MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Anca Pascu, Bianca Vişan
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Ionuț Broştianu

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
HAIDUCU, MARIAN
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 5-a / Marian Haiducu, Sorin Peligrad, Adrian Țurcanu ; coord.: Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu. - Piteşti : Cartea Românească Educațional, 2018
ISBN 978-606-8982-08-3
Index
I. Peligrad, Sorin
II. Țurcanu, Adrian
III. Gologan, Radu (coord.)
IV. Cicu, Ion (coord.)
V. Negrescu, Alexandru (coord.)
51

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)
Marian Haiducu, Sorin Peligrad, Adrian Țurcanu

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a V-a

(2008 – 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

PREFAŢĂ

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii româneşti. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 şi nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniți matematicieni, şi-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibil elevilor cu drag de matematică. Aşa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă şi azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintaşilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie şi nu neaparat olimpici.** În plus, nu am pretins că problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes şi vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile şi creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan
Preşedintele Societății de Ştiințe Matematice din România

Capitolul I

PROBLEME DE ARITMETICĂ

1. Tatăl lui Andrei i-a propus fiului său o „afacere”: „De mâine, în fiecare zi în care îți mărești cu un leu economiile, eu îți dublez suma pe care o ai”. După opt zile, Andrei avea 1022 lei. Ce sumă avea el în ziua în care a intrat în „afacere” (dacă a îndeplinit zilnic „baremul”)?

Ioan Iulian Bunu, Baia Mare **(S:E09.3)**

2. Trei bicicliști au plecat împreună la ora 10 din localitatea *A* către localitatea *B* astfel: primul merge 20 de minute și stă 5 minute; al doilea merge 30 de minute și stă 10 minute, iar al treilea merge 35 de minute și stă 15 minute. Când merg, bicicliștii au aceeași viteză. La ce oră se vor reîntâlni cei trei bicicliști după ce se despart prima oară?

Daniela Tilincă și *Adriana Mihăilă*, Brăila **(S:E14.203)**

3. O lădiță conținând 10 pepeni identici cântăreşte 20,5 kg. Dacă am scoate 5 pepeni din lădiță, aceasta ar cântări 10,5 kg. Aflați masa lădiței goale.

Adi Lupu, Drobeta-Turnu Severin **(S:E09.131)**

4. Dintr-un coş cu pere s-au luat, pe rând, jumătate din cantitate şi încă o jumătate de pară, apoi jumătate din cantitatea rămasă şi încă o jumătate de pară, iar a treia oară jumătate din cantitatea rămasă şi încă o jumătate de pară. Ştiind că au rămas două pere, aflați câte pere au fost în coş.

Luca Tuță, Buzău **(S:E14.161)**

5. Mihai pleacă din Arad spre Sibiu, la ora 8, conducând un autoturism cu viteza medie de 60 km pe oră. Dan pleacă din Arad tot spre Sibiu, pe acelaşi drum, la ora 9, pe o motocicletă, conducând cu viteza medie de 90 km pe oră. La ce distanță de Arad îl ajunge Dan pe Mihai?

Marius Şandru, Reşița **(S:E14.321)**

6. Un număr de 2015 puncte din plan se colorează arbitrar, fiecare cu câte una dintre 12 culori. Arătați că există cel puțin 168 de puncte colorate la fel.

* * * **(S:E14.324)**

7. Dragoş, Şerban şi tatăl lor au fost la pescuit. În timp ce tatăl prindea 10 peşti, Dragoş prindea 5 peşti, iar Şerban 4 peşti. În două ore, Dragoş a prins 25 de peşti. Câți peşti au prins, în două ore, cei trei pescari?

* * * **(S:E14.328)**

8. Un ciclist, care are greutatea de 70 kg, slăbeşte într-o cursă câte 700 g la fiecare 70 km parcurşi. Care este greutatea ciclistului după o cursă de 175 km?

* * * **(S:E14.329)**

9. Care dintre concluziile A, B, C sau D rezultă din următoarele afirmații?

(1) Oricine studiază aritmetica este interesant.

(2) Niciun papagal nu ştie să citească.

(3) Cine nu ştie să citească nu este interesant.

(4) Eu studiez aritmetica.

A. Există papagali interesanți şi eu sunt interesant.
B. Eu ştiu să citesc şi nu există papagali interesanți.
C. Există papagali care studiază aritmetica şi eu sunt interesant.
D. Eu sunt interesant şi nu există papagali interesanți.

Lucian Dragomir, Oțelu Roşu **(S:E14.330)**

10. Dacă fiecare din cei doi copii ai mei bea o cincime din cantitatea de lapte din frigider, tatăl lor bea o treime din rest, pisica un sfert din ce a rămas, eu voi putea folosi ultimii 300 de ml de lapte pentru prăjitură. Câți litri de lapte sunt acum în frigider? Care este cantitatea de lapte pe care o bea fiecare?

Liliana Negrilă, Arad **(S:E12.466)**

11. Un om a împărțit o sumă de bani la cinci săraci. Unuia i-a dat $\frac{2}{9}$ din sumă și la fiecare din ceilalți câte 175 lei. Ce sumă a împărțit și cât a primit primul?

Cătălina Schnakovszki, Arad **(S:E12.468)**

12. Un călător parcurge în prima etapă o treime din traseul ales, în a doua etapă trei pătrimi din ce i-a rămas, iar în ultima etapă 10 km. Ce lungime are traseul?

* * * **(S:E13.204)**

Capitolul II

OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

1. Fie $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Determinați toate numerele naturale n pentru care $n - s(n) = 2007$.

Gabriela Boroica, Baia Mare **(S:E09.4)**

2. Determinați $\overline{ab}$ știind că $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - 3 = 10 \cdot \left(\overline{ab} + \overline{ba} - 4\right)$.

Gizela Pascale, Târgoviște **(S:E09.47)**

3. Aflați toate numerele naturale de trei cifre care, împărțite la 98, dau restul egal cu câtul.

Gh. Achim, Mizil, Prahova **(S:E09.203)**

4. Determinați mulțimea $A = \left\{\overline{abc} \mid \overline{abc} + \overline{bc} + c = \overline{a(b+c)a}\right\}$.

Francisc Csaki, Livada, Satu-Mare **(S:E09.207)**

5. Determinați suma tuturor numerelor de trei cifre, care îndeplinesc simultan condițiile:

i) fiecare număr are suma cifrelor pară;

ii) succesorul fiecăruia dintre numere are suma cifrelor 4.

Gh. Molea, Curtea de Argeș **(S:E09.210)**

6. Aflați numerele de două cifre care au proprietatea că fiecare dintre ele este de două ori mai mare decât produsul cifrelor sale mărit cu unu.

Ion Burda, Amărăști, Vâlcea **(S:E09.211)**

7. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq b \neq c \neq a$, pentru care are loc egalitatea $\overline{aa} + \overline{ba} + \overline{ca} + a = \overline{ab4}$.

Gh. Achim, Mizil, Prahova **(S:E09.212)**

8. Arătați că nu există numere naturale n astfel încât să avem $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = 2^{2009}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova **(S:E09.244)**

9. Dacă se scriu numerele naturale în ordine, începând cu 1, să se determine cifra de pe locul 30000.

Roxana Murea, Brăila **(S:E10.2)**

10. Determinați numerele naturale a, b și x pentru care $\overline{1a5b}_{(7)} = 212021_{(x)}$.

Vladimir Țiței, elev, Iași **(S:E11.7)**

11. Se consideră numărul $a = \underbrace{111\ldots11}_{2011 \text{ de } 1}{}_{(2)}$. Demonstrați că $a + 1$ se poate scrie ca suma a patru numere impare consecutive.

Sergiu Prisacariu, Iași **(S:E11.9)**

12. În timp ce rupe petalele unor flori, Ania spune pentru fiecare petală ruptă: „Iubesc matematica foarte mult, mult, puțin, foarte puțin, deloc”. Aflați cât de mult iubește Ania matematica, dacă ea rupe 32 de petale. Dar dacă ar rupe 2011 petale?

* * * **(S:E11.147)**

13. Având la dispoziție o balanță și mase marcate, în grame, cu puteri ale lui 2, trebuie să cântăresc 2012 g de zahăr. Care este numărul minim de greutăți folosite?

Eugen Predoiu, Călărași **(S:E13.44)**

14. Câte numere naturale de patru cifre au produsul cifrelor egal cu 6?

Vasile Scurtu, Bistrița **(S:E13.48)**

15. Determinați numerele naturale de cinci cifre care au proprietatea că dacă li se pune la stânga cifra 6, se obține un număr de 4 ori mai mare decât dacă le punem la dreapta cifra 6.

Aurel Doboșan, Lugoj **(S:E13.49)**

16. Un băiat constată că, dacă face diferența dintre vârsta mamei sale și produsul cifrelor numărului care reprezintă vârsta acesteia, obține numărul 25. Câți ani poate avea mama băiatului?

Lia Săplăcan, Beclean **(S:E13.59)**

17. Fie două numere N_1 și N_2, de câte trei cifre în baza zece, a căror sumă este 999. Scriind aceste numere unul lângă altul, în ordinea $\overline{N_1N_2}$ și $\overline{N_2N_1}$, se obțin două numere de câte șase cifre fiecare astfel încât unul este mai mare decât altul de șase ori. Să se afle numerele.

Simona Pavel, Câmpulung Muscel **(S:E13.322)**

18. Câte numere naturale impare dau, prin împărțirea la 2012, câtul egal cu restul? Aflați restul împărțirii sumei tuturor acestor numere la 2012.

Magdalena Isabela Tentu, Valea Mare Pravăț, Argeș **(S:E13.324)**

19. Să se arăte că, oricum am alege patru numere naturale impare, există cel puțin două numere a căror diferență să se împartă exact la 6.

Mariana Fleancu, Câmpulung Muscel **(S:E13.330)**

20. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ dacă $5+10+15+...+\overline{abc}=\overline{abc00}$.

Daniela Covaci, Brăila **(S:E14.1)**

21. Se scriu în ordine crescătoare toate numerele naturale de patru cifre care au produsul cifrelor egal cu zero. Al câtelea număr este 2013?

Cristina Ichim, București **(S:E14.2)**

22. Numărul $\overline{abc}$ împărțit la b dă câtul $\overline{da}$ și restul a. Dacă $d=b+1$, să se arate că $\overline{abc}$ nu este pătrat perfect.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila **(S:E14.3)**

23. Se consideră șirul de numere naturale 3, 10, 17, 24, 31, ...

a) Aflați al 2013-lea termen al șirului.

b) Stabiliți dacă 2013 este termen al șirului.

c) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

Ionuț Mazalu, Brăila **(S:E14.5)**

24. Determinați toate numerele de forma $\overline{ab}$ știind că suma cifrelor numărului $\overline{ab}$ este egală cu suma cifrelor numărului $5\cdot\overline{ab}$.

Daniela Stănică şi *Nicolae Stănică*, Brăila **(S:E14.6)**

25. Să se determine numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relația:

$$\overline{abc}=2\cdot\overline{ab}+3\cdot\overline{bc}+4\cdot\overline{ca}.$$

Rudi Pasici, Brăila **(S:E14.7)**

26. Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ pentru care $\overline{ab}+\overline{ac}=\overline{xyz}$, unde $x,y,z\in\{a,b,c\}$ și $x\neq y\neq z\neq x$.

Concursul „Micul matematician”, Negrești-Oaș **(S:E14.82)**

27. Împărțind un număr natural de trei cifre la 84 obținem restul 56. Să se determine acel număr știind că împărțit la 13 dă câtul egal cu restul.

* * * **(S:E14.87)**

28. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, cu $a<b<c<d$, pentru care:

$$\overline{abcd}+\overline{bcda}+\overline{cdab}+\overline{dabc}=24442.$$

* * * **(S:E14.122)**

29. Scrieți numărul $8^{2014}-4$ ca sumă de opt numere naturale consecutive.

Luca Tuță, Buzău **(S:E14.123)**

30. Să se determine cifrele consecutive *m*, *n*, *p* (nu neapărat în această ordine) şi numărul natural *a* pentru care $a(a+1)=\overline{mnp}$.

Romanța Ghiță şi *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:E14.124)**

31. Determinați numerele $\overline{abcd}$, dacă $\overline{abcd}+\overline{abc}=2013$.

Iulian Vlăduțu, Bucureşti **(S:E14.170)**

32. Să se determine toate numerele de forma $\overline{ab}$ care satisfac egalitatea: $\overline{ab}=2a+3b$.

Lăcrămioara Techiu, Brăila **(S:E14.201)**

33. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ pentru care $5\cdot\overline{ab}=3\cdot\overline{bc}$.

Anton Negrilă, Ploieşti **(S:E15.125)**

34. Numărul 137 se împarte la un număr natural nenul, obținându-se un cât egal cu jumătate din împărțitor și restul un număr de o cifră. Să se determine împărțitorul, câtul și restul.

Daniel Stanciu și *Elisabeta Stanciu*, Beclean **(S:E15.163)**

35. Fie $a=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n+2015$ cu $n\geq12$. Aflați restul împărțirii numărului *a* la 1024.

Florin Bizău și *Ioan Bizău*, Sighetu Marmației **(S:E15.201)**

36. Aflați toate numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza zece, care împărțite la 30 dau restul 17, iar prin împărțirea la 36 dau restul 5.

Nicolae Ivășchescu, Canada **(S:E15.210)**

37. Aflați numerele naturale *a*, *b*, *c* care verifică simultan relațiile:

$$2015a+b+c=4037,\quad a+2015b+c=6051 \text{ și } a+b+2015c=8065.$$

Nicolae Ivășchescu, Canada **(S:E15.283)**

38. a) Arătați că dacă m și n sunt numere naturale, nenule și $m > n$, iar $a = 11m$, $b = 5m + 6n$ și $c = 11n$, atunci $a > b > c$.

b) Stabiliți dacă numerele a, b, c definite la a), verifică relația $5a + 6c = 11b$.

c) Aflați restul împărțirii numărului $A = (a - b)(b - c)(c - a)$ la 333, unde a, b, c sunt numerele definite mai sus.

Constantin Apostol, Rm. Sărat **(S:E15.284)**

39. Determinați numerele de trei cifre pentru care, suprimând cifra zecilor, obținem un număr de 13 ori mai mic.

Aurel Doboșan, Lugoj **(S:E15.288)**

40. Dan vorbește mult în timpul orei. Profesorul îi dă de lucru: „înmulțește fiecare dintre numerele a, b, c cu suma celorlalte două și adună rezultatele”. După 5 minute Dan spune că a obținut 385773. Demonstrați că Dan a greșit, deși nu cunoașteți numerele.

Gabriel Toga, Ploiești **(S:E16.128)**

41. Determinați suma cifrelor numărului $n = a \cdot b$, unde $a = \underbrace{333...3}_{99 \text{ cifre}}$ și $a = \underbrace{999...9}_{33 \text{ cifre}}$.

Monica Corbuş, Bucureşti **(S:E13.86)**

42. Fie şirul de numere naturale 7, 11, 15, 19, … .

a) Completați şirul cu încă patru termeni.

b) Determinați al 60-lea termen al şirului.

c) Stabiliți dacă numerele 372 şi 415 fac parte din şir.

d) Calculați suma primilor 100 de termeni ai şirului.

Valentin Preda, Bucureşti **(S:E13.87)**

43. Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 şi restul 175, iar diferența dintre cifra sutelor şi cea a unităților este 7. Aflați numărul.

Valentin Preda, Bucureşti **(S:E13.90)**

44. Câte numere de trei cifre împărțite la un număr de o cifră dau restul 7?

Liliana Put, Sighetu Marmației **(S:E13.126)**

45. Andrei are în puşculița 144 de monede. O treime din ele sunt de 10 bani, un sfert din restul monedelor sunt monede de 50 de bani, iar celelalte sunt de 5 bani. Poate el să-şi cumpere o carte de 20 de lei?

Gheorghe Crăiniceanu, Drobeta-Turnu Severin **(S:E09.128)**

46. Determinați toate numerele naturale de trei cifre care au proprietatea că, eliminând cifra zecilor sau cifra unităților, se obține de fiecare dată un număr natural de 10 ori mai mic decât numărul inițial.

Tanța Costea, Tulcea **(S:E13.162)**

47. Aflați resturile împărțirii numărului $N = \overline{ababab} + 13$ la fiecare din numerele 13, 21 şi 37.

Neculai Stanciu, Berca, Buzău **(S:E09.168)**

48. Determinați cifrele distincte a, b, c pentru care $\overline{abbc} + \overline{a9} = 2009$.

Lucian Speciac, Buzău **(S:E09.169)**

49. Determinați numerele $\overline{abc}$, ştiind că $2\overline{ab}+3\overline{bc}+4\overline{ca}=\overline{abc}$.

Gh. Ghiță, Buzău **(S:E09.170)**

50. Se consideră numărul $N = 21 + 201 + 2001 + \ldots + \underbrace{200...01}_{2009\text{ cifre}}$. Stabiliți câte cifre identice are acest număr.

Mircea Lazăr, Popeşti, Focşani **(S:E09.172)**

51. Se consideră şirul: $1^2 + 1^3$, $2^2 + 2^3$, $3^2 + 3^3$, $4^2 + 4^3$, … .

a) Calculați valorile următorilor trei termeni ai şirului.

b) Arătați că şirul conține doar numere pare.

c) Stabiliți dacă numerele 370 şi 1100 sunt termeni ai şirului.

Adrian Țurcanu, Piteşti **(S:E14.250)**

52. Împărțind numărul natural n la 42, obținem câtul c şi restul 36. Care sunt câtul şi restul împărțirii lui n la 14?

I. Fota, Izbiceni **(S:E14.281)**

53. Fie a, b, c, d numere naturale nenule astfel încât $a = b \cdot c + d$. Demonstrați că restul împărțirii lui a la b este egal cu restul împărțirii lui d la b.

Ion Voicu, Răduleşti, Ialomița **(S:E14.282)**

54. Ştiind că $\underbrace{\overline{xx...x}}_{n\text{ ori}}+\underbrace{\overline{yy...y}}_{n\text{ ori}}=\underbrace{\overline{aa...a}}_{n\text{ ori}}$, arătați că $\underbrace{\overline{xx...x}}_{n+1\text{ ori}}+\underbrace{\overline{yy...y}}_{n+1\text{ ori}}=\underbrace{\overline{aa...a}}_{n+1\text{ ori}}$.

Ion Voicu, Răduleşti, Ialomița **(S:E14.283)**

55. Determinați produsul numerelor a, b, c, ştiind că:

$$a \cdot b = 144,\ b \cdot c = 225 \text{ şi } a \cdot (b + c) = 340.$$

Eugeniu Blăjuț, Bacău **(S:E14.284)**

56. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care, împărțite la suma cifrelor, dau câtul 10 şi restul 9.

Vasile Scurtu, Bistrița **(S:E14.288)**

57. Determinați cifrele x, y, z pentru care $\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}=2727$.

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin **(S:E14.289)**

58. Determinați numărul natural cu două cifre, scris în baza 10, care, împărțit la răsturnatul său, dă câtul 2 şi restul 15.

Gyuszi Szep, Petroşani **(S:E14.325)**

59. O pereche (x, y) de numere naturale se numeşte *artistică* dacă prin ştergerea uneia dintre cifrele numărului x se obține numărul y. Calculați numărul perechilor *artistice* pentru care $x + y = 50$.

Heidi Feil, Oțelu Roşu **(S:E14.326)**

60. Cel mai vechi teatru din România a fost construit în oraşul Oravița din județul Caraş-Severin şi a fost inaugurat în anul 1817. După un număr de ani reprezentat de un număr A de două cifre egale, la Reşița (Caraş-Severin) a fost construită prima locomotivă cu aburi fabricată în România; după un alt număr de ani, reprezentat de un număr B de două cifre egale (B > A), la Lupeni (Hunedoara) a început construcția primei fabrici de mătase artificială din România. Adunând acum un alt număr C (de ani) cu aceeaşi proprietate şi $C > B$, obținem anul 2015. În ce an a fost construită prima locomotivă cu aburi din România, ştiind că aceasta s-a întâmplat după adoptarea primei constituții a țării?

Lucian Dragomir, Oțelu Roşu **(S:E14.327)**

61. Fie numerele naturale a, b, c astfel încât $ab = 5c$, $bc = 13a$, $ca = 31b$. Calculați $S = a^2 + b^2 + c^2 + 1392$.

Eugen Predoiu, Călăraşi **(S:E15.1)**

62. Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$, cu $a < b < c <$ d pentru care

$$\overline{a0a} + \overline{b0b} + \overline{c0c} = \overline{d0d}\ .$$

Pavel Rîncu, Bozovici, Caraş-Severin **(S:E15.43)**

63. a) Câte numere naturale de patru cifre nu conțin nicio cifră egală cu 2?

b) Calculați suma resturilor împărțirii acestor numere la 2.

Liliana Put, Sighetu Marmației **(S:E15.49)**

64. Fie m, n, p numere naturale distincte a căror sumă este 2016. Știind că prin împărțirea lor la 11 se obține de fiecare dată acelaşi rest, iar cel mai mic cât al lor este mai mare decât 59, să se determine cele trei numere.

Lucian Neagu, Alexandria **(S:E15.81)**

65. Suma a 21 numere naturale nenule distincte este egală cu 275.

a) Arătați că cel puțin 7 și cel mult 15 din cele 21 de numere sunt impare.

b) Aflați ultima cifră a produsului celor 21 de numere.

Traian Preda, Bucureşti **(S:E16.89)**

Capitolul III

OPERAŢII CU PUTERI. PĂTRATE PERFECTE. CUBURI PERFECTE

1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ în baza 10 știind că:

$$\overline{abcd} = 2^{2a+3b+2c+d}.$$

Alexandru Vele, Tg. Lăpuș **(S:E09.5)**

2. Determinați numerele de forma $\overline{abcde}$ care sunt pătrate perfecte și se divid cu 33.

Gheorghe Boroica, Baia Mare **(S:E09.6)**

3. Aflați restul împărțirii numărului $3+3^2+3^3+...+3^{2009}$ la 13.

Mirela Mortici, Târgoviște **(S:E09.49)**

4. Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$, știind că $a \cdot b = \overline{cd}$, $\overline{dc}$ este pătrat perfect și $a < b$.

Ioana Mazilu și *Iulian Mazilu*, Urziceni, Ialomița **(S:E09.209)**

5. Fie $a = \overline{xyzt} + \overline{yztx} + \overline{ztxy} + \overline{txyz}$, unde *x*, *y*, *z*, *t* sunt cifre nenule.

a) Să se arate că *a* nu este pătrat perfect.

b) Care trebuie să fie valoarea sumei $x+y+z+t$ pentru ca numărul $303 \cdot a$ să fie pătrat perfect? Pentru câte secvențe de tipul (*x*, *y*, *z*, *t*) se obține această valoare?

Narcis Gabriel Turcu, Brăila **(S:E10.3)**

6. Determinați numărul natural *n* pentru care $2^5+2^6+...+2^n = 2011+n:2$.

Monica Minea, elevă, Iași **(S:E11.2)**

7. Rezolvați în numere naturale ecuația $3 \cdot 5^x + 44^y = 2011$.

Răzvan Ceucă, elev, Iași **(S:E11.3)**

8. Determinați ultimele 2013 cifre ale numărului $N = 2010^{2011}$.

Ilinca Anton și *Miruna Anton*, eleve, Iași **(S:E11.4)**

9. a) Calculați $5^3+6^3+7^3+11^3$.

b) Arătați că 2015^{2014} poate fi scris ca o sumă de patru cuburi perfecte.

Cristina Vijdeluc şi *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare **(S:E13.10)**

10. Să se determine ultima cifră a numărului: $N = 2011^{n+2011} + 2012^{n+2012} + 2013^{n+2013}$.

Geanina Dumitrașcu, Brăila **(S:E14.4)**

11. Aflați cifrele *a*, *b* pentru care $\overline{aa}^{\,b} = \overline{aba}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova **(S:E14.121)**

12. Comparați numerele $a = \dfrac{2013^n + 2015^n}{2014^n}$ și $b = \dfrac{2013^{n+1} + 2015^{n+1}}{2014^{n+1}}$, unde *n* este număr natural.

Romanța Ghiță şi *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:E14.130)**

13. Arătați că nu există numere naturale a, b, c astfel încât $2005^a + 2011^b = 2013^c$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova **(S:E14.162)**

14. Arătați că nu există numere naturale n astfel încât $n^2 + n = 5m + 8$, unde m este număr natural.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova **(S:E14.165)**

15. Aflați valorile naturale ale lui a şi b astfel încât să avem $a^4 = 72 - a^3b$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova **(S:E14.166)**

16. Arătați că numărul $a = 9 + 99 + \ldots + \underbrace{99...9}_{n \text{ ori}} + n$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural nenul.

Ion Voicu, Răduleşti, Ialomița **(S:E14.169)**

17. Fie numărul $A = 2014 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 2013)$. Arătați că numărul A se poate scrie ca sumă de cinci numere naturale pătrate perfecte și distincte.

George-Florin Șerban, Brăila **(S:E14.202)**

18. Aflați numerele $\overline{abcde}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $\overline{abbc} = \overline{de} \cdot \overline{bc}$;

b) $\overline{bc}$ este pătrat perfect.

Daniela Tilincă şi *Adriana Mihăilă*, Brăilă **(S:E14.204)**

19. Un elev lucrează la matematică: într-o zi un exercițiu, a doua zi două exerciții, a treia zi dublul zilei precedente, a patra zi dublul zilei precedente și tot așa în fiecare zi. După câte zile elevul lucrează 2047 exerciții?

* * * **(S:E14.205)**

20. Să se arate că orice număr de forma $M = \overline{xy3}^1 + \overline{xy3}^2 + \overline{xy3}^3 + ... + \overline{xy3}^{100}$ se divide cu 10.

Ionuț Mazalu, Brăila **(S:E14.206)**

21. a) Scrieți numărul 100 ca o sumă de patru cuburi.

b) Scrieți numărul 100^{6p+1} ca o sumă de patru cuburi, unde p este număr natural.

Ionuț Mazalu, Brăila **(S:E14.207)**

22. Pentru orice n număr natural, aflați restul împărțirii numărului:

$$M = 3^{3n+2} \cdot 2^{n+2} + 3^{3n} \cdot 2^{n+1} + 3^{3n} \cdot 2^{n+1} + 7 \text{ la } 2014.$$

Ionuț Mazalu, Brăila **(S:E14.208)**

23. Aflați ultimele două cifre ale numărului $a = 3^{2015} + 3^{2014} + 3^{2013} + 3^{2012}$.

Rudi Pasci, Brăila **(S:E14.209)**

24. Aflați ultimele trei cifre ale numărului $b = 7^{2014} + 7^{2013} + 7^{2012} + 7^{2011}$.

Rudi Pasci, Brăila **(S:E14.210)**

25. Să se determine numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{ab0cc} = (\overline{ab})^2 \cdot (\overline{ac})^2$.

Cosmin Manea şi *Dragoş Petrică*, Piteşti **(S:E14.241)**

26. a) Determinați restul împărțirii lui $100^{100} - 55$ la 45.

b) Determinați restul împărțirii lui $12^{2014} - 20$ la 36.

Adriana Niță şi *Nicolae Niță*, Curtea de Argeş **(S:E14.243)**

27. Calculați câtul și restul împărțirii numărului 2015^3 la 2014, fără a efectua ridicarea la putere. Generalizare.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeș **(S:E14.244)**

28. Numerele de trei cifre, în baza 10, le numim *deosebite* dacă îndeplinesc simultan condițiile:

i) suma cifrelor lor este un pătrat perfect;
ii) cele trei cifre sunt pătrate perfecte.

Să se determine pătratele perfecte *deosebite*.

Aurel Adam, Roșiorii de Vede **(S:E15.86)**

29. Arătați că nu există numere naturale x, y, astfel încât:

$$3^{2014} + 2015 \cdot x + 2017 \cdot y = x^{1001} + y^{1001}.$$

Mirela-Adriana Matei, Turnu Măgurele **(S:E15.89)**

30. Se consideră numerele naturale nenule a, care au o cifră de 0, două cifre de 1, trei cifre de 2, patru cifre de 3, cinci cifre de 4, șase cifre de 5, șapte cifre de 6, opt cifre de 7, nouă cifre de 8 și zece cifre de 9. Să se arate că cel mai mic număr care îndeplinește condițiile date nu este pătrat perfect.

Mihai Bodan, Cosmești, Videle **(S:E15.90)**

31. Aflați numerele naturale a și b pentru care:

$$63a^3 + 78b^2 = 2013.$$

Victor Săceanu, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.121)**

32. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că:

$$\overline{abc} + a + b + c = k^4, \text{ unde } k \in \mathbb{N}.$$

Aurel Doboșan, Lugoj **(S:E15.122)**

33. Aflați cel mai mic număr de formă $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = a^3 + b^3 + c^3$.

George Florin Șerban, Brăila **(S:E15.123)**

34. a) Arătați că $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$, pentru orice n natural.

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale a, b, c, d pentru care:

$$a^2 + b^3 + c^4 = d^5.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și *Neculai Stanciu*, Buzău **(S:E15.124)**

35. Aflați numărul $\overline{abcd}$ pentru care $a + b + c = d = a^3$ și $d - c = a^2$.

Ștefan Marica, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.126)**

36. Care sunt ultimele trei cifre ale numărului 2015^{2015}?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și *Neculai Stanciu*, Buzău **(S:E15.127)**

37. a) Determinați restul împărțirii numărului $A = \underbrace{111...1}_{\text{de 2015 ori}}$ la 4.

b) Arătați că numărul $B = \overline{bb...b}$, unde b apare de exact k ori, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, nu este pătrat perfect.

Concursul „Laurențiu Panaitopol”, Giurgiu, 2015 **(S:E15.161)**

38. Determinați numărul $\overline{ab}$, știind că $\overline{ba}^2 - 3 \cdot \overline{ab} = 2556$.

Daniel Stanciu și *Elisabeta Stanciu*, Beclean **(S:E15.162)**

39. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, scrise în baza zece, care sunt pătrate perfecte și dau restul 0 la împărțirea cu 22.

Florin Bizău și *Ioan Bizău*, Sighetu Marmației **(S:E15.202)**

40. a) Scrieți numărul 2015 ca sumă de puteri diferite ale lui 2.
b) Scrieți numărul 2015 ca sumă de puteri ale lui 5.

Angela Lopată, Gârdana **(S:E15.207)**

41. Aflați numerele $\overline{abc}$ pentru care $(a+b+c)^3 = \overline{abc}.$

Ștefan Marica, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.321)**

42. Aflați numerele $\overline{abc}$, știind că $a \cdot (\overline{cb}^3 + a^3 - 1) = 2014.$

Ștefan Marica, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.322)**

43. Determinați numărul $\overline{abcd}$ știind că $2 + 2^2 + 2^3 + ... + \overline{abcd} = 2046.$

Pavel Rîncu, Bozovici, Caraș-Severin **(S:E15.323)**

44. Aflați cifrele *a* și *b*, $a > b$, știind că $\overline{a00} + \overline{b00}$, respectiv $\overline{a00} - \overline{b00}$ sunt pătrate perfecte.

Pavel Rîncu, Bozovici, Caraș-Severin **(S:E15.324)**

45. Determinați numerele naturale *n* și *m* pentru care

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + ... + 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = m^{2016}.$$

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.329)**

46. Fie $A = 2^{4n+1} \cdot 5^{4n+3} - 1$, unde *n* este număr natural. Aflați *n*, știind că suma cifrelor lui *A* este 2031.

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.330)**

47. Găsiți numerele naturale *a* și *b* pentru care $63a^3 + 78b^2 = 2013$.

Victor Săceanu, Drobeta-Turnu Severin **(S:E13.123)**

48. Aflați numerele naturale *n* pentru care $2^n + 4^n + 15^n = 3^n + 5^n + 8^n$.

Ionel Tudor, Călugăreni **(S:E13.124)**

49. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Numărul 2^{80} are 25 de cifre”.

Grigore Dumitru, Măcin **(S:E13.168)**

50. Să se arate că numărul $A = 2009^{(2009 \cdot k + 2008)(2009 \cdot k + 2007)}$ reprezintă aria unui pătrat, oricare ar fi *k* număr natural.

Adi Lupu, Drobeta-Turnu Severin **(S:E09.123)**

51. Fie $a = 1 + 6 + 6^2 + \ldots + 6^{20}$ și $b = 1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{22}$. Comparați numerele $5 \cdot a$ și $4 \cdot b$.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat **(S:E09.171)**

52. Arătați că numărul $A = 4^n \cdot 5^{2n+1} - 2^{2n} \cdot 25^n$ este pătrat perfect, oricare ar fi *n* număr natural.

* * * **(S:E14.127)**

53. Scrieți numărul 169^2 ca sumă de trei pătrate perfecte.

Ștefan Marinca, Drobeta-Turnu Severin **(S:E14.167)**

54. Arătați că numărul $A = 2015n^{2015} + 2^{2015}$ nu este pătrat perfect, pentru orice număr natural impar *n*.

Silviu Scuturici, Telciu **(S:E15.165)**

55. Arătați că numărul 5^{2n+4} se scrie ca sumă a trei pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural n.

Marin Chirciu, Pitești **(S:E14.245)**

56. Se consideră mulțimea A a numerelor naturale impare de la 1 la 25. Să se determine cel mai mic pătrat perfect care se divide cu toate elementele mulțimii A.

Sorin Ulmeanu, Pitești **(S:E14.249)**

57. a) Calculați $41^2 + 18^2 + 3^2$.

b) Scrieți numărul 2014^{2015} ca o sumă de trei pătrate perfecte.

Eugeniu Blăjuț, Bacău **(S:E14.286)**

58. Scrieți numărul $a = 7^{2014} - 7^{2013} - 7^{2012}$ ca o sumă de două pătrate perfecte.

Eugeniu Blăjuț, Bacău **(S:E14.287)**

59. Arătați că numărul $1^{2014} + 5^{2014} + 6^{2014}$ nu este pătrat perfect.

* * * **(S:E14.290)**

60. Stabiliți care dintre numerele:

$$A = 2 + 4 + \ldots + 2014 \text{ și } B = 1 + 3 + \ldots + 2015$$

este mai mare, apoi arătați că între A și B nu există niciun pătrat perfect.

Marius Șandru, Reșița **(S:E14.322)**

61. Determinați toate numerele naturale de patru cifre care au ultima cifră 5 și sunt pătrate perfecte.

Ion Fota, Izbiceni, Olt **(S:E15.42)**

62. Determinați cifrele a, b, c, d, știind că $a^a = \overline{bcd}$.

Ioan Tebieș, Coșbuc și *Irina Opraie*, Năsăud **(S:E15.44)**

63. Determinați numerele naturale x, y, z, t astfel încât:

$$x < y < z < t \text{ și } 11^x + 14^y + 6^z + 2^t = 2015.$$

Cristina Maria Militaru, București **(S:E15.45)**

64. Să se determine numerele naturale m pentru care are loc egalitatea:

$$m^1 \cdot m^3 \cdot m^5 \cdot \ldots \cdot m^{1989} = m^{m^2}.$$

Veronica Țucă, Alexandria **(S:E15.83)**

65. a) Arătați că $2013 = 8^2 + 18^2 + 20^2 + 21^2 + 28^2$.

b) Demonstrați că numărul 2013^{2013} se poate scrie ca sumă de 5 pătrate perfecte.

Tanța Costea, Tulcea **(S:E13.163)**

66. Aflați numerele naturale x, y, z pentru care $2^x + 3^y + 5^z = 33$.

Pavel Rîncu, Bozovici, Caraș-Severin **(S:E15.48)**

67. Determinați numerele naturale n și m pentru care

$$1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + \cdots + 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n = m^{2016.}.$$

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.329)**

68. Fie $a = (1 + 2 + 3 + \ldots + 2016)^{1+2+3+\ldots+2015}$.

a) Determinați ultima cifră a numărului a.

b) Arătați că a este pătrat perfect.

Florin Bizău și *Ioan Bizău*, Sighetu Marmației **(S:E15.203)**

69. Care sunt ultimele cifre ale lui 2015^{2015} ?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și *Neculai Stanciu*, Buzău **(S:E15.107)**

70. Să se arate că numerele $a = 2^{2010} + 3^{2010}$ şi $b = 2^{2010} + 3^{2010} + 4^{2010}$ nu sunt pătrate perfecte.

Gabriela Dincă şi *Viorel Dincă*, Giurgiu **(S:E10.256)**

71. Arătaţi că, oricum am alege 7 numere naturale pătrate perfecte, există două a căror diferenţă se divide cu 10.

* * * **(S:E12.595)**

72. Aflaţi numerele naturale m şi n, ştiind că $3 \cdot n! + 28 = m^2$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Cătălina Oprea, Buzău **(S:E12.618)**

73. Arătaţi că numărul $2^n + 3^n$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

* * * **(S:E13.87)**

74. Găsiţi numerele naturale $\overline{ab}$ astfel încât $\overline{ab} = a^3 + b^3$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova **(S:E14.53)**

75. Arătaţi că numărul $a = (2n+1)(3n+2)$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural.

* * * **(S:E16.54)**

76. Stabiliţi dacă numărul $a = 10^{2016} - 2^{10}$ este pătrat perfect.

* * * **(S:E16.138)**

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

Capitolul I. Probleme de aritmetică

1. (S:E09.3) *Soluția 1.* Notăm suma pe care o avea Andrei în ziua în care a decis să intre în afacere cu a. Atunci, Andrei avea:

$2(a+1)=2a+2,$ a doua zi,

$2(2a+2+1)=4a+6=2^2\cdot a+2^3-2,$ a treia zi,

$2(4a+7)=8a+14=2^3\cdot a+2^4-2,$ a patra zi ș. a. m. d., $2^7\cdot a+2^8-2,$ a opta zi.

Deci, $128\cdot a+256-2=1022\Rightarrow 128\cdot a=1022-254\Rightarrow 128\cdot a=768\Rightarrow a=6.$

Soluția 2.

Câți bani avea Andrei a 7-a zi? $1022:2-1=510$ lei

Câți bani avea Andrei a 6-a zi? $510:2-1=254$ lei

Câți bani avea Andrei a 5-a zi? $254:2-1=126$ lei

Câți bani avea Andrei a 4-a zi? $126:2-1=62$ lei

Câți bani avea Andrei a 3-a zi? $62:2-1=30$ lei

Câți bani avea Andrei a 2-a zi? $30:2-1-14$ lei

Câți bani avea Andrei la început? $14:2-1=6$ lei.

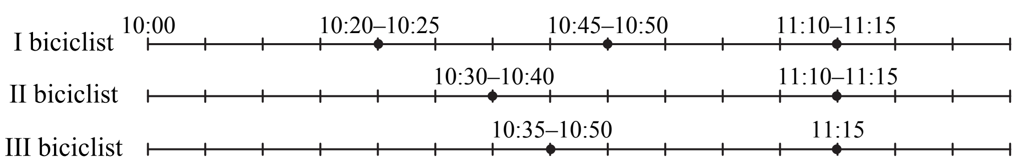
Generalizare: Tatăl lui Andrei i-a propus fiului său o „afacere”: „De mâine, în fiecare zi în care îți mărești cu un leu economiile, eu îți dublez suma pe care o ai.” După n zile, Andrei avea 2^p-2 lei, $n,p\in\mathbb{N}^*,\ p>n.$ Ce sumă avea el în ziua în care a intrat în „afacere” (dacă a îndeplinit zilnic „baremul”)?

Soluție. Notând din nou suma inițială cu a și ținând cont de *Soluția 1* a problemei inițiale, deducem că după n zile Andrei are: $2^{n-1}\cdot a+2^n-2$ lei.

Atunci, $2^{n-1}\cdot a+2^n-2=2^p-2\Rightarrow 2^{n-1}\cdot a=2^p-2^n\Rightarrow 2^{n-1}\cdot a=2^{n-1}\cdot\left(2^{p-n+1}-2\right)$

$\Rightarrow a=2^{p-n+1}-2.$

2. (S:E14.203) Cei trei bicicliști se despart prima oară la ora 10:20, când primul biciclist se oprește și stă 5 minute. Al doilea şi al treilea biciclist merg împreună până la ora 10:30, când al doilea biciclist se opreşte şi stă 10 minute. Al treilea biciclist continuă să meargă până la 10:35, când se opreşte şi stă 15 minute. După fiecare oprire, bicicliştii continuă să se deplaseze, mergând cu aceeaşi viteză. Dacă sunt în mişcare, distanțele dintre ei se păstrează. Ei se pot întâlni numai dacă doi se găsesc în repaus în acelaşi loc şi al treilea trece prin dreptul lor. De aceea trebuie studiată poziția celor trei biciclişti atunci când doi se găsesc în repaus în acelaşi loc. Reprezentăm printr-un segment distanța parcursă de un biciclist în 5 minute.



Prima dată se întâlnesc primii biciclişti la ora 11:10, când ei parcurg, fiecare, câte 12 segmente. Ei rămân împreună până la ora 11:15, moment în care prin dreptul lor trece cel de-al treilea biciclist. Deci, la ora 11:15 cei trei biciclişti se vor întâlni prima oară, după ce s-au despărțit la ora 10:20. Distanța față de localitatea A în momentul întâlnirii este de 12 segmente.

3. (S:E09.131) 20,5 kg – 10,5 kg = 10 kg (cântăresc 5 pepeni);
10 kg · 2 = 20 kg (cântăresc 10 pepeni);
20,5 kg – 20 kg = 0,5 kg (masa lădiței goale).

4. (S:E14.161) 1. Câte pere au rămas în coş după ce s-a luat a doua oară?
$(2 + 0{,}5) \cdot 2 = 2{,}5 \cdot 2 = 5$ (pere)
2. Câte pere au rămas în coş după ce s-a luat prima oară?
$(5 + 0{,}5) \cdot 2 = 5{,}5 \cdot 2 = 11$ (pere)
3. Câte pere au fost în coş?
$(11 + 0{,}5) \cdot 2 = 11{,}5 \cdot 2 = 23$ (pere)

5. (S:E14.321) *Soluția I:*
1. După câte ore de la plecarea lui Mihai pleacă Dan?
$9 - 8 = 1$
2. Ce distanță parcurge Mihai într-o oră?
$60 \cdot 1 = 60$ (km)
3. Ce distanță recuperează Dan într-o oră?
$90 - 60 = 30$ (km)
4. După câte ore Dan îl ajunge pe Mihai?
$60 : 30 = 2$ (ore)
5. La ce distanță de Arad îl ajunge Dan pe Mihai?
$90 \cdot 2 = 180$ (km)

Soluția II: Notăm după câte ore Dan îl ajunge pe Mihai cu x. Avem $90 \cdot x = 60(x + 1)$, de unde $90 \cdot x = 60 \cdot x + 60 \Rightarrow 30 \cdot x = 60 \Rightarrow x = 2$ ore. Distanța este $90 \cdot 2 = 180$ km.

6. (S:E14.324) 2015 : 12 = 167 rest 11. Cazul cel mai nefavorabil, adică numărul maxim de puncte pentru care nu suntem siguri că sunt 168 de puncte colorate la fel este 2015 – 11 = 2004, când ar exista posibilitatea ca cele 2004 puncte să fie grupate în 12 grupe şi fiecare grupă să conțină câte 167 de puncte. Deci, fiecare din cele 12 culori să fie aplicată la câte 167 de puncte. Pentru orice număr mai mare ca 2004, principiul cutiei (principiul lui Dirichlet) ne asigură că există cel puțin 168 de puncte colorate la fel. Cum 2015 > 2004, rezultă că există 168 de puncte colorate la fel.

7. (S:E14.328)
1. Câte grupe de peşti a prins Dragoş?
$25 : 5 = 5$ (grupe)
2. Câți peşti a prins tatăl în două ore?
$10 \cdot 5 = 50$ (peşti)
3. Câți peşti a prins Şerban în două ore?
$4 \cdot 5 = 20$ (peşti)