației de extragere a rădăcinii:

Simbol

Operație

$$\sqrt[n]{P} \longrightarrow \text{EXTRAGERE DE RĂDĂCINĂ}$$

RADICAL

Date: a, n -----► RIDICARE LA PUTERE -----► rezultă: P
Date: P, n -----► EXTRAGERE DE RĂDĂCINĂ -----► rezultă: a
(vezi și pag. 29)

Considerând numărul P ca valoare numerică a unei puteri cu baza a și exponent n , $P = a^n$, valoarea numerică asociată simbolului RADICAL DE ORDINUL / INDICE n DIN P este numărul a , adică, prin definiție:

$$\sqrt[n]{P} = a \text{ astfel încât (deoarece) } a^n = P$$

Rezultă

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ și } (\sqrt[n]{P})^n = P$$

Numărul a este rezultatul operației de extragere a rădăcinii, și reprezintă valoarea numerică a expresiei algebrice RADICAL, $\sqrt[n]{P}$, pentru P și n date. Se numește „rădăcină de ordinul n din P ” (de unde provine și denumirea operației).

De notat n este exponent la putere și indice la radical; permite determinarea bi-sens, prin operațiile corespunzătoare:

$$\begin{array}{ccc} & a^n = P & \\ a \xrightarrow{\quad n \quad} & P & \\ & a = \sqrt[n]{P} & \end{array}$$

Convențional, RADICALUL, ca simbol al operației inverse operației de ridicare la putere, se mai simbolizează și printr-o PUTERE cu exponent fracționar:

$$(1) \quad \sqrt[n]{P} = P^{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{1}{n} \text{ este inversul lui } n\right)$$

În general, $\sqrt[n]{P^m} = P^{\frac{m}{n}}$, deci radicalii se pot trata și ca puteri.

Expresiile algebrice care conțin radicali sunt expresii algebrice iraționale (ca și radicalii).

CONJUGATA unei expresii iraționale date este expresia care, prin înmulțire cu expresia dată, generează o expresie algebrică rațională (fără radicali), operația respectivă numindu-se „raționalizare” (pag. 24).

COEFICIENT C al unui radical – se definește ca la puteri,

$$C \sqrt[n]{P}$$

Radicali ASEMENEA sunt radicalii care au, independent de coeficient:

- același indice
- aceeași expresie de sub radical.

Notă: dacă indicele $n = 2$, nu se mai scrie explicit în simbolul radicalului.

EGALITĂȚI

Radicali EGALI – doar dacă au aceeași valoare numerică.

În particular:

$$\sqrt[m]{P} = \sqrt[n]{P} \text{ implică } m = n$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \text{ implică } A = B$$

OPERAȚII

Adunare / scădere (însurare algebrică): ca la puteri; posibilă doar între radicali asemenea.

Înmulțire / împărțire: posibile doar între radicali cu același indice și se efectuează prin, respectiv, înmulțirea / împărțirea expresiilor de sub radicali, păstrându-se indicele comun.

Ridicarea la putere a unui radical: se ridică la putere expresia de sub radical.

(Revine la ridicarea la putere a unei puteri – vezi (1), pag. 21).

Avem:

$$\left(\sqrt[n]{P}\right)^m = \left(P^{\frac{1}{n}}\right)^m = P^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{P^m}$$

Implicit,

$$\left(\sqrt[n]{A^m}\right)^p = \sqrt[n]{A^{mp}}$$

Radicalul unui radical – este un radical al cărui indice este produsul indicilor radicalilor:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{P}} = \sqrt{mn}{P}$$

(se deduce din (1), pag. 23, operând cu radicalii sub formă de puteri).

Aducerea radicalilor la același indice: revine la aducerea la numitor comun a unor fracții (care sunt exponenții radicalilor scriși ca puteri).

Fie radicalii (cu indicii $m \neq n$):

$$\sqrt[m]{P} = P^{\frac{1}{m}} \quad \text{și} \quad \sqrt[n]{P} = P^{\frac{1}{n}}$$

Avem:

$$\frac{1}{m} = \frac{n}{mn} \quad \text{și} \quad \frac{1}{n} = \frac{m}{mn}$$

deci
$$\sqrt[m]{P} = \sqrt[mn]{P^n} \quad \text{și} \quad \sqrt[n]{P} = \sqrt[mn]{P^m}$$

Raționalizări (vezi și pag. 22)

Se utilizează, în principal, pentru raționalizarea numitorilor iraționali de fracții, prin amplificarea fracției cu conjugata numitorului.

Se vor avea în vedere identitățile (a și/sau b considerându-se radicali):

1. $(a \pm b)(a \mp b) \equiv a^2 - b^2$, pentru radicali de indice **2**

(Expresiile $a + b$ și $a - b$ sunt, fiecare, conjugata celeilalte)

Exemple: $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \quad (\in \mathbf{Q})$

$(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 3 - 5 = -2 \quad (\in \mathbf{Q})$

2. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \equiv a^3 \pm b^3$, pentru radicali de indice **3**

(Expresiile $a \pm b$ și $a^2 \mp ab + b^2$ sunt, fiecare, conjugata celeilalte)

Exemple: $(2 - \sqrt[3]{5})(4 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}) = 8 - 5 = 3 \quad (\in \mathbf{Q})$

$(2 + \sqrt[3]{5})(4 - 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}) = 8 + 5 = 13 \quad (\in \mathbf{Q})$

De notat:

în mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale și pentru indicele n număr par,

radicalul $\sqrt[n]{A}$ impune condiția de existență $A \geq 0$;

(din $\sqrt[n]{A} = B$ rezultă $A = B^n$ dar, cu n par, $B^n \geq 0$ pentru orice $B \in \mathbf{R}$).

Logaritmare; logaritmul

DEFINIȚII

Operația de LOGARITMARE ÎN BAZA a permite determinarea exponentului, n , al unei puteri când se cunosc valoarea puterii, P , și baza acesteia, a ($a^n = P$).

Se spune: „logaritmare a numărului P în baza a ” și se scrie, ca simbol al operației de logaritmare, $\log_a P$.

Simbolul $\log_a P$ se numește LOGARITM în baza a din P cu:

a – BAZA logaritmului.

P – ARGUMENTUL logaritmului / EXPRESIA logaritmată.

și indică efectuarea operației de logaritmare:

Simbol	Operație
$\log_a P$	LOGARITMARE

LOGARITM

Date: a, n -----> RIDICARE LA PUTERE -----> rezultă: P

Date: P, a -----> LOGARITMARE -----> rezultă: n
(vezi și pag. 29)

Considerând numărul P ca valoare numerică a unei puteri cu baza a și exponent n , $P = a^n$, valoarea numerică asociată simbolului LOGARITM ÎN BAZA a DIN P este numărul n adică, prin definiție,

$$\log_a P = n \quad \text{astfel încât (deoarece)} \quad a^n = P$$

Cu alte cuvinte, logaritmul unui număr este exponentul puterii la care trebuie ridicată baza logaritmului pentru a obține acel număr, adică

$$A^{\log_A B} = B$$

Exemplu: $5^{\log_5 99} = 99$

Numărul n este rezultatul operației de logaritmare, simbolizată prin logaritm, și reprezintă valoarea numerică a expresiei algebrice LOGARITM, $\log_a P$, pentru P și a date.

Din definiția logaritmului rezultă că:

- nu există logaritmi în baza 1;
(cum $1^n = 1$ pentru orice n , ar rezulta că $P = 1$ pentru orice P)
- nu există logaritmi în baza 0;
(cum $0^n = 0$ pentru orice n , ar rezulta că $P = 0$ pentru orice P)
- nu există logaritmi în bază negativă.

Concluzie: baza oricărui logaritm este strict pozitivă și diferită de 1:

$$a > 0 \text{ și } a \neq 1$$

- nu există logaritmi ai numerelor negative
(dacă $a > 0$, $P = a^n > 0$ pentru orice n finit)
- nu există logaritm, cu valoare finită, a numărului 0
($P = 0$ implică $n \rightarrow \pm \infty$).

Concluzie: argumentul oricărui logaritm este strict pozitiv:

$$P > 0$$

EGALITĂȚI

Logaritmi egali – doar dacă au aceeași valoare numerică.
În particular:

$$\begin{aligned} \log_a P = \log_b P & \text{ implică } a = b; \\ \log_a A = \log_a B & \text{ implică } A = B; \end{aligned}$$

OPERAȚII

Pentru orice bază a ($a > 0$ și $a \neq 1$), avem:

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 & (a^0 = 1 \text{ pentru orice } a) \\ \log_a a &= 1 & (a^1 = a \text{ pentru orice } a) \end{aligned}$$

$$\log_a (A \times B) = \log_a A + \log_a B$$

deci $\log_a A^m = m \log_a A$ ($\log_a A^m = \log_a (A \times A \times \dots \times A)$)
◆-----◆
de m ori

și $\log_a \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \log_a A$ (radicalul scris ca putere: $\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$)

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

SCHIMBAREA BAZEI LOGARITMILOR

Este utilizată pentru aducerea unor logaritmi la aceeași bază, în vederea efectuării de operații sau pentru comparări valorice (de tip „>” sau „<”).

Fie: a – baza „veche” (inițială)

b – baza „nouă” (în care se dorește trecerea, prin schimbarea bazei).

Avem relația de transformare în logaritmi în baza „ b ”, din logaritmi în baza „ a ”:

$$(1) \quad \log_b P = \frac{1}{\log_a b} \times \log_a P$$

baza „nouă” b
baza „veche” a

unde expresia $\frac{1}{\log_a b}$ se numește MODUL DE TRANSFORMARE,

deoarece „transformă” logaritm, prin înmulțire cu acesta, din baza „veche” în baza „nouă”, păstrându-i argumentul neschimbat.

Dacă în (1) considerăm/facem $P = a$, rezultă $\log_b a = 1 / \log_a b$, adică, pentru orice $a, b > 0$ și $a, b \neq 1$ avem:

$$(\log_a b) \times (\log_b a) = 1$$

În funcție de valoarea bazei, logaritmii se numesc :

- cu baza = 10 logaritmi zecimali (vulgari), notați lg
- cu baza = numărul „ e ” logaritmi naturali (neperieni, Neper), notați ln

FUNȚIA LOGARITMICĂ

(Vezi și Cap. 6)

$$y = f(x) = \log_a x \quad (x > 0; a > 0 \text{ și } a \neq 1)$$

Se comportă diferit (și va fi tratată ca atare) depinzând de valoarea bazei a :

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 & \text{ funcție strict } \mathbf{descrescătoare}; \\ a > 1 & \text{ funcție strict } \mathbf{crescătoare}, \end{aligned}$$

afectând în consecință și alura graficului funcției, deci reprezentarea sa grafică. (Se reamintește că, în orice caz, $a > 0$ și $a \neq 1$).

Acest comportament se va avea în vedere și la compararea valorică a unor logaritmi dați care, în prealabil, au fost aduși la aceeași bază.

Exemplu:

ce relație valorică ($>$, $<$) există între

$$\log_a 3 \text{ și } \log_a 5 ?$$

$$\text{– dacă } 0 < a < 1, \quad \log_a 3 > \log_a 5$$

$$\text{– dacă } a > 1, \quad \log_a 3 < \log_a 5$$

NOTĂ: Baza a este un parametru și nu o variabilă a funcției logaritmice.Calculul valoric al logaritmilor. Tabele de logaritmi zecimaliPentru valoarea numerică b a logaritmului unui număr dat x ($x > 0$), $\lg x = b$, se definesc:

caracteristica – partea întregă:

– dacă x este întreg, caracteristica este (numărul cifrelor lui x) - 1;– dacă $x < 1$, caracteristica este ordinul primei cifre semnificative (nenule);

mantisa – partea zecimală:

– precalculată și obținută din tabele.

Calculul valoric al unor logaritmi în alte baze decât baza 10 presupune schimbarea prealabilă a bazei în baza 10 și apoi calculul uzând de cele de mai sus.

De notat

În aritmetică, operațiile de bază sunt adunarea, cu scăderea ca operație inversă a adunării.

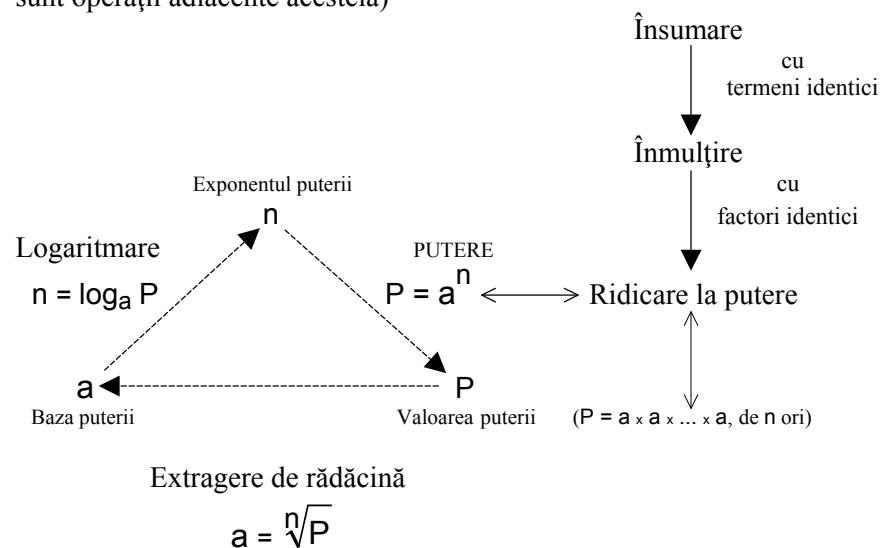
În algebra, operația de bază este însumarea algebrică; prin introducerea numerelor algebrice (cu semn algebric, + sau -), operația de scădere devine o operație de adunare (însumarea algebrică) între un număr pozitiv și un număr negativ: $a - b = a + (-b)$; în general,

$$a - (\pm b) = a + (\mp b)$$

Practic, însumarea algebrică a două numere de semn contrar revine la efectuarea unei operații aritmetice de scădere între valorile lor absolute (valoarea mai mică din valoarea mai mare), valori care sunt numere aritmetice, iar semnul rezultatului este semnul atașat celei mai mari dintre aceste valori.

În ambele cazuri, celelalte operații sunt operații derivate din operațiile de bază, ca și cazuri particulare ale acestora sau ale subsecvențelor acestora.

(Înmulțirea este o însumare repetată, cu termeni identici; împărțirea este o scădere repetată, deci tot o însumare, algebrică; ridicarea la putere este o înmulțire, cu factori identici, iar extragerea de rădăcină și logaritmul sunt operații adiacente acestora)



Exemple de aplicații

- 1) $-2a^2 + 3b^2 + 3a^2 - 8b^2 - 4a^2 - 9b^2 =$
 $[-2a^2 + 3a^2 + (-4a^2)] + [3b^2 + (-8b^2) + (-9b^2)] =$
 $= (-2 + 3 - 4)a^2 + (3 - 8 - 9)b^2 = -3a^2 - 14b^2$
- 2) $(3a^2) [(a^3)^4 + \frac{1}{3a} + (2b^2)^2 + \frac{1}{a^5} + \frac{4}{3a^2}] =$
 $= 3a^2 a^{12} + a^2 a^{-1} + 12a^2 b^4 + 3a^2 a^{-5} + 4a^2 a^{-2} =$
 $= 3a^{14} + a + 12a^2 b^4 + \frac{3}{a^3} + 4$
- 3) $\sqrt[4]{a^{26}} = \sqrt[4]{a^{24+2}} = a^{\frac{24+2}{4}} = a^{6+\frac{1}{2}} = a^6 a^{\frac{1}{2}} = a^6 \sqrt{a}$
- 4) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
- 5) $\sqrt{18} + \sqrt{12} + \sqrt{32} + \sqrt{48} =$
 $= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{16 \times 3} =$
 $= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$
- 6) $\frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3} = 2(2+\sqrt{3})$
- 7) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{8-4\sqrt{6}+3}{8-3} = \frac{11-4\sqrt{6}}{5}$
- 8) $\log_a (a^6 \sqrt{a}) = \log_a a^6 + \log_a \sqrt{a} = 6 \log_a a + \log_a a^{\frac{1}{2}} =$
 $= 6 \log_a a + \frac{1}{2} \log_a a = \frac{13}{2} \log_a a = \frac{13}{2}$
- 9) $\log_a \frac{a^3 b^5}{\sqrt[3]{ab}} = \log_a a^3 b^5 - \log_a \sqrt[3]{ab} = 3 + \log_a b^5 - \frac{1}{3} \log_a ab =$
 $= 3 + 5 \log_a b - \frac{1}{3} (1 + \log_a b) = 3 + 5 \log_a b - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log_a b =$
 $= \frac{8}{3} - \frac{14}{3} \log_a b = \frac{2}{3} (4 - 7 \log_a b)$

NUMERE COMPLEXE

În mulțimea \mathbf{R} a NUMERELOR REALE, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și n par ($n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$) avem $x^n \geq 0$; în consecință, pentru n par, $\sqrt[n]{y} = x$ există doar pentru $y \geq 0$ ($y = x^n \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$), ceea ce constituie o condiție restrictivă impusă operației de extragere a rădăcinii din orice număr real.

Răspunsul matematicii la această restricție, cu intenția eliminării ei și a generalizării operației de extragere a rădăcinii (de orice ordin) asupra tuturor numerelor reale (pozitive și negative), este: dacă $y < 0$, atunci $y = (-1) y'$, cu $y' > 0$; în consecință,

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{(-1)y'} = \sqrt[n]{(-1)} \sqrt[n]{y'}$$

Dacă n este par, $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) și $\sqrt[n]{y'}$ există pentru orice y' (deoarece $y' > 0$), iar

$$\sqrt[n]{(-1)} = [\sqrt[n]{(-1)}]^{\frac{1}{k}}$$

Cum însă, în mulțimea numerelor reale, $\sqrt[n]{(-1)}$ nu are sens, „blocând” astfel operația de extragere a rădăcinii de ordin / indice par din numere reale negative, s-a introdus în matematică o noțiune nouă, denumită (prin corespondență cu „unitatea reală”, $\mathbf{1}$) „UNITATEA IMAGINARĂ”,

notată \mathbf{i} : $\mathbf{i} = \sqrt[n]{(-1)}$

iar numerele de forma $\mathbf{b} \times \mathbf{i}$, cu $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$, se numesc NUMERE IMAGINARE, (prin corespondență cu numerele reale, de forma $\mathbf{a} \times \mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ fiind „unitatea reală” iar $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$).

Rezultă:

– pentru n par ($n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$),

$\sqrt[n]{y}$ există pentru orice $y \geq 0$ și

$$\sqrt[n]{y} = \mathbf{i}^{\frac{1}{k}} \sqrt[n]{y'}$$
 pentru orice $y < 0$, $y' = -y > 0$ (exemplu: $\sqrt{-3} = \mathbf{i}\sqrt{3}$);

– pentru n impar ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}^*$), $\sqrt[n]{y}$ există pentru orice $y \in \mathbf{R}$,

adică: prin definirea unității imaginare \mathbf{i} , operația $\sqrt[n]{y}$ devine posibilă și are sens pentru orice n , par sau impar, și orice $y \in \mathbf{R}$, pozitiv sau negativ.

Reuniunea mulțimii numerelor reale cu mulțimea numerelor imaginare este mulțimea NUMERELOR COMPLEXE, notată \mathbf{C} .