

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

clasa a VI-a

partea a II-a

ediția a XIV-a



mate 2000 – consolidare

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 4042/16.05.2025.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca

Tehnoredactare: Adriana Vlădescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

ZAHARIA, DAN

Matematică : algebră, geometrie : clasa a VI-a / Dan Zaharia,

Maria Zaharia. – Ed. a 14-a. – Pitești : Paralela 45, 2025 –

2 vol.

ISBN 978-973-47-4290-5

Partea 2. – 2025. – ISBN 978-973-47-3773-4

I. Zaharia, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

Algebră

Capitolul Mulțimea numerelor întregi

PP Competențe specifice și exemple de activități de învățare

1. **Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
 - 1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
 - Identificarea unui număr întreg în situații practice sau interdisciplinare (de exemplu: temperaturi, altitudini, golaveraje, debit/credit)
 - Reprezentarea pe axa numerelor a opusului unui număr întreg; modulul ca distanță pe axa numerelor de la origine la reprezentarea numărului
 - Identificarea unor contexte practic-aplicative sau teoretice care folosesc ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi
2. **Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
 - 2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor
 - Compararea numerelor întregi, pornind de la reprezentările acestora pe axa numerelor
 - Ordonarea elementelor unei mulțimi finite de numere întregi
 - Utilizarea regulilor specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere întregi: adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere cu exponent natural
 - Validarea (prin probă) a soluției unei ecuații sau a unei inecuații în mulțimea numerelor întregi
3. **Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
 - 3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
 - Aplicarea unor proprietăți ale operațiilor cu numere întregi pentru optimizarea calculelor numerice
 - Utilizarea regulilor de calcul cu puteri (calcule numerice)
 - Utilizarea eficientă a metodelor de determinare a unei necunoscute dintr-o ecuație sau inecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate/inegalitate)
4. **Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
 - 4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
 - Formularea unor răspunsuri logice în raport cu cerințe de calcul numeric (corelații intradisciplinare; de exemplu: apartenența rezultatului unui calcul la o mulțime, estimarea rezultatului, utilizarea lui 0 ca factor în produse de numere)
 - Scrierea unei ecuații/inecuații echivalente cu o ecuație/inecuație dată
 - Redactarea demersului de rezolvare a unor ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi (inclusiv verificarea soluțiilor)

- Transpunerea unei probleme într-o ecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor întregi
- Exprimarea unor caracteristici ale modului, derivate din definiția acestuia ($|x| = a$, $|x| < a$, $|x| \leq a$, unde a și x sunt numere întregi)

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi

- Analizarea unor situații practice în care se utilizează numere întregi
- Analizarea unor consecințe posibile ce decurg din modificarea unui set de ipoteze în probleme referitoare la numere întregi
- Încadrarea soluției unei ecuații într-o mulțime de numere întregi, fără a efectua calcule

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului

- Transpunerea unei situații date în limbaj matematic, utilizând ecuații sau inecuații
- Formularea de probleme cu numere întregi pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat
- Formularea unor probleme echivalente cu o problemă dată în contextul numerelor întregi

Unitatea: Mulțimea numerelor întregi. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare

PE-PP

1. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi

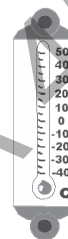


La televizor sau la radio auziți zilnic „buletinul meteo”.

Temperaturile pot fi **pozitive**, **zero** sau **negative**.

- +3°C se citește „plus 3 grade Celsius”
- +28°C se citește „plus 28 de grade Celsius”
- 5°C se citește „minus 5 grade Celsius”
- 14°C se citește „minus 14 grade Celsius”

Temperaturile negative, zero sau pozitive se înregistrează cu ajutorul **termometrului**.



Dacă dorim să știm înălțimea unui munte sau repera unei epave de pe fundul oceanului, înseamnă că dorim să știm **altitudinea**. Altitudinea se măsoară luând ca reper **nivelul mării**, care este considerat zero (0) metri.



Vârful unui deal sau înălțimea unui munte se exprimă **printr-un număr precedat de semnul „+”**, iar un punct de pe fundul unui ocean se exprimă **printr-un număr precedat de semnul „-”**.

În cadrul firmelor comerciale se folosesc noțiunile de **credit**, **debit** și **sold**.

Exemple:

a) În luna septembrie, o firmă a încasat 10000 lei pe marfa vândută (**creditul** este +10000 lei) și a cheltuit 5000 lei (**debitul** este -5000 lei). **Soldul** acestei luni este pozitiv, adică +5000 lei, deoarece s-a încasat mai mult cu 5000 lei decât s-a cheltuit.

b) În luna octombrie, o firmă a încasat 300000 lei (**creditul** este +300000 lei) și a cheltuit 400000 lei (**debitul** este -400000 lei). **Soldul** acestei luni este negativ, adică -100000 lei, deoarece s-a încasat mai puțin cu 100000 lei decât s-a cheltuit.

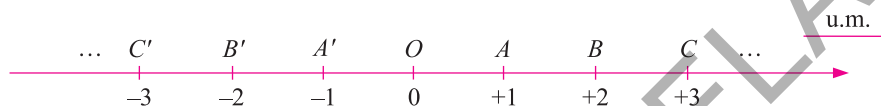
În exemplele date s-au întâlnit numere naturale precedate de semnul „+” sau de semnul „-”. Aceste numere sunt **numere întregi**.

Se numește **număr întreg** numărul natural 0 sau orice număr natural diferit de 0 precedat fie de semnul „+” (plus), fie de semnul „-” (minus).

Observații:

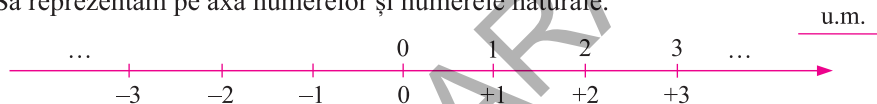
- Mulțimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$.
- Mulțimea $\{+1, +2, +3, \dots\}$ este o submulțime a mulțimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_+$ și se numește **mulțimea numerelor întregi pozitive**.

- Mulțimea $\{-1, -2, -3, \dots\}$ este o submulțime a mulțimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_-$ și se numește **mulțimea numerelor întregi negative**.
- Mulțimea numerelor întregi negative împreună cu mulțimea numerelor întregi pozitive și cu numărul natural 0 formează mulțimea numerelor întregi, adică, avem: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ și notăm $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Mulțimea $\{0; +1; +2; +3; \dots\}$ se numește **mulțimea numerelor întregi nenegative**.
- Se numește **opusul unui număr întreg diferit de zero** acel număr întreg care se obține din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0. Opusul numărului întreg +2 este numărul întreg -2, iar opusul numărului întreg -5 este numărul întreg +5.
- Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. **Axa numerelor** este o dreaptă pe care am fixat: un punct numit **origine**, un **sens pozitiv** și o **unitate de măsură**.



Astfel, fiecărui număr întreg m , pe axa numerelor, îi corespunde un punct unic P . Vom spune că **punctul P are coordonata m** sau că **m este coordonata punctului P** și vom scrie $P(m)$.

Să reprezentăm pe axa numerelor și numerele naturale.



Se observă că orice număr natural n coincide cu numărul întreg $+n$ și notăm $+n = n$. Astfel, se poate scrie $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$ și $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- **Numărul 0 nu este nici pozitiv și nici negativ.**
- **Numerele întregi negative** sunt folosite pentru a descrie: adâncimi sub nivelul mării, temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheț, datorii.

Exemple:

- În ziua de 2 februarie 2024, la ora 6 dimineața, temperatura a fost de -9°C (minus 9 grade Celsius).
- În Oceanul Atlantic s-a găsit, la adâncimea de 4375 m, o epavă. Adâncimea poate fi exprimată ca fiind -4375 m, raportată la nivelul mării.
- Pașul Predeal se află la înălțimea de 1040 m. Altitudinea Pasului Predeal, raportată la nivelul mării, poate fi exprimată ca fiind $+1040$ m.
- Dacă încasările unei societăți comerciale au fost de 5 milioane lei și plățile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este de 2 milioane lei ($+2$ milioane lei).
- Dacă încasările unei societăți comerciale au fost de 2 milioane lei și plățile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este negativ (-1 milion lei), adică societatea are o datorie de 1 milion de lei.

Priviți axa numerelor și observați că există puncte egal depărtate de origine. Punctele A și A' , punctele B și B' sunt egal depărtate de originea axei. Dacă două numere nenule sunt coordonatele a două puncte egal depărtate de punctul O (originea axei), atunci cele două numere sunt **numere opuse**.

Exemple:

a) Numerele -1 și $+1$ corespunzătoare punctelor A' și A sunt numere opuse.

b) Numerele -3 și $+3$ corespunzătoare punctelor C' și C sunt numere opuse.

În general, dacă notăm cu a un număr natural nenul, atunci:

• **opusul** numărului negativ $-a$ se notează cu $-(-a)$ și este egal cu numărul pozitiv $+a$, adică $-(-a) = +a$.

• **opusul** numărului pozitiv $+a$ se notează cu $-(+a)$ și este egal cu numărul negativ $-a$, adică $-(+a) = -a$.

Reținem!

- Un **număr întreg pozitiv** se reprezintă cu ajutorul unui număr natural nenul precedat de semnul „+”; (exemple: $+1$, $+5$, $+47$, $+2025$, ...);
- Un **număr întreg negativ** se reprezintă cu ajutorul unui număr natural nenul precedat de semnul „-”; (exemple: -3 , -29 , -2025 , ...);
- Mulțimea formată cu toate **numerele întregi pozitive** ($\mathbb{Z}_+$), toate **numerele întregi negative** ($\mathbb{Z}_-$) la care se adaugă numărul 0 , se numește **mulțimea numerelor întregi** și se notează cu $\mathbb{Z}$. Deci $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+ = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.
- Orice număr întreg pozitiv se identifică cu un număr natural nenul, adică $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Orice număr natural este număr întreg, adică $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Două puncte situate pe o axă a numerelor, simetric față de originea axei, au coordonatele **numere întregi opuse**.
- Dacă a este un număr întreg nenul, numerele întregi a și $-a$ sunt **numere opuse**. Numărul a este opusul numărului $-a$, iar numărul $-a$ este opusul numărului a . Opusul numărului întreg 0 este el însuși, adică 0 .
- Dacă a este număr pozitiv, atunci $-a$ este număr negativ, iar dacă a este număr negativ, atunci $-a$ este număr pozitiv.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:
 - a) Orice număr natural este ...
 - b) Opusul unui număr întreg diferit de zero este ...
 - c) Axă numerelor este ...
2. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:
 - a) -5 ; $+1$; 0 ; -1 ; $+2$; -4 ;
 - b) -7 ; $+4$; -3 ; 0 ; $+13$; -2 ; $+5$;
 - c) -5 ; -3 ; 4 ; -7 ; 3 ; $+5$;
 - d) 50 ; -50 ; 30 ; -20 ; $+20$; 10 ; -10 ; 0 .
3. Precizați care dintre numerele de mai jos sunt naturale și care sunt întregi:
 - a) -17 ; $+3$; 0 ; $\frac{4}{2}$; -13 ; 41 ;
 - b) -3 ; 0 ; 83 ; $+15$; $+43$; -17 .
4. Care dintre incluziunile următoare este corectă: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$?
Justificați. Dați exemple.

15. Fie mulțimea $M = \{+5, -7, -4, 0, 2, -9, -1, +8, +3, 4\}$.

Precizați mulțimile următoare, enumerând elementele acestora:

- a) $A = \{x \mid x \in M, x \text{ număr întreg nenegativ}\};$ b) $B = \{x \mid x \in M, x \text{ număr par}\};$
c) $C = \{x \mid x \in M, x \text{ număr negativ impar}\};$ d) $D = \{x \mid x \in M, x \text{ număr nenul par}\}.$

16. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\}; \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, -2 \leq x < 4\}.$$

17. Reprezentați pe axa numerelor elementele mulțimilor:

- a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 4\};$
b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq -2 \text{ și } -2 \leq x < 4\};$
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7 \leq x \leq 2 \text{ și } -4 \leq x \leq -1\};$
d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -3 \text{ și } x \notin \mathbb{N}\}.$

PE Aprofundare și performanță ***

18. a) Scrieți numerele întregi negative pare mai mari decât -11 .

b) Scrieți numerele întregi negative impare cuprinse între -16 și -9 .

19. Scrieți 7 numere întregi consecutive în fiecare dintre cazurile:

- a) cel mai mic este -3 ; b) cel mai mare este $+5$;
c) exact patru dintre ele sunt nenegative.

20. Temperatura aerului la o altitudine de 2 350 m este de 7°C , iar la o altitudine de 4 350 m este de -3°C . Considerând că temperatura scade proporțional cu creșterea altitudinii, calculați câte grade ar fi la 5 150 m altitudine.

21. Se consideră punctele A, B, C, D, E și F de coordonate: $-5; +2; 1; -3; +4; -1$.

a) Luând ca unitate de măsură 1 cm, reprezentați pe o axă punctele.

b) Calculați distanța dintre punctele A și E , apoi distanța dintre punctele B și D și distanța dintre punctele E și F .

22. Se consideră punctele A și B de coordonate -5 și respectiv 3 .

a) Reprezentați pe o axă a numerelor cu originea în punctul O punctele A și B , apoi notați cu M mijlocul segmentului AB .

b) Calculați $OA + OB + AM + AB$.

23. Se consideră două puncte A și B pe o axă a numerelor, ale căror coordonate sunt $-x$ și x .

a) Dacă punctul O reprezintă originea axei și $AB + 5OB = 14$, calculați-l pe x .

b) Dacă $3AO + 5BO = 16$, calculați-l pe x .

PE-PP Supermate ****

24. Se consideră două puncte M și N .

a) Reprezentați pe o axă a numerelor punctele M și N , astfel încât distanța de la M la originea axei să fie de 3 u.m. și distanța de la originea axei la N să fie egală cu 5 u.m.

b) Scrieți coordonatele punctelor M și N .

25. Pe o axă a numerelor se consideră punctele A și B de coordonate -11 și respectiv 44 . Se parcurge distanța dintre A și B .

a) Calculați ce procent din distanță s-a parcurs în momentul trecerii prin punctul M de coordonată 22 .

b) Ce coordonată trebuie să aibă punctul M pentru ca procentul parcurs din distanță să fie de 40% ?

Unitatea: Operații cu numere întregi (1)

PE-PP

1. Adunarea numerelor întregi.

Scăderea numerelor întregi



Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se definește o operație denumită **adunarea numerelor întregi**. Această operație se definește cu ajutorul operației de adunare a numerelor naturale astfel:

Se numește **suma a două numere întregi diferite de zero** un număr întreg care este:

- **suma modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul „+”, dacă **cele două numere întregi sunt pozitive**;
- **suma modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul „-”, dacă **cele două numere întregi sunt negative**;
- **diferența modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, dacă **cele două numere întregi au semne diferite și module diferite**;
- **numărul întreg 0**, dacă cele două numere întregi **au semne diferite și module egale**.

Se definește, de asemenea, **suma oricărui număr întreg a cu numărul întreg 0 și suma numărului 0 cu orice număr întreg a ca fiind numărul întreg a .**

Operația prin care se obține suma a două numere întregi se numește adunarea numerelor întregi.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definește și **operația de scădere** astfel:

Dacă a și b sunt numere întregi, se consideră: $a - b = a + (-b)$, $a - b$ numindu-se **diferența dintre a și b** .

Deci, pentru a obține **diferența dintre numărul întreg a și numărul întreg b** , se efectuează **suma numărului întreg a cu opusul numărului întreg b** .

Reținem!

- Pentru orice două numere întregi a și b se definește numărul unic, notat $a + b$, numit **suma numerelor a și b** .
- Operația prin care fiecărei perechi de numere a și b se asociază suma acestora se numește **adunare**, iar numerele a și b sunt **termenii adunării**.
- Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a + b \geq 0$ și $a + b = |a| + |b|$.
- Dacă $a \leq 0$ și $b \leq 0$, atunci $a + b \leq 0$ și $a + b = -(|a| + |b|)$.
- Dacă $a > 0$, $b < 0$ și $|a| > |b|$, atunci $a + b > 0$ și $a + b = |a| - |b|$.
- Dacă $a > 0$, $b < 0$ și $|a| < |b|$, atunci $a + b < 0$ și $a + b = -(|b| - |a|)$.
- Semnul sumei este același cu semnul termenului care are modulul mai mare.
- Pentru oricare două numere întregi a și b se definește **diferența $a - b$** ca fiind suma dintre numărul a și opusul numărului b .
- Semnul „-” în fața unei paranteze schimbă toate semnele numerelor din paranteză.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați corect propozițiile:

- a) Suma a două numere întregi pozitive este un număr întreg
 b) Suma a două numere întregi negative este un număr întreg
 c) Suma a două numere întregi este un număr întreg sau un număr întreg
 d) Dacă suma a două numere întregi este pozitivă, atunci numerele au semnul
 sau sunt de semne cu modulul mai mare al numărului întreg
 e) Dacă suma a două numere întregi este negativă, atunci numerele au semnul
 sau sunt de semne cu modulul mai mare al numărului întreg

2. Calculați:

- a) $(+5) + (+3)$; b) $(+4) + (-2)$; c) $(-6) + (-1)$; d) $(-6) + 0$;
 e) $(-10) + (-30)$; f) $(-15) + (-5)$; g) $(+17) + (-10)$; h) $(+2) + (-1)$;
 i) $(+7) + (-7)$; j) $(-7) + (+4)$; k) $(+15) + (-10)$; l) $(-20) + (+10)$.

3. Calculați:

- a) $(+25) + (+10) + (+10)$; b) $(-32) + (-23) + (-15)$;
 c) $(+15) + (-13) + (-3)$; d) $(-92) + (+32) + (+30)$;
 e) $(-101) + (-102) + (-103) + (-104)$; f) $(-10) + (+13) + (-16) + (+19)$;
 g) $(+21) + (-22) + (-23) + (+24)$; h) $(+12) + (-11) + (+9) + (+7)$.

4. Calculați:

- a) $-9 + |-3| + 5$; b) $|+3| + (-7) + |-4|$; c) $|3 + 5| + (-10)$;
 d) $-15 + |-7 + 12|$; e) $-3 + |-4 + 8| + |-3 + 5|$; f) $-25 + |-12 + 70 - 8|$.

5. Completați tabelele:

a)	a	-17	+2	0	-2	+5	-4	+3	-5	+11	-13	+6
	$a + (-5)$											

b)	+	+1	+3	-4	+5	0	+7	-3	+8	-11	+2	-6
	+1											
	-4											
	0											
	-3											

6. Efectuați:

- a) $-31 - 0$; b) $0 - (-37)$; c) $19 - 0$; d) $0 - (+25)$;
 e) $6 - (-6)$; f) $-6 - (+6)$; g) $-6 - (-6)$; h) $6 - (+6)$;
 i) $18 - (+5)$; j) $-50 - (+17)$; k) $-200 - (-125)$; l) $-104 - (+56)$.

7. Care număr întreg este egal cu opusul său?

8. Completați propozițiile:

- a) „Dacă a și b sunt numere întregi și ..., atunci $a - c = b - c$.” Dați 3 exemple.
 b) „Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a = b, c = d$, atunci ... ” Dați 3 exemple.

9. Scădeți 23 din ambii membri ai egalității: $43 = 60 - 17$.

3. Recapitulare și sistematizare prin teste

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

❀ TESTUL 1 ❀

I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. (1,5 puncte)

(0,5p) 1. Calculând suma numerelor întregi -19 și $+15$ obțineți numărul întreg

(0,5p) 2. Dacă adunați un număr întreg cu zero obțineți

(0,5p) 3. Următorii trei termeni ai șirului $-11, -6, -1, 4$ sunt

II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (1,5 puncte)

Dacă $a = +7, b = +11, c = -17$ și $d = -3$, atunci numărul întreg

(0,5p) 1. $a + b + c + d$ este egal cu:

A. -3 ; B. -2 ; C. 2 ; D. 1 .

(0,5p) 2. $a - b + c - d$ este egal cu:

A. -24 ; B. 10 ; C. -18 ; D. -17 .

(0,5p) 3. $-a - b + |c + d|$ este egal cu:

A. $+2$; B. -2 ; C. -4 ; D. -32 .

III. Scrieți în căsuța alăturată litera A, dacă afirmația este adevărată, sau litera F, dacă afirmația este falsă. (1,5 puncte)

(0,5p) 1. Suma a două numere întregi negative este un număr pozitiv. ☐

(0,5p) 2. Numărul întreg -3 poate fi scris ca o diferență de două numere întregi pozitive. ☐

(0,5p) 3. Suma a două numere întregi de semne diferite și module egale este egală cu zero. ☐

IV. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. (1,5 puncte)

A	B
(0,5p) 1. $+83 - (-17) - -47 - 3 = \dots$	a) 18;
(0,5p) 2. $-(-29) - -9 + (-13 - 7) = \dots$	b) 30;
(0,5p) 3. $(+74) + (-24) - -15 + 22 + (-13) = \dots$	c) 0;
	d) 50.

V. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(1,5p) 1. a) Scrieți cel mai mare număr întreg mai mic decât -2024 .

b) Scrieți cel mai mic număr întreg mai mare decât -2025 .

c) Calculați valoarea absolută a numărului

$$a = 5 - [17 - (-2 + 5) + (-7 + 15)] - (+11 - 4).$$

(1,5p) 2. Calculați sumele:

a) $S_1 = (+1) + (-2) + (+3) + (-4) + (+5) + \dots + (+99) + (-100)$;

b) $S_2 = (-1) + (-2) + (-3) + (-4) + \dots + (-99) + (-100)$;

c) $S_3 = (-2) + (-4) + (-6) + (-8) + \dots + (-98) + (-100)$.

Unitatea: Operații cu numere întregi (2)

PE-PP

1. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți



Produsul a două numere întregi a și b este un număr întreg notat cu $a \cdot b$ obținut astfel:

- a) dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $a \cdot b = 0$;
- b) dacă $a > 0$ și $b > 0$ sau $a < 0$ și $b < 0$, atunci $a \cdot b = |a| \cdot |b|$;
- c) dacă $a > 0$ și $b < 0$ sau $a < 0$ și $b > 0$, atunci $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.

Numerele a și b se numesc **factorii produsului**.

Exemple:

- a) $0 \cdot (-2) = 0$; $(-7) \cdot 0 = 0$; $(+5) \cdot 0 = 0$; $0 \cdot (+3) = 0$;
- b) $(+2) \cdot (+5) = |2| \cdot |5| = 2 \cdot 5 = 10$; $(-2) \cdot (-5) = |-2| \cdot |-5| = 2 \cdot 5 = 10$;
- c) $(+2) \cdot (-5) = -|2| \cdot |5| = -2 \cdot 5 = -10$; $(-2) \cdot (+5) = -|-2| \cdot |5| = -2 \cdot 5 = -10$.

Din definiția produsului a două numere întregi rezultă următoarele **reguli de calcul**:

- 1. Oricare ar fi numărul întreg a , avem: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
- 2. Oricare ar fi numărul întreg a , avem: $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$.
- 3. (Regula semnelor) Oricare ar fi numerele întregi a și b , avem:
 $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$; $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Reținem!

- Operația prin care se obține produsul a două numere întregi se numește **înmulțire**.
- Înmulțirea numerelor întregi are următoarele proprietăți:
 - este **comutativă**, adică oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$ avem: $a \cdot b = b \cdot a$;
 - este **asociativă**, adică oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avem: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
 - este **distributivă** față de adunare și scădere, adică oricare ar fi a, b și $c \in \mathbb{Z}$ avem:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$;
 - numărul întreg 1 este **element neutru** la înmulțirea numerelor întregi, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ avem: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Observații:

Utile în aplicații sunt următoarele **proprietăți**:

- Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$.
- Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dacă $c \neq 0$ și $a \cdot c = b \cdot c$, atunci $a = b$.
- Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot d$.
- Dacă într-un produs de numere întregi numărul factorilor negativi este impar, atunci **produsul este negativ**, iar dacă numărul factorilor negativi este par, atunci **produsul este pozitiv**.
- Regula de folosire a parantezelor la numere întregi este aceeași ca cea de la numere naturale.

• La fel ca în mulțimea numerelor naturale, în mulțimea numerelor întregi, **înmulțirea este operație de ordinul al doilea**.

• Într-un șir de operații cu numere întregi, operațiile de ordinul al doilea se efectuează înaintea operațiilor de ordinul întâi.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați corect propozițiile.

- a) Produsul a două numere întregi pozitive este un număr întreg ...
 b) Produsul a două numere întregi negative este un număr întreg ...
 c) Produsul a două numere întregi de semne contrare este un număr întreg ...

2. Completați tabelul următor:

a	-15	43	104	23	-196	-34	0	-2011
b	-8	-50	-70	105	0	-86	-2010	-1
a · b								

3. Efectuați:

- a) $(-2) \cdot (-5)$; b) $(-7) \cdot (+3)$; c) $18 \cdot (-1)$;
 d) $9 \cdot (+3)$; e) $-11 \cdot (+4)$; f) $-73 \cdot (0)$;
 g) $-41 \cdot (+2)$; h) $-10 \cdot (213)$; i) $-4 \cdot (-102)$;
 j) $-33 \cdot (+10)$; k) $18 \cdot (-5)$; l) $0 \cdot (-19)$.

4. Completați tabelul:

·	-2	+5	0	-4	+3	-10	+11	-6	+10	-5
-3										
0										
+4										

5. Completați propozițiile:

- a) Produsul a două numere întregi ... este un număr întreg pozitiv.
 b) Produsul a două numere întregi ... este un număr întreg negativ.
 c) Produsul dintre un număr întreg și zero este ...
 d) Produsul a două numere întregi este zero, dacă cel puțin ...

6. Efectuați operațiile din tabel și puneți rezultatul în linia $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$, după cum rezultatul este număr natural sau întreg:

Operația	$14 \cdot (-5)$	$28 \cdot (+9)$	$(-2) \cdot 31$	$(-131) \cdot 10$	$0 \cdot (-97)$	$(-13) \cdot (-1)$	$(-7) \cdot (+1)$	$203 \cdot (-1)$
$\mathbb{N}$								
$\mathbb{Z}$								

7. Produsul a trei numere întregi este un număr negativ. Câți factori pot fi negativi?

8. Calculați în două moduri:

- a) $3 \cdot (5 - 7)$; b) $-3 \cdot (-4 + 9)$;
 c) $(-5) \cdot 6 + (-5) \cdot 10$; d) $(-6) \cdot [8 - (-3)]$;
 e) $(+2) \cdot (-4 + 6)$; f) $(-2) \cdot (+3 - 8)$;
 g) $(-7) \cdot (-1) + (-7) \cdot (-5)$; h) $(-8) \cdot [(-6) + (-4)]$.

Unitatea: Operații cu numere întregi (3)

PE-PP 1. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri



Dacă a este un număr întreg și n este un număr natural, $n \geq 2$, atunci puterea n a lui a este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$, a se numește **bază**, iar n se numește **exponent**.

Prin definiție, $a^1 = a$, iar dacă a este diferit de zero, atunci $a^0 = 1$.

Nu se definește 0^0 , se mai spune că 0^0 nu are sens.

PROPRIETĂȚI:

1. Dacă baza este un număr pozitiv, puterea este un număr pozitiv oricare ar fi exponentul.
2. Dacă baza este un număr negativ și exponentul este număr par, atunci puterea este un număr pozitiv.
3. Dacă baza este un număr negativ și exponentul este număr impar, atunci puterea este un număr negativ.

$$(+a)^n = +a^n = a^n \quad \text{și} \quad (-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{pentru } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ -a^n, & \text{pentru } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} (-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8; & (-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16; \\ -2^4 &= -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16; & (+5)^3 &= (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = 125; & (+11)^2 &= 121. \end{aligned}$$

Reținem!

Dacă a și b sunt două numere întregi, m și n sunt două numere naturale, iar operațiile care trebuie efectuate sunt definite (au sens), atunci avem:

1. Produsul a două puteri care au aceeași bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. Câtul a două puteri care au aceeași bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$.
3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
5. Puterea unui cât: $(a : b)^m = a^m : b^m$.

Exemple pentru aplicarea regulilor de calcul cu puteri:

- | | |
|--|--|
| 1. $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5;$ | $17^5 \cdot 17^{11} = 17^{5+11} = 17^{16};$ |
| $31^9 \cdot 31 = 31^{9+1} = 31^{10};$ | $(-4)^6 \cdot (-4)^3 \cdot (-4) = (-4)^{6+3+1} = (-4)^{10}.$ |
| 2. $11^5 : 11^3 = 11^{5-3} = 11^2;$ | $(-6)^8 : (-6)^4 = (-6)^{8-4} = (-6)^4.$ |
| 3. $(5^7)^2 = 5^{7 \cdot 2} = 5^{14};$ | $[(-13)^{11}]^3 = (-13)^{11 \cdot 3} = (-13)^{33};$ |
| $(+9)^4 = [(+3)^2]^4 = (+3)^{2 \cdot 4} = (+3)^8;$ | $(-4)^3 = (-2^2)^3 = -2^{2 \cdot 3} = -2^6.$ |

4. $[(-3) \cdot (-2)]^5 = (-3)^5 \cdot (-2)^5$; $[(+2) \cdot (-5)]^3 = (+2)^3 \cdot (-5)^3$;
 $[(-3) \cdot (+5)]^3 = (-3)^3 \cdot (+5)^3$; $[(+2) \cdot (+3)]^3 = (+2)^3 \cdot (+3)^3$.
 5. $[(-6) : (-3)]^3 = (-6)^3 : (-3)^3$; $[(-2) : (+1)]^7 = (-2)^7 : (+1)^7$;
 $[(+10) : (-5)]^2 = (+10)^2 : (-5)^2$; $[(+6) : (+2)]^3 = (+6)^3 : (+2)^3$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați:

- a) 1^5 ; b) $(-1)^5$; c) $(-1)^6$; d) -1^6 ; e) $(+1)^6$;
 f) $+1^6$; g) $(-1)^{100}$; h) $(-1)^{33}$; i) 1^{13} ; j) $(+1)^{33}$;
 k) -1^7 ; l) $(-1)^7$; m) $(-1)^{103}$; n) $(-1)^{88}$; o) $(+1)^{12}$.

2. Completați tabelul:

n	n^0	n^1	n^2	n^3	n^4	n^5
1						
-1						
+3						
-3						

3. Calculați:

- a) $(-2)^4$ și -2^4 ; b) $(-1)^3$ și -1^3 ; c) $(-7)^2$ și -7^2 ;
 d) $(-12)^2$ și -12^2 ; e) $(-6)^0$ și -6^0 ; f) $(+3)^3$ și $+3^3$.

4. Efectuați:

- a) 0^4 ; b) $(-15)^1$; c) $(+3)^1$; d) 0^2 ; e) 0^{18} ;
 f) $(-7)^1$; g) $(+13)^1$; h) 0^{11} ; i) $(-3)^0$; j) $(-5)^1$;
 k) $(+6)^0$; l) 0^{33} ; m) 33^0 ; n) 1^{33} ; o) 33^1 ;
 p) $(-33)^1$; r) $(-33)^0$; s) $(-1)^{11}$.

5. Efectuați:

- a) 2^3 ; b) $(-2)^3$; c) $(-2)^1$; d) 2^0 ; e) $(-2)^0$;
 f) $+2^1$; g) 3^2 ; h) $(-3)^2$; i) -3^2 , și apoi adunați rezultatele găsite.

6. a) Determinați numerele întregi a căror putere a doua este 4.

b) Determinați numerele întregi a căror putere a treia este -4.

c) Determinați numerele întregi a căror putere a treia este -8.

d) Determinați numerele întregi care la puterea n dau 1.

e) Determinați numerele întregi care la puterea n dau -1.

7. Completați căsuțele astfel încât egalitățile să fie adevărate:

- a) $(\square)^2 = +16$; b) $(\square)^3 = -27$; c) $(\square)^3 = 125$;
 d) $(\square)^1 = -7$; e) $(\square)^0 = 1$; f) $(\square)^4 = +81$.

8. Fie $a \in \mathbb{Z}^*$, m, n numere naturale. Înlocuiți spațiile punctate astfel încât următoarele propoziții să fie adevărate:

- a) $a^0 = \dots$; b) $a^1 = \dots$; c) $a^m \cdot a^n = \dots$; d) $a^{m+n} = \dots$;
 e) $a^m : a^n = \dots$; f) $a^{m-n} = \dots$; g) $(a^m)^n = \dots$; h) $a^{m \cdot n} = \dots$.

40. Se consideră expresia $E(n) = (-1)^n \cdot 2n + (-1)^{n+1} \cdot 3n$, $n \in \mathbb{N}$. Calculați suma:

$$E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(2018).$$

41. Aflați numerele întregi a și b , știind că:

$$a \cdot (1 - b) \cdot (-1)^{k(k+1)} - (b - a) \cdot (-1)^k - a \cdot (-1)^{k+1} + 1 = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Etapa județeană, Galați

42. a) Dați exemple de numere naturale $n_1, n_2, \dots, n_7$ astfel încât:

$$(-1)^{n_1} \cdot 1 + (-1)^{n_2} \cdot 2 + \dots + (-1)^{n_7} \cdot 7 = 0.$$

b) Arătați că $(-1)^{n_1} \cdot 1 + (-1)^{n_2} \cdot 2 + \dots + (-1)^{n_6} \cdot 6 \neq 0$, pentru orice numere $n_1, n_2, \dots, n_6 \in \mathbb{N}$.

c) Dați exemple de numere naturale $n_1, n_2, \dots, n_{2007}$ astfel încât:

$$(-1)^{n_1} \cdot 1 + (-1)^{n_2} \cdot 2 + \dots + (-1)^{n_{2007}} \cdot 2007 = 0.$$

Etapa județeană, Brașov

2. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor



1. Într-un șir de operații cu numere întregi se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar, și după aceea adunările și scăderile în ordinea în care apar.

2. În exercițiile de calcul cu paranteze se efectuează mai întâi calculele dintre parantezele mici (rotunde), apoi calculele dintre cele mari (pătrate) și după aceea cele dintre acolade.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

1. Calculați:

a) $-3 \cdot [1 - 3 \cdot (-3 + 2 \cdot 5)];$

b) $-5 \cdot [-1 + 2 \cdot (-7 + 3 \cdot 5) + 6];$

c) $-1 \cdot [-8 \cdot (-3 + 2 \cdot 4) + 6] - 11;$

d) $-2 \cdot [-5 - 1 \cdot (-3 + 2 \cdot 1)] - 7 \cdot (-1).$

2. Efectuați:

a) $(-7)^1;$

b) $(-7)^1 + (-7)^0;$

c) $-7^0 + (-7)^0;$

d) $1003^0;$

e) $4 + (-1)^1;$

f) $(-129)^1 - (-5)^3;$

g) $-29^0 + (-103)^0;$

h) $-2^2 + (+1)^5;$

i) $7 : 23^0;$ j) $(-2)^3 + (+3)^2;$

k) $-6^2 + (-5)^2;$

l) $(-7)^{2021} : (-7)^{2019};$

m) $[(-10)^4]^5 : (-10)^{18} - 3^4;$

n) $11^5 \cdot 11^{103} - (+11)^{108};$

o) $[(-3)^4]^{60} : (-3)^{238} + 10^2;$

p) $79^{43} : 79^{34} - 7799^0 \cdot (79^3)^3;$

r) $-13^0 + 13^1 + (-13)^1 + 1^0 + 2019^0.$

3. Calculați:

a) $(100 - 75) - [20 + (15 - 70) - (88 - 18 + 40)];$

b) $100 - \{30 + [(88 - 54) - (400 - 380)] + 60\};$

c) $22 - \{22 - [22 - (40 - 22) + (88 - 22) - (88 - 40)]\};$

d) $400 - \{[23 - (123 - 100)] - [59 + (-259 + 100)] + 10\};$

Unitatea: Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor în mulțimea numerelor întregi

PE-PP

1. Ecuații în mulțimea numerelor întregi



Fie a și b două numere întregi. Se formulează următoarea **problemă**:
Determinați numerele întregi x pentru care $ax + b = 0$.

De obicei, această problemă se formulează mai scurt astfel:

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $ax + b = 0$, unde a și $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Un număr întreg x_0 , pentru care $ax_0 + b = 0$, se numește **soluție** a ecuației.

A rezolva ecuația înseamnă **a găsi mulțimea soluțiilor ei** care se notează cu S .

Două ecuații se numesc **ecuații echivalente** dacă **au aceeași mulțime de soluții**.

1. Rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației $ax + b = 0$ ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$)

- adunăm în ambii membri ai ecuației numărul $-b$ și obținem ecuația echivalentă:

$$ax + b - b = -b, \text{ adică } ax = -b.$$

Se spune că **am separat termenul cunoscut b de termenul necunoscut ax** , prin trecerea termenului cunoscut b în partea dreaptă a egalității cu semn schimbat.

- împărțim ambii membri ai ecuației $ax = -b$ cu $a \neq 0$;
 - dacă $(-b) : a$ este numărul întreg k , atunci ecuația are soluții în mulțimea numerelor întregi și $S = \{k\}$.
 - dacă $(-b) : a$ nu este număr întreg, atunci ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor întregi, deci $S = \emptyset$.

2. Rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației $ax + b = c$ ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b, c \in \mathbb{Z}$)

- adunăm în ambii membri ai ecuației numărul $-b$ și obținem ecuația echivalentă:

$$ax + b - b = c - b, \text{ adică } ax = c - b;$$

- împărțim ambii membri ai ecuației cu $a \neq 0$ și obținem: $x = \frac{c-b}{a}$;

– dacă $\frac{c-b}{a} = k$ și k este număr întreg, ecuația are soluții în mulțimea numerelor întregi și $S = \{k\}$;

– dacă $\frac{c-b}{a}$ nu este număr întreg, atunci ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor întregi, deci $S = \emptyset$.

PE Exerciții rezolvate:

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

1. a) $3x + 9 = 0 \mid + (-9) \Leftrightarrow 3x = -9 \mid : (3) \Leftrightarrow x = -3$ și $-3 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \{-3\}$;

b) $-7x + 3 = 0 \mid + (-3) \Leftrightarrow -7x = -3 \mid : (-7) \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$ și $\frac{3}{7} \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \emptyset$.

2. a) $-2x + 7 = 11 \mid + (-7) \Leftrightarrow -2x = 4 \mid : (-2) \Leftrightarrow x = -2$ și $-2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \{-2\}$;

b) $5x - 7 = 12 \mid + 7 \Leftrightarrow 5x = 19 \mid : 5 \Leftrightarrow x = \frac{19}{5}$ și $\frac{19}{5} \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \emptyset$.

Observație: Utilizând regulile de calcul din $\mathbb{Z}$ și separarea termenilor cunoscuți de termenii necunoscuți, anumite ecuații se aduc la forma echivalentă: $ax = b$, a cărei rezolvare în mulțimea $\mathbb{Z}$ este imediată:

- prin împărțirea cu $a \neq 0$ se obține: $x = \frac{b}{a}$.

– dacă $\frac{b}{a} = k$ și k este număr întreg, atunci $S = \{k\}$;

– dacă $\frac{b}{a}$ nu este număr întreg, atunci $S = \emptyset$.

Exemplu: Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $6 = 4(x + 1) - 2(x - 2)$.

Rezolvare:

- desființăm parantezele și obținem ecuația echivalentă: $6 = 4x + 4 - 2x + 4$;
- efectuăm calculele în membrul drept, grupând convenabil termenii:
 $6 = (4x - 2x) + (4 + 4)$ și obținem: $6 = 2x + 8$;
- separăm termenul necunoscut $2x$ de termenii 6 și 8 prin trecerea lui 8 în stânga egalității cu semn schimbat: $6 - 8 = 2x$, adică $-2 = 2x$ sau $2x = -2$;
- împărțim la 2 ambii membri ai egalității și obținem: $\frac{-2}{2} = x$, adică $x = -1$ și $S = \{-1\}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

- Completați spațiile punctate:
 - A rezolva o ecuație înseamnă ...
 - Un număr întreg m este soluție a ecuației $ax + b = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dacă ...
 - Două ecuații se numesc echivalente dacă ...
- Verificați dacă -1 este soluție pentru ecuațiile:
 - $3x + 5 = 2$;
 - $-2x + 3 = 5$;
 - $-x + 3x + 5 = 3$.
- Rezolvați ecuația: $2x - 1 = -3$, în mulțimea $A = \{-3, -2, -1, 2\}$.
- Rezolvați ecuația: $-3x + 1 = -8$, în mulțimea $B = \{-1, 0, 1, 3\}$.
- Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $7x - 14 = 0$;	b) $4x + 12 = 0$;	c) $-9x + 27 = 0$;	d) $-4x - 36 = 0$;
e) $2x + 4 = -10$;	f) $10 = 7x - 4$;	g) $6 = 4x - 2$;	h) $-7 = 4x + 1$;
i) $11 = 2x + 3$;	j) $5x - 6 = 14$;	k) $5x - 1 = 9$;	l) $-4x + 1 = -15$;
m) $5x + 17 = 2$;	n) $-6x + 4 = -8$;	o) $8x + 6 = -2$;	p) $5x = 4x + 1$.
- Reprezentați fiecare dintre elementele următoarelor mulțimi, scriind elementele lor între acolade:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3x = 6\}$;	$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7x = 0\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2x = 10\}$;	$D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -x - 5 = 0\}$;

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x - 7 = 3\};$$

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3(x + 1) = 3x + 3\};$$

$$G = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7x = 5x\};$$

$$H = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2(x + 1) = 2x - 5\}.$$

7. Aflați numărul întreg a pentru care ecuația în necunoscuta x are soluția specificată:

a) $x - 3 = a$ are soluția $x = -7$;

b) $x = 7 - a$ are soluția $x = 1$;

c) $ax + 2 = -4$ are soluția $x = -3$;

d) $a : x + 5 = -1$ are soluția $x = -2$.

8. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $5x + 11 = 66$;

b) $x : (-3) = -12$;

c) $120 : x = -30$;

d) $x \cdot (-7) = 14$;

e) $35 - x = 23$;

f) $4 - 3x = -35$;

g) $5x = -30$;

h) $14 + 2x = -26$;

i) $25 + 5x = 0$;

j) $12x = -8 + 4x$;

k) $7x - 6 = x$;

l) $-6 + x = -x$.

9. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $5x - 3 = 3x + 11$;

b) $-2x + 15 = -3x + 9$;

c) $4x + 13 = 3x + 15$;

d) $-43 - 17x = -9 - 16x$.

10. Stabiliți care dintre următoarele ecuații au soluții numere întregi și, în caz afirmativ, rezolvați-le:

a) $8x + 1 = 5x - 5$;

b) $-4x + 10 = 10 - 2x$;

c) $-3x + 5 = -9x + 4x$;

d) $2(x + 1) = 6$;

e) $5(x - 1) = 2x + 7$;

f) $3(x + 2) = 2(x + 4)$;

g) $6 = 4(x + 1) - 2(x + 2)$;

h) $4 = 5(x + 1) - 6$;

i) $3(2x - 5) = 6(x - 1) - 9$.

PE Aplicare și exersare **

11. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $9(x - 2) = -63$;

b) $5(x + 3) = 2(5x - 5)$;

c) $2(4x + 1) = 2(5x - 7)$;

d) $2(-x + 5) = -8(3x + 2) + 56$;

e) $1 - 4 \cdot [-5 \cdot (x - 2)] = 21$;

f) $5(x - 2) - 7(x + 3) + 35 = 0$;

g) $(x + 3)(x - 7) = 0$;

h) $(-2x + 6)(x + 3) = 0$.

12. Stabiliți care dintre următoarele ecuații au soluții numere întregi și, în caz afirmativ, rezolvați-le:

a) $2|x| - 3 = 5$;

b) $|2x - 1| = 17$;

c) $3|x + 1| + 5 = |x + 1| + 11$;

d) $-4|2x - 1| + 2 = -|2x - 1| - 7$.

13. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $7x - 7 = 6 - 3(x + 1)$;

b) $3x - 4 = x + 2(x - 2)$;

c) $x(x + 1) = x^2 + 2x + 1$;

d) $2(2x - 5) = 4(x - 2) - 6$;

e) $5(1 - 2x) + 1 = 4(x + 3) + 8$;

f) $-10\{-2 - 2[(-4)^5 : 4^4 - 2]\} = -2x$.

14. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $|x| = 7$;

b) $|-x| = |-5|$;

c) $|x + 1| = 3$;

d) $|x - 2| = 3$;

e) $|-x + 3| = 7$;

f) $|-2x| + 1 = 15$;

g) $|2x - 3| = 11$;

h) $|-2x + 2| - 4 = 16$;

i) $14 - |-x + 4| = 8$.

15. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $2 \cdot (x + 1) = -7(x + 3) + 3(3x - 5) - 5$;

b) $-3 \cdot (3x + 1) + 14 = 3(7x - 3) - 10$;

c) $14 + 2 \cdot [3 - 2(x - 3)] : 2 = 37$;

d) $-4 - \{6 - [-3 + (-3) + (-5 - x) - 7] - 9\} = 1$;

e) $5 \cdot (7x - 1)^0 + 2(x + 1) = -7(x + 3) + 3(3x - 5) + 43$.

Capitolul

Mulțimea numerelor raționale

PP Competențe specifice și exemple de activități de învățare

1. **Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
 - 1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional
 - Identificarea unui număr rațional în situații practice sau interdisciplinare (de exemplu: temperatura corpului, înălțimea unei persoane, prețul unui produs)
 - Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, utilizând și noțiunile: opus și modul
2. **Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
 - 2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a , b și c sunt numere raționale
 - Utilizarea regulilor specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere raționale: adunare, scădere, înmulțire, împărțire (calcul ce implică maximum două operații)
 - Estimarea rezultatului unui calcul înainte de efectuarea lui (cu scopul dezvoltării abilităților de calcul mental în contexte practice, cotidiene, de exemplu: cumpărături, cantități necesare, cantități suficiente)
 - Validarea (prin probă) a soluției unei ecuații cu coeficienți numere raționale
 - Rezolvarea de ecuații utilizând regulile de calcul studiate
3. **Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
 - 3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale
 - Compararea numerelor raționale, inclusiv poziționarea numerelor pe axa numerelor
 - Ordonarea elementelor unei mulțimi finite de numere raționale
 - Utilizarea de proprietăți ale operațiilor cu numere raționale pentru optimizarea calculelor numerice
 - Utilizarea regulilor de calcul cu puteri (calcul numeric)
 - Determinarea unei necunoscute dintr-o ecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate)
4. **Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
 - 4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale
 - Formularea unor răspunsuri logice în raport cu cerințe de calcul numeric (corelații intradisciplinare; de exemplu: apartenența rezultatului unui calcul la o mulțime, estimarea rezultatului)
 - Transpunerea unei probleme într-o ecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor raționale
 - Redactarea demersului de rezolvare și validarea soluțiilor (prin probă) în cazul problemelor cu conținut practic

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale

- Analizarea unor situații practice în care se utilizează numere raționale
- Analizarea și alegerea metodei optime de efectuare a calculului numeric prin utilizarea de proprietăți ale operațiilor studiate
- Interpretarea răspunsurilor obținute prin rezolvarea de ecuații și identificarea mulțimii soluțiilor

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale

- Împărțirea unei cantități în părți direct sau invers proporționale cu mai multe numere date
- Interpretarea matematică a unei proporționalități referitoare la segmente (de exemplu, interpretarea regulilor din șirul lui Fibonacci în construcții geometrice cu segmente, pătrate și dreptunghiuri)
- Transpunerea, în limbaj matematic, a unei situații date, utilizând ecuații în contextul numerelor raționale
- Formularea de probleme cu numere raționale pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat

Unitatea: Mulțimea numerelor raționale. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare

PE-PP

1. Mulțimea numerelor raționale.

Număr rațional.



Definiție: Prin număr rațional înțelegem orice pereche de numere întregi (a, b) , unde $b \neq 0$, scrisă sub formă de fracție $\frac{a}{b}$.

Exemple: $\frac{1}{2}, \frac{4}{17}, \frac{11}{35}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{-19}, \frac{-31}{-69}$ sunt numere raționale.

Observații:

- **Mulțimea numerelor raționale** se notează cu $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.
- **Numerele întregi sunt numere raționale.** În particular, **numerele naturale sunt numere raționale.** Într-adevăr, dacă a este număr întreg (în particular număr natural), atunci $a = a : 1 = \frac{a}{1}$ și $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.

Prin urmare, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

În general,

- **numărul rațional pozitiv** scris ca fracție zecimală $a, a_1a_2...a_n$, unde $a \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt cifre, are **partea întreagă** numărul a și **partea fracționară** $0, a_1a_2...a_n$.
 - **numărul rațional negativ** scris ca fracție zecimală $-a, a_1a_2...a_n$, unde $a \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt cifre, are **partea întreagă** $-(a + 1)$ și **partea fracționară** $1 - 0, a_1a_2...a_n$.
- Exemple:** a) $[1,17] = 1$ și $\{1,17\} = 0,17$; b) $[-1,17] = -2$ și $\{-1,17\} = 1 - 0,17 = 0,83$.

Reținem!

• O pereche de numere întregi (a, b) , cu $b \neq 0$, scrisă sub formă de fracție $\frac{a}{b}$ este un număr rațional.

- Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.
- Două numere raționale, $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, sunt egale, prin definiție, dacă $a \cdot d = b \cdot c$ și notăm:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$
- Numerele raționale $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$ și $-\frac{a}{b}$ sunt egale și $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.
- Orice număr rațional se poate scrie sub forma $\frac{a}{b}$ sau $-\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale și b nenul.
- Orice număr natural este număr întreg și orice număr întreg este număr rațional, adică $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Orice număr rațional se poate scrie sub formă de **fracție zecimală finită** sau sub formă de **fracție zecimală infinită periodică** (simplă sau mixtă).
- Orice fracție zecimală finită reprezintă un număr rațional.
- Orice fracție zecimală infinită periodică (simplă sau mixtă) care are perioada diferită de 9, reprezintă un număr rațional.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Verificați care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate:

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|---|------------------------------------|
| a) $-1 \in \mathbb{Q}$; | b) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Q}$; | c) $-0,1(3) \notin \mathbb{Q}$; | d) $-\frac{8}{2} \in \mathbb{Z}$; |
| e) $1,(2) \notin \mathbb{Z}$; | f) $-\frac{2}{3} \in \mathbb{N}$; | g) $-7 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; | h) $+24 \notin \mathbb{Q}$. |

2. Se consideră mulțimile: $A = \{-1, 2, -3\}$ și $B = \{-2, 5\}$. Scrieți elementele mulțimii

$$C = \left\{ x = \frac{a}{b} \mid a \in A \text{ și } b \in B \right\}.$$

13. Scrieți sub formă de fracție ordinară, următoarele numere raționale:

- a) $0,1(3)$; b) $-2,2(3)$; c) $0,3(24)$; d) $-0,12(3)$; e) $8,2(74)$; f) $-0,08(3)$.

14. Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Pentru propozițiile false dați câte un contraexemplu:

- a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$; b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} = \mathbb{N}$; d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

PE Aplicare și exersare **

15. Scrieți partea întreagă și partea fracționară a fiecăruia dintre numerele:

- a) $2,15$; b) $-3,81$; c) $\frac{14}{-2}$; d) $-0,2$; e) $3\frac{1}{4}$; f) $0,7$.

16. Scrieți partea întreagă și partea fracționară a fiecăruia dintre numerele:

- a) $-\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{2}$; c) $1,3(6)$; d) $2,1(6)$; e) $-0,5$; f) $-2,(3)$.

17. Scrieți numerele raționale a pentru care:

- a) $[a] = 2$; $\{a\} = 0,3$; b) $[a] = -3$; $\{a\} = 0,7$;
c) $[a] = -1$; $\{a\} = 0,4$; d) $[a] = 0$; $\{a\} = 0,1$.

18. Scrieți câte trei reprezentanți ai numerelor raționale:

- a) $-0,6$; b) $-\frac{1}{3}$; c) 1 ; d) $-0,1(3)$; e) $2,05$; f) $\frac{-7}{3}$.

19. Se consideră numerele raționale: $-\frac{1}{3}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{17}{11}$; $-\frac{25}{6}$.

- a) Scrieți numerele sub formă de fracție zecimală.
b) Scrieți partea întreagă și partea fracționară a numerelor.

PE Aprofundare și performanță ***

20. Determinați valorile numărului întreg x pentru care:

- a) $\frac{10}{x} \in \mathbb{N}$; b) $-\frac{15}{x} \in \mathbb{N}$; c) $\frac{21}{x+1} \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{3}{7-2x} \in \mathbb{Z}$.

21. Demonstrați că numerele naturale a și b sunt prime între ele, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$:

- a) $a = 7n + 11$ și $b = 2n + 3$; b) $a = 4n + 7$ și $b = 5n + 9$.

22. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele fracții sunt ireductibile:

- a) $\frac{2n+5}{3n+8}$; b) $\frac{7n+12}{3n+5}$; c) $\frac{2n+3}{5n+7}$.

23. Verificați dacă fracțiile următoare sunt ireductibile:

- a) $\frac{2^{2019} \cdot 5^{2018} + 1}{2^{2018} \cdot 5^{2019} + 1}$; b) $\frac{n^2 + 5n}{n^2 + 2 + n}$.

24. Se consideră numărul rațional $\frac{37}{66}$.

- a) Scrieți fracția zecimală corespunzătoare.
b) Scrieți a 2019-a zecimală a acestei fracții.
c) Calculați suma primelor 100 de zecimale ale fracției.

Unitatea: Operații cu numere raționale

PE-PP

1. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți



Adunarea numerelor raționale este operația prin care oricărei perechi de numere raționale a și b , i se asociază numărul rațional notat $a + b$.

Observații:

- Numărul rațional $a + b$ se numește **suma numerelor** a și b .
- Numerele a și b sunt termenii sumei $a + b$.
- Termenii unei sume pot fi reprezentați prin fracții ordinare sau fracții zecimale.

Suma a două numere raționale diferite de zero este:

- **suma modulelor celor două numere raționale** precedată de semnul „+”, dacă **cele două numere raționale sunt pozitive**;
- **suma modulelor celor două numere raționale** precedată de semnul „-”, dacă **cele două numere raționale sunt negative**;
- **diferența modulelor celor două numere raționale** precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, dacă **cele două numere raționale au semne diferite și module diferite**;
- **numărul întreg 0**, dacă **cele două numere raționale au semne diferite și module egale**.

Se definește, de asemenea, **suma oricărui număr rațional a cu numărul rațional 0 și suma numărului rațional 0 cu orice număr rațional a ca fiind numărul rațional a .**

Scăderea numerelor raționale este operația prin care oricărei perechi de numere raționale a și b i se asociază numărul rațional notat $a - b$.

Observații:

- Numărul rațional $a - b$ se numește **diferența numerelor** a și b .
- Diferența a două numere raționale a și b se definește ca **suma dintre numărul rațional a și opusul numărului rațional b** , adică:

$$a - b = a + (-b).$$

- Deoarece $-(-b) = b$, avem că $a - (-b) = a + b$, pentru orice numere raționale a și b ;
- În mulțimea numerelor raționale, orice diferență este posibilă.

Deoarece operațiile de adunare și scădere a numerelor raționale se reduc la operații cu numere întregi, **proprietățile adunării numerelor raționale** sunt aceleași cu proprietățile adunării numerelor întregi:

- adunarea numerelor raționale este **comutativă**: $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele raționale a și b ;
- adunarea numerelor raționale este **asociativă**: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele raționale a , b și c ;
- numărul rațional 0 este **element neutru** la adunarea numerelor raționale: $a + 0 = 0 + a$, oricare ar fi numărul rațional a ;
- orice număr rațional a are un **opus** notat $-a$, astfel încât: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Observații:

- Opusul numărului rațional $-a$ este numărul rațional $-(-a) = a$.
- Definiția opusului unui număr rațional, a diferenței a două numere raționale și proprietatea de asociativitate permit simplificarea scrierii prin eliminarea unor paranteze:
 - a) $-(-a) = a$;
 - b) $a - b = a + (-b)$;
 - c) $a + (b + c) = a + b + c$;
 - d) $(a + b) + c = a + b + c$.
- Dacă într-un exercițiu, o paranteză este precedată de semnul „+” se renunță la paranteză prin scrierea termenilor din interiorul parantezei cu semnele lor.
- Dacă într-un exercițiu, o paranteză este precedată de semnul „-” se renunță la paranteză prin scrierea termenilor din interiorul parantezei cu semne schimbate.
- Utile în calcule mai sunt:
 - a) **adunarea unui termen la o egalitate** „dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$, oricare ar fi a, b și c numere raționale”;
 - b) **reducerea unui termen dintr-o egalitate** „dacă $a + c = b + c$, atunci $a = b$, oricare ar fi a, b și c numere raționale”;
 - c) **adunarea a două egalități** „dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$, oricare ar fi a, b, c și d numere raționale”.
- La fel ca și în mulțimea numerelor întregi, în mulțimea numerelor raționale, adunarea și scăderea sunt operații de ordinul întâi.

Reținem!

- **Adunarea numerelor raționale** se definește pe baza adunării numerelor raționale pozitive și a adunării numerelor întregi.
- Operația de adunare a numerelor raționale păstrează **proprietățile adunării numerelor întregi**.
- În mulțimea numerelor raționale, orice diferență este posibilă.

● ● ● **activități de învățare** ● ● ●**PE Înțelegere *****1.** Efectuați calculele:

a) $\frac{2}{7} + \frac{5}{7}$;

b) $\frac{3}{11} + \frac{6}{11} + \frac{2}{11}$;

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$;

d) $\frac{8}{13} - \frac{9}{13} + \frac{1}{13}$;

e) $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} - \frac{5}{12}$;

f) $\frac{1}{12} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4}$.

2. Calculați:

a) $17,2 + 1,56 - 14,4$;

b) $4,8 - 1,3 + 15,9$;

c) $1,7 - 2, (3) - 0, (6)$;

d) $\frac{1}{3} - 2,5 + 1,1(6)$;

e) $3 - 1, (3) + \frac{1}{6}$;

f) $-2, (3) + \frac{16}{3} - 6, (6)$.

3. Efectuați:

a) $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$;

b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{15} + \frac{2}{3}$;

c) $-\frac{1}{2} + \frac{7}{3} - \frac{5}{6}$;

d) $\frac{5}{8} - \frac{1}{3} + \frac{7}{6}$;

e) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$;

f) $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} - \frac{17}{12}$.

21. Verificați dacă:

a) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$; b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$; c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4}$;
 d) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{50 \cdot 51} + \frac{1}{51 \cdot 52} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{100}$.

22. Se consideră n un număr natural nenul și k un număr natural. Calculați:

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$.

Rețineți rezultatul.

23. Folosind rezultatul de la exercițiul precedent calculați:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$; b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2029 \cdot 2030}$.

24. Calculați:

a) $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{97 \cdot 100}$; b) $\frac{11}{1 \cdot 12} + \frac{11}{12 \cdot 23} + \frac{11}{23 \cdot 34} + \dots + \frac{11}{89 \cdot 100}$.

25. Se consideră numerele: $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \dots + \frac{99}{2}$ și $y = \frac{50}{2}$. Calculați $x - y$.

26. Efectuați:

a) $\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{100}{99}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99}\right)$;
 b) $\left(\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{97 \cdot 99}\right) - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99}\right)$.

PE-PP Supermate ****

27. Se consideră suma:

$$S = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \dots + \frac{1}{8827}.$$

Scrieți divizorii improprii ai numărului $97S$.

28. Calculați:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$; b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

29. Se consideră suma $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați:

a) $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$; b) $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{10}}$; c) $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{2030}}$.

30. Se consideră sumele $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$ și $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-1}{n}$, unde n este număr natural nenul.

a) Calculați $S_1 + S_2$.

b) Determinați cel mai mic număr natural n , de trei cifre distincte, pentru care $S_1 + S_2$ se divide la 4.

c) Determinați suma tuturor numerelor naturale n , de cel mult trei cifre, pentru care $S_1 + S_2$ se divide la 4.

Unitatea: Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a, b, c sunt numere raționale. Probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip

PE-PP 1. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a, b, c sunt numere raționale



O ecuație în mulțimea numerelor raționale are forma generală $a \cdot x + b = c$, unde a și b sunt numere raționale și a este diferit de zero.

Numărul rațional x este **necunoscuta** sau **variabila ecuației**, a este **coeficientul necunoscutei**, iar b și c sunt termeni liberi.

Un număr rațional x_0 pentru care propoziția $a \cdot x_0 + b = c$ este adevărată se numește **soluția ecuației**.

A rezolva o ecuație înseamnă **a determina toate soluțiile acesteia**.

Mulțimea soluțiilor unei ecuații se notează cu S .

Dacă o ecuație nu are soluție, se notează $S = \emptyset$.

Observație: În practică ecuația $a \cdot x + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale poate avea una din formele:

a) $x + a = b$;

b) $x \cdot a = b$;

c) $x : a = b$.

Pentru a rezolva în mulțimea numerelor raționale ecuația $a \cdot x + b = c$, procedăm astfel:

– punem în evidență termenul care conține necunoscuta: $a \cdot x = c - b$;

– calculăm diferența:

$$c - b = d;$$

– rescriem ecuația:

$$a \cdot x = d;$$

– punem în evidență factorul x :

$$x = d : a;$$

– mulțimea soluțiilor ecuației este:

$$S = \left\{ \frac{d}{a} \right\}.$$

Exemplu: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{3} - 0,3$.

Efectuăm calculele: $\frac{7}{3} - 0,3 = \frac{7}{3} - \frac{3}{10} = \frac{70-9}{30} = \frac{61}{30}$. Rezultă: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{61}{30}$.

În acest produs, punem în evidență factorul x : $x = \frac{61}{30} : \frac{1}{2}$.

Efectuăm calculul: $\frac{61}{30} : \frac{1}{2} = \frac{61}{30} \cdot 2 = \frac{61}{15} = 4,0(6)$.

Rezultă $x = 4,0(6)$, ceea ce arată că $4,0(6)$ este soluția ecuației și că ecuația nu mai are alte soluții. Notând cu S mulțimea soluțiilor ecuației, rezultă $S = \{4,0(6)\}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Scrieți ecuația $ax + b = 0$, pentru:

a) $a = -2, b = 3$;

b) $a = -1, b = 0, (6)$;

c) $a = -1,2, b = 2,1(3)$.

2. Verificați dacă $a = -\frac{2}{3}$ este soluție pentru ecuațiile:

a) $3x - 2 = 0$;

b) $-3x - 2 = 0$;

c) $3x + 2 = 0$;

d) $-3x + 2 = 0$.

3. Se consideră mulțimea $M = \{-1; 5; 1, (3); -1, (6)\}$ și ecuația $\frac{-3}{5}x + 1 = 0$.

a) Rezolvați ecuația în mulțimea M .

b) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor raționale.

4. Arătați că numărul indicat este soluție a ecuației:

a) $10 \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x - 4 : \frac{9}{2} = 4 - \frac{4}{3} ; \frac{1}{3}$;

b) $12 \frac{1}{3} \cdot x \frac{1}{4} = 26 \frac{1}{2} + 5 \frac{1}{2} : 4 \frac{2}{5} ; 2$;

c) $x + \left(2,1 + \frac{1}{2}\right) \cdot x - 0,4 = 3,92; 1,2$.

5. Arătați că numerele indicate sunt soluții ale ecuației:

a) $x^2 - 0, (3) \cdot x = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{2}{15}$;

$0, (3)$ și $\frac{2}{5}$;

b) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \left[\frac{8}{15} - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)x + x^2 \right] = 0$;

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ și $\frac{4}{5}$.

6. Alegeți la întâmplare trei numere raționale pozitive și verificați dacă ele sunt soluții ale

ecuației: $\frac{1}{2} \left(x + \frac{13}{5}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0,4 = x \cdot 0,2 + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : \frac{6}{5}$.

7. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$;

b) $\frac{3}{7} + x = \frac{4}{7}$;

c) $\frac{3}{7} - \frac{2}{35} = x$;

d) $2\frac{1}{5} + x = 3\frac{1}{7}$;

e) $7\frac{1}{3} - x = 3\frac{1}{7}$;

f) $\frac{5}{12} = \frac{26}{15} - x - \frac{19}{60}$;

g) $x - \frac{8}{3} = \frac{1}{24}$.

8. Rezolvați ecuațiile:

a) $4 \cdot x = 8$;

b) $4 \cdot x = 2$;

c) $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{9}$;

d) $\frac{5}{7} \cdot x = 1$;

e) $\frac{7}{5} : x = 1$;

f) $\frac{1}{4} : x = \frac{3}{4}$;

g) $\frac{1}{4} : x = 3$;

h) $\frac{1}{2} \cdot x = 2$.

9. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{5}{7} : \square = 10$;

b) $\square : \frac{1}{15} = \frac{3}{11}$;

c) $17\frac{1}{2} : \square = 3\frac{1}{2}$;

d) $4\frac{1}{11} : \square = 1\frac{4}{11}$;

e) $\square : 14 = 5\frac{1}{7}$;

f) $\frac{226}{125} : \square = \frac{339}{125}$.

Geometrie

Capitolul Triunghiul

PP Competențe specifice și exemple de activități de învățare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- 1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi
- Recunoașterea unor triunghiuri isoscele/echilaterale/ascuțitunghice/dreptunghice/obtusunghice în configurații geometrice date
 - Recunoașterea elementelor caracteristice triunghiurilor în desene, machete, mediul înconjurător etc.
 - Descrierea unor caracteristici ale configurațiilor geometrice date referitoare la triunghi (prin observare, prin utilizarea instrumentelor geometrice)
 - Recunoașterea unor triunghiuri congruente într-o configurație geometrică dată

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului
- Stabilirea tipului de triunghi prin efectuarea de calcule numerice cu lungimi de segmente și măsuri de unghiuri
 - Efectuarea de calcule numerice pentru formularea de răspunsuri privind liniile importante în triunghi
 - Efectuarea de măsurători cu raportorul și rigla pentru formularea de răspunsuri privind unghiurile exterioare ale unui triunghi, inegalități între laturi/unghiuri ale unui triunghi

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice
- Stabilirea congruenței unor triunghiuri identificând criteriul de congruență potrivit
 - Utilizarea relației de congruență a triunghiurilor pentru stabilirea congruenței unor segmente sau unghiuri
 - Utilizarea proprietăților triunghiurilor isoscele/echilaterale/dreptunghice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri, proprietăți ale punctelor de pe mediatoare, bisectoare

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi
- Transcrierea în limbaj simbolic a caracteristicilor triunghiurilor conținute în figuri geometrice date

- Transcrierea, din figuri geometrice date, în limbaj simbolic a caracteristicilor liniilor importante în triunghi
- Redactarea datelor cunoscute (ipoteze) și a celor necunoscute (concluzii), în raport cu o situație dată referitoare la triunghi
- Evidențierea unor relații și proprietăți: unghi exterior unui triunghi, inegalități între laturi și relații între laturi și unghiuri ale unui triunghi etc.

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- 5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor
- Construcția unei configurații geometrice cu triunghiuri având proprietăți date, cu ajutorul instrumentelor geometrice sau al softurilor matematice
 - Analizarea setului de ipoteze ale unei probleme și elaborarea unei strategii de rezolvare prin raportarea adecvată la proprietățile studiate ale triunghiurilor
 - Analizarea și validarea veridicității unei afirmații folosind raționamente simple referitoare la triunghi
 - Analizarea validității unor enunțuri referitoare la triunghiuri rezultate prin modificarea unei ipoteze (necesar/suficient) sau prin interschimbarea unor informații din ipoteză și din concluzie

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- 6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului
- Modelarea geometrică a unei situații concrete, asociind acesteia un desen, implicând și estimări (de exemplu, un traseu acasă – școală – teren de sport, reprezentat printr-un triunghi)
 - Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie
 - Realizarea de conexiuni interdisciplinare sau practic-aplicative (de exemplu: planul înclinat, traseul de lungime minimă, reflexia)

Unitatea: Triunghiul

PE-PP

1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului



Definiție: Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C , se numește **triunghi determinat de punctele A, B, C** mulțimea formată de cele trei puncte, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC și CA (figura 1).

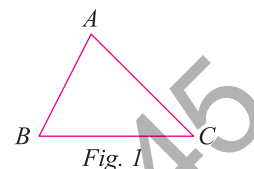


Fig. 1

Observații:

- Triunghiul este o mulțime de puncte din plan, adică o **figură geometrică**, care are trei laturi, trei vârfuri și trei unghiuri.
- Triunghiul determinat de punctele A, B, C se poate nota $\triangle ABC, \triangle ACB, \triangle BAC, \triangle BCA, \triangle CAB, \triangle CBA$ (la citirea unui triunghi literele A, B, C pot fi așezate în orice ordine dorim).
- Punctele A, B, C se numesc **vârfurile triunghiului**. Segmentele AB, BC, CA se numesc **laturile triunghiului**. Unghiurile ABC, BCA, CAB se numesc **unghiurile triunghiului**.
- În triunghiul ABC , **latura BC se opune unghiului A** și, reciproc, **unghiul A este opus laturii BC** , iar **unghiurile B și C sunt alăturate laturii BC** .
- Pentru lungimile laturilor unui triunghi ABC , se mai folosesc notațiile: $AB = c, AC = b, BC = a$.
- Dacă nu există posibilitatea unor confuzii pentru unghiurile triunghiului ABC se pot folosi și notațiile $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B, \sphericalangle BAC = \sphericalangle A, \sphericalangle ACB = \sphericalangle C$.

Definiție: Suma lungimilor laturilor unui triunghi ABC se numește **perimetrul triunghiului**, se notează cu $\mathcal{P}_{ABC}$ și

$$\mathcal{P}_{ABC} = AB + BC + CA.$$

Observație: Semisuma lungimilor laturilor unui triunghi ABC se numește **semiperimetrul triunghiului**, se notează cu p_{ABC} , unde $p_{ABC} = \frac{AB + BC + CA}{2}$.

Definiții:

- Un punct se numește **interior unui triunghi**, dacă punctul este interior fiecărui unghi al triunghiului.
- Mulțimea tuturor punctelor interioare unui triunghi, se numește **interiorul triunghiului**.
- Un punct care nu se află pe laturile triunghiului și care nu este nici interior triunghiului se numește **punct exterior triunghiului**, iar mulțimea tuturor punctelor exterioare unui triunghi formează **exteriorul triunghiului**.

Definiție: Un triunghi care are laturile de lungimi diferite se numește **triunghi scalen** sau **triunghi oarecare** (figura 2).

Observații:

- Triunghiul scalen se mai poate defini ca un triunghi în care oricare două laturi nu sunt congruente.
- În figura 2, $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm, $BC = 2,5$ cm și triunghiul ABC este scalen.

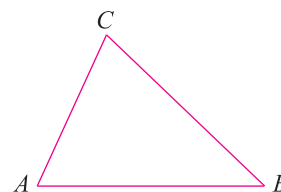


Fig. 2

Definiție: Un triunghi cu două laturi congruente se numește **triunghi isoscel**, iar cea de-a treia latură se numește **baza**¹ **triunghiului isoscel**.

Observații:

- Triunghiul ABC din figura 3 este isoscel.
- Laturile congruente sunt AB și AC ($AB = AC$)
- Latura BC este baza triunghiului isoscel ABC .

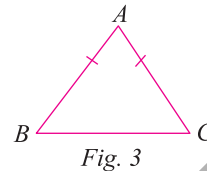


Fig. 3

Definiție: Un triunghi cu toate laturile congruente se numește **triunghi echilateral**.

Observații:

- Triunghiul ABC din figura 4 este triunghi echilateral.
- Toate laturile sunt congruente, $AB = AC = BC$.
- Un triunghi echilateral este totodată triunghi isoscel, oricare două dintre laturile lui sunt congruente ($AB = AC$, $AB = BC$, $AC = BC$).

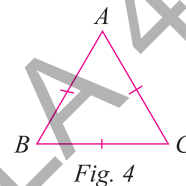


Fig. 4

Definiție: Un triunghi care are toate unghiurile ascuțite se numește **triunghi ascuțitunghic**.

Observații:

- Triunghiul ABC din figura 5 este triunghi ascuțitunghic.
- Toate unghiurile triunghiului sunt ascuțite: $A < 90^\circ$, $B < 90^\circ$, $C < 90^\circ$.

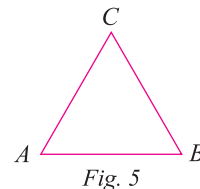


Fig. 5

Definiție: Un triunghi care are un unghi drept se numește **triunghi dreptunghic**. Laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**.

Observații:

- Triunghiul ABC din figura 6 este triunghi dreptunghic ($\angle A = 90^\circ$).
- AB și AC sunt **catete**, BC este **ipotenuză**.

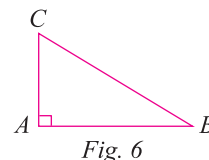


Fig. 6

Definiție: Un triunghi care are un unghi obtuz se numește **triunghi obtuzunghic**.

Observație: Triunghiul ABC din figura 7 este triunghi

obtuzunghic ($\angle A > 90^\circ$).

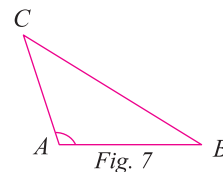


Fig. 7

Reținem!

- Trei puncte necoliniare A , B , C determină **triunghiul ABC** . Notăm $\triangle ABC$ și citim „triunghiul ABC ”.
- Mulțimea punctelor care aparțin interioarelor tuturor unghiurilor triunghiului ABC formează **interiorul triunghiului ABC** . Notăm $\text{Int}(\triangle ABC)$ și citim „interiorul triunghiului ABC ”.

¹ Foarte probabil că denumirea de „bază” provine din preferința de a desena triunghiul isoscel cu „bază în jos”. Desigur, această preferință nu impune din punct de vedere geometric nimic. De altfel, și în această carte apar frecvent triunghiuri isoscele „cu bază în sus”.

- Punctele care nu aparțin triunghiului ABC și nici interiorului acestuia formează **exteriorul triunghiului ABC** . Notăm $\text{Ext}(\triangle ABC)$ și citim „exteriorul triunghiului ABC ”.
- Dacă toate cele trei unghiuri ale unui triunghi sunt ascuțite, atunci triunghiul se numește **triunghi ascuțitunghic**.
- Dacă unul dintre unghiurile unui triunghi este unghi drept, atunci triunghiul se numește **triunghi dreptunghic**.
- Dacă unul dintre unghiurile unui triunghi este obtuz, atunci triunghiul se numește **triunghi obtuzunghic**.
- Un triunghi care are laturile de lungimi diferite două câte două se numește **triunghi oarecare** sau **triunghi scalen**.
- Un triunghi care are două laturi congruente se numește **triunghi isoscel**.
- Un triunghi care are toate cele trei laturi congruente se numește **triunghi echilateral**.
- Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numește **perimetrul triunghiului**.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

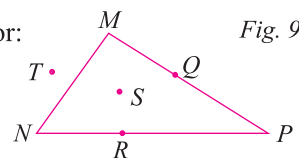
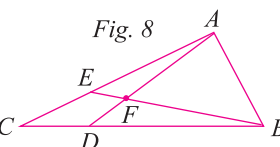
PE Înțelegere *

1. Desenați trei puncte necoliniare M, N, P și triunghiul determinat de cele trei puncte. Denumiți vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului.
2. Desenați un triunghi ABC și precizați:
 - a) latura opusă unghiului A ;
 - b) unghiul opus laturii AB ;
 - c) unghiurile alăturate laturii BC .
3. Fie patru puncte P, Q, R, H astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Câte triunghiuri determină cele patru puncte? Denumiți aceste triunghiuri.
4. Priviți figura 8. Scrieți apoi:
 - a) triunghiurile din figură care au ca latură comună pe AB ;
 - b) triunghiurile din figură care au ca unghi comun pe $\angle FBD$;
 - c) numărul triunghiurilor din figură.
5. Urmăriți figura 9 și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $Q \in \triangle MNP$;	b) $S \in \text{Int}(\triangle MNP)$;
c) $R \notin \triangle MNP$;	d) $T \in \text{Int}(\triangle MNP)$;
e) $T \notin \text{Ext}(\triangle MNP)$;	f) $S \in \text{Ext}(\triangle MNP)$.
6. Când spunem că un triunghi este isoscel? Dar echilateral? Dar dreptunghic? Dar obtuzunghic? Dar ascuțitunghic?
7. Un triunghi dreptunghic PQR are catetele PQ și QR . Precizați care este ipotenuza și care este unghiul drept.
8. Stabiliți natura triunghiului ABC știind că:

a) $AB = 4 \text{ cm}, BC = 5 \text{ cm}, AC = 6 \text{ cm}$;	b) $AB = AC = 6 \text{ cm}$ și $BC = 4 \text{ cm}$;
c) $AB = AC = BC = 6 \text{ cm}$.	
9. Stabiliți natura triunghiului LMP știind că:

a) $\angle M = 90^\circ, LM = 4 \text{ cm}, MP = 4 \text{ cm}$;	b) $\angle M = 110^\circ, LM = MP = 3 \text{ cm}$;
c) $\angle M = 45^\circ, \angle L = 65^\circ, \angle P = 70^\circ$.	



PE Aplicare și exersare **

10. Fie s unul dintre semiplanele determinate de o dreaptă d . Desenați două triunghiuri care să aibă o latură comună inclusă în d și câte un vârf în semiplanul s .

11. Desenați un triunghi MNP și fixați punctele:

- a) A și B în interiorul triunghiului; b) C și D care să aparțină triunghiului;
c) E și F în exteriorul triunghiului.

12. Calculați perimetrul unui triunghi dacă:

- a) semiperimetrul este 5,7 cm;
b) $AB = 4$ cm, $BC = \frac{3}{4} \cdot AB$ și lungimea laturii AC este media aritmetică a lungimilor

laturilor AB și BC ;

- c) $AB = 30$ mm, $BC = 1,8$ cm și $AC = 0,24$ dm.

13. Aflați lungimile laturilor unui triunghi ABC știind că:

- a) perimetrul triunghiului este de 9,6 cm, AC este cu 0,8 cm mai mare decât AB și reprezintă $\frac{4}{5}$ din BC ;

- b) perimetrul este 24 cm și lungimile laturilor sunt numere naturale pare, consecutive.

14. Se consideră un triunghi ABC și un punct D între A și B . Calculați lungimea laturii CD dacă perimetrele triunghiurilor ACD , BCD și ABC sunt egale cu 11 cm, 9 cm și, respectiv, 14 cm.

15. Stabiliți natura triunghiului MNP dacă:

- a) $\sphericalangle M = 110^\circ$; b) $MN = 4$ cm, $MP = 4$ cm și $\sphericalangle M = 90^\circ$;
c) $MN = 3,2$ cm, $NP = 0,32$ dm și $MP = 32$ mm.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Dacă $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, stabiliți dacă punctele A , B , C sunt coliniare în fiecare dintre cazurile:

- a) $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm; b) $a = 8$ cm, $b = 11$ cm, $c = 3$ cm.

17. Se consideră un triunghi ABC și un punct D situat pe latura BC . Dacă $\mathcal{P}_{\triangle ABD} = 19$ cm, $\mathcal{P}_{\triangle ACD} = 26$ cm și $AD = 8$ cm, aflați $\mathcal{P}_{\triangle ABC}$.

18. Aflați lungimile laturilor triunghiului ABC , știind că perimetrul său este de 106 cm, lungimea laturii AB este 40% din lungimea laturii AC , iar lungimea laturii AC este 80% din lungimea laturii BC .

19. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, 7, iar semiperimetrul triunghiului este egal cu 180 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului.

20. Aflați perimetrul unui triunghi isoscel, știind că lungimea fiecăreia dintre laturile congruente este cu 18 cm mai mare decât lungimea bazei, iar valoarea raportului celor două lungimi este 1,5.

PE-PP Supermate ****

21. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 26 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului, știind că una dintre ele are lungimea egală cu 8 cm.

22. Aflați perimetrul unui triunghi echilateral, știind că valoarea raportului dintre lungimea laturii și cel mai mare număr natural de două cifre divizibil cu 15 este 0,8(6).

4. Linii importante în triunghi.

Bisectoarele unghiurilor unui triunghi.

Cercul înscris în triunghi



Definiție: Bisectoarea unui unghi este o semidreaptă interioară unghiului, cu originea în vârful acestuia care formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.

Observații:

• Bisectoarea unui unghi se poate construi cu raportorul (figura a))

- se construiește unghiul AOB și se măsoară;
- se construiește semidreapta OI care formează cu laturile unghiului două unghiuri adiacente congruente.

• Bisectoarea unui unghi se poate construi cu compasul și echerul (figura b))

- construim un unghi XOY ;
- cu vârful compasului în punctul O , trasăm un arc de cerc care intersectează laturile unghiului în punctele A și B ;
- unim A cu B și plasăm echerul astfel încât o catetă să se sprijine pe segmentul AB ;
- lăsăm echerul să alunece de-a lungul segmentului AB până când cealaltă catetă trece prin punctul O și marcăm în vârful unghiului drept al echerului punctul M ;
- semidreapta OM este bisectoarea unghiului XOY .

• Bisectoarea unui unghi se poate construi cu rigla negradată și compasul (figura c))

- se consideră un unghi COD ;
- trasăm un cerc cu centrul în punctul O care intersectează semidreptele OC și OD în punctele E și F ;
- cu aceeași deschidere a compasului trasăm două arce de cerc, unul cu centrul în E și altul cu centrul în F care se intersectează într-un punct N ;
- semidreapta ON este bisectoarea unghiului COD .

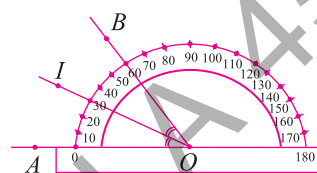


Fig. a)

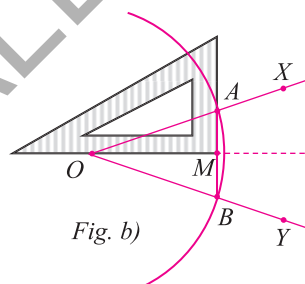


Fig. b)

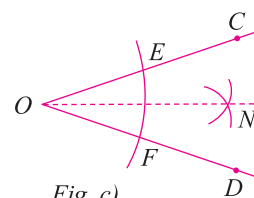
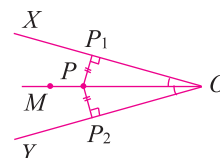


Fig. c)

TEOREMĂ: Un punct interior unui unghi aparține bisectoarei unghiului dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului.

Observații:

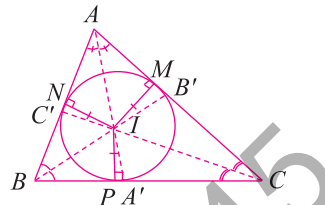
- Orice punct P de pe bisectoarea unghiului XOY este egal depărtat de laturile unghiului ($PP_1 \perp OX$ și $PP_2 \perp OY$ rezultă $PP_1 = PP_2$).
- Orice punct P , interior unghiului, care este egal depărtat de laturile unghiului, se află pe bisectoarea acestuia ($PP_1 \perp OX$, $PP_2 \perp OY$ și $PP_1 = PP_2$ rezultă P se află pe bisectoarea unghiului XOY).



TEOREMĂ: În orice triunghi, bisectoarele unghiurilor sunt concurente într-un punct I , care este centrul cercului tangent laturilor triunghiului, numit cerc înscris în triunghi.

Observații:

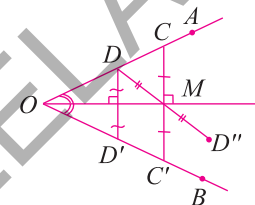
- Bisectoarele AA' , BB' , CC' sunt concurente în punctul I , care este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .
- Distanțele de la centrul cercului înscris la laturile triunghiului sunt egale cu raza cercului înscris ($IM \perp AC$, $IN \perp AB$, $IP \perp BC$ rezultă $IM = IN = IP = r$, unde r este raza cercului înscris).



TEOREMĂ: Bisectoarea oricărui unghi este axă de simetrie a unghiului.

Observații:

- **Simetricul** oricărui punct C al unghiului AOB , față de bisectoarea OM este un punct C' care aparține unghiului AOB .
- Simetricul punctului C față de punctul M este punctul C' și în acest caz simetricul punctului C față de dreapta OM coincide cu simetricul punctului C față de punctul M .
- În general simetricul punctului D față de punctul M este punctul D'' diferit de punctul D' care este simetricul punctului D față de dreapta OM .

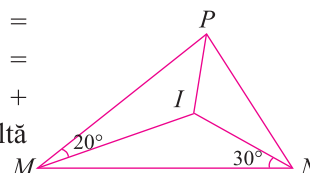


Problemă:

Se consideră un triunghi MNP și se notează cu I intersecția bisectoarelor acestuia. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului și măsura unghiului MIN , știind că $\sphericalangle MNI = 30^\circ$ și $\sphericalangle PMI = 20^\circ$.

Rezolvare:

Dacă NI este bisectoare și $\sphericalangle MNI = 30^\circ$, atunci $\sphericalangle MNP = 2(\sphericalangle MNI) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Analog, $\sphericalangle NMP = 2 \cdot (\sphericalangle PMI) = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ (MI bisectoare). Cum $\sphericalangle PMN + \sphericalangle MNP + \sphericalangle MPN = 180^\circ$, adică $40^\circ + 60^\circ + \sphericalangle MPN = 180^\circ$, rezultă $\sphericalangle MPN = 80^\circ$.



În triunghiul MIN , știm că $\sphericalangle MNI = 30^\circ$, $\sphericalangle NMI = \sphericalangle PMI = 20^\circ$ și $\sphericalangle MNI + \sphericalangle NMI + \sphericalangle MIN = 180^\circ$, adică $30^\circ + 20^\circ + \sphericalangle MIN = 180^\circ$. Obținem $\sphericalangle MIN = 130^\circ$. Deci $\sphericalangle MNP = 60^\circ$, $\sphericalangle NMP = 40^\circ$, $\sphericalangle MPN = 80^\circ$ și $\sphericalangle MIN = 120^\circ$.

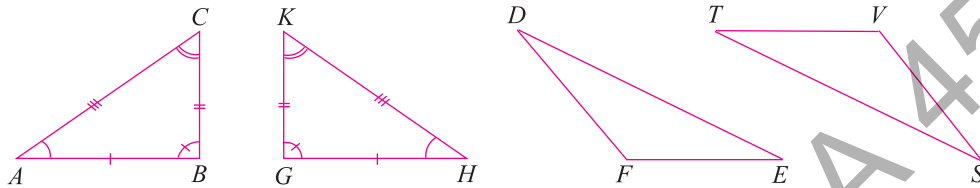
Reținem!

- Bisectoarele unghiurilor oricărui triunghi sunt **concurente**.
- Punctul de concurență a acestora se notează, de obicei, cu I și este **centrul cercului tangent laturilor triunghiului**, numit **cerc înscris în triunghi**.
- Distanțele de la punctul de concurență a bisectoarelor unghiurilor unui triunghi la laturile triunghiului sunt egale cu raza cercului înscris în triunghi.

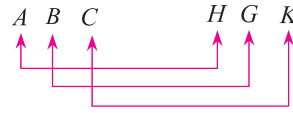
Unitatea: Congruența triunghiurilor (1)

PE-PP 1. Congruența triunghiurilor oarecare

Ne amintim că **două figuri geometrice sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid**. Triunghiul este o figură geometrică, deci două **triunghiuri care prin suprapunere coincid se numesc triunghiuri congruente**.



a) Pe o folie transparentă copiați triunghiul ABC . Suprapuneți folia peste triunghiul HGK , astfel încât vârful A să se suprapună peste vârful H , vârful B să se suprapună peste vârful G și vârful C să se suprapună peste vârful K . Astfel, prin această ordine de corespondență între vârfuri, observăm că triunghiurile coincid și $AB \equiv HG$, $BC \equiv GK$, $AC \equiv HK$, respectiv $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle H$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle G$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle K$. Prin urmare, triunghiul ABC este congruent cu triunghiul HGK și notăm $\triangle ABC \equiv \triangle HGK$. Notăția pune în evidență **ordinea de corespondență** între vârfuri, perechi de laturi congruente și perechi de unghiuri congruente. Perechile de laturi și perechile de unghiuri respectiv congruente se numesc **laturi omoloage**, respectiv **unghiuri omoloage** ale triunghiurilor congruente.



b) Triunghiurile DEF și STV sunt congruente și notăm $\triangle DEF \equiv \triangle STV$, deoarece laturile omoloage DE și ST , EF și TV , DF și SV sunt respectiv congruente ($DE \equiv ST$, $EF \equiv TV$, $DF \equiv SV$) și unghiurile omoloage $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle S$, $\sphericalangle E$ și $\sphericalangle T$, $\sphericalangle F$ și $\sphericalangle V$ sunt respectiv congruente ($\sphericalangle D \equiv \sphericalangle S$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle T$, $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle V$).

Observație: În scrierea congruenței triunghiurilor este esențială ordinea de corespondență între elemente. Astfel, dacă $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, nu rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle B'C'A'$ deoarece unghiurile omoloage în acest caz sunt altele decât cele din cazul anterior, dar rezultă că $\triangle BAC \equiv \triangle B'A'C'$, $\triangle ACB \equiv \triangle A'C'B'$, $\triangle CAB \equiv \triangle C'A'B'$, $\triangle CBA \equiv \triangle C'B'A'$, $\triangle BCA \equiv \triangle B'C'A'$.

Reținem!

- Două triunghiuri care au laturile și unghiurile respectiv congruente sunt congruente.
- Congruența triunghiurilor are următoarele proprietăți:
 - **reflexivitate:** $\triangle ABC \equiv \triangle ABC$.
 - **simetrie:** dacă $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, atunci $\triangle MNP \equiv \triangle ABC$.
 - **tranzitivitate:** dacă $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ și $\triangle MNP \equiv \triangle STR$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle STR$.

Unitatea: Congruența triunghiurilor (2)

PE-PP 1. Criteriile (cazurile) de congruență a triunghiurilor dreptunghice



Definiție: Un triunghi care are un unghi drept se numește **triunghi dreptunghic**. Latura care se opune unghiului drept se numește **ipotenuză**. Celelalte două laturi se numesc **catete**.

Figura 1 este un triunghi dreptunghic: $\angle A = 90^\circ$, BC este ipotenusa, iar AB și AC sunt catetele.

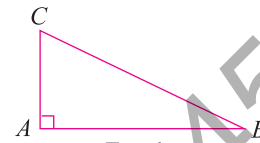


Fig. 1

Următoarele teoreme sunt denumite cazuri de congruență ale triunghiurilor dreptunghice:

Cazul CC (catetă-catetă). Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$, cu $\angle A = \angle A' = 90^\circ$, dacă $AB \equiv A'B'$ și $AC \equiv A'C'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (figura 2).

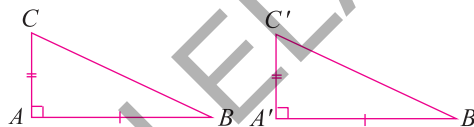


Fig. 2

Cazul CU (catetă-unghi). Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și câte un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ cu $\angle A = \angle A' = 90^\circ$, dacă $AB \equiv A'B'$ și $\angle B \equiv \angle B'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (figura 3).

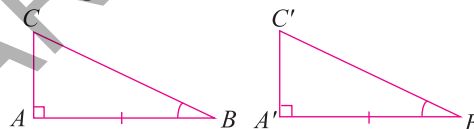


Fig. 3

Cazul IU (ipotenuză-unghi). Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenusa și câte un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ cu $\angle A = \angle A' = 90^\circ$, dacă $BC \equiv B'C'$ și $\angle C \equiv \angle C'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (figura 4).

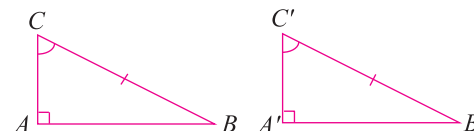


Fig. 4

Cazul IC (ipotenuză-catetă). Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenusa și o catetă respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ cu $\angle A = \angle A' = 90^\circ$, dacă $BC \equiv B'C'$ și $AB \equiv A'B'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (figura 5).

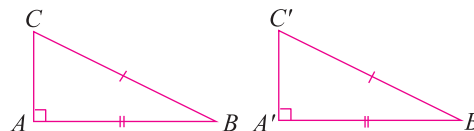


Fig. 5

Observație: Dacă două triunghiuri dreptunghice sunt congruente, atunci unghiurile lor sunt respectiv congruente și laturile lor sunt respectiv congruente. Altfel spus:

Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, atunci avem relațiile:

$\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$, $\angle C \equiv \angle C'$; $BC \equiv B'C'$, $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$.

Reținem!

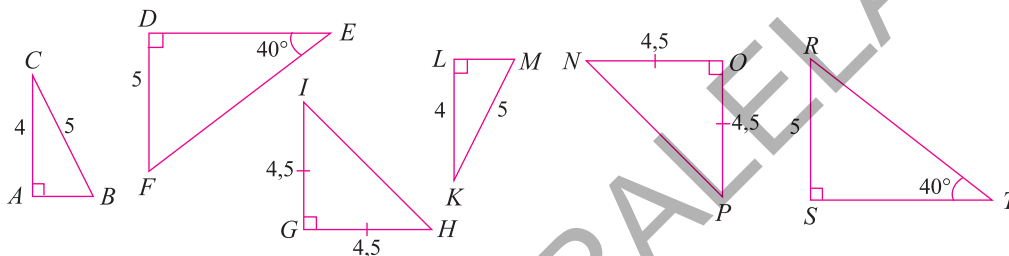
Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au:

- catetele respectiv congruente, **cazul CC (catetă-catetă)**;
- câte o catetă și câte un unghi ascuțit respectiv congruente, **cazul CU (catetă-unghi)**;
- ipotenuza și câte un unghi ascuțit respectiv congruente, **cazul IU (ipotenuză-unghi)**;
- ipotenuza și câte o catetă respectiv congruente, **cazul IC (ipotenuză-catetă)**.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Studiați triunghiurile dreptunghice de mai jos și precizați care sunt congruente și care este cazul de congruență în fiecare caz în parte.



2. Construiți un triunghi dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$, știind că:

- $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm;
- $AB = 5$ cm și $\angle B = 30^\circ$;
- $AB = 4$ cm și $BC = 6$ cm;
- $BC = 6$ cm și $\angle C = 60^\circ$.

3. Fie un triunghi dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$. Pe dreapta AB se consideră un punct D , astfel încât A să fie mijlocul lui BD . Demonstrați că $CD \equiv CB$.

4. Se consideră punctele coliniare $A - O - B$ și $C - O - D$. Știind că $\angle ACO = \angle DBO = 90^\circ$ și $AO \equiv DO$, demonstrați că triunghiul BOC este isoscel.

5. Se notează cu $d(M, AB)$ distanța de la punctul M la dreapta AB , adică lungimea segmentului determinat de punctul M și piciorul perpendicularei din M pe AB . Dacă M este un punct oarecare pe bisectoarea unui unghi xOy , demonstrați că $d(M, Ox) = d(M, Oy)$.

6. Fie un unghi xOy și M un punct ce aparține interiorului unghiului. Demonstrați că, dacă $d(M, Ox) = d(M, Oy)$, atunci OM este bisectoarea unghiului.

7. Se consideră un triunghi ABC . Demonstrați că dacă $d(B, AC) = d(C, AB)$, atunci $AB \equiv AC$.

8. Se consideră un triunghi MNP . Demonstrați că, dacă $d(N, MP) = d(P, MN)$, atunci $\angle MNP = \angle MPN$.

9. Se consideră triunghiurile isoscele ABC și $A'B'C'$, cu bazele BC , respectiv $B'C'$. Dacă $\angle ABC = \angle A'B'C'$ și $d(A, BC) = d(A', B'C')$, demonstrați că cele două triunghiuri sunt congruente.

10. În triunghiul MNP se construiește $MQ \perp NP$, punctul Q se află pe segmentul NP . Dacă $NQ \equiv PQ$, demonstrați că $MN \equiv MP$.

Test de autoevaluare

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

I. Completați pe fișa de evaluare spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) 1. Punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor unui triunghi se numește

(0,5p) 2. Punctele ce aparțin bisectoarei unui unghi au proprietatea

(0,5p) 3. Dacă punctul A este simetricul punctului B față de dreapta d , atunci dreapta d este

(0,5p) 4. Se consideră triunghiul ABC al cărui perimetru este egal cu 24 cm. Dacă $BC = 6$ cm și vârful A al triunghiului este situat pe mediatoarea laturii BC , atunci lungimea segmentului AB este egală cu cm.

II. Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect, știind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) 1. Fie M un punct pe mediatoarea segmentului AB . Dacă punctul M nu se află pe segmentul AB și $MA < AB$, atunci triunghiul MAB este:

A. dreptunghic; B. echilateral; C. scalen; D. isoscel.

(0,5p) 2. Punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor triunghiului reprezintă:

A. centrul cercului circumscris; B. centrul cercului înscris;
C. centrul de greutate; D. ortocentrul triunghiului.

(0,5p) 3. Se consideră un unghi O și OA bisectoarea acestuia. Perpendiculara în punctul A pe bisectoarea OA intersectează laturile unghiului în punctele B și C . Dacă $AB = 6$ cm și $CO = 10$ cm, atunci perimetrul triunghiului OBC este egal cu:

A. 26 cm; B. 32 cm; C. 22 cm; D. 34 cm.

(0,5p) 4. Se consideră un triunghi ABC cu $\angle A = 90^\circ$. Bisectoarele unghiurilor B și C se întâlnesc în punctul I . Măsura unghiului BAI este egală cu:

A. 15° ; B. 30° ; C. 45° ; D. 60° .

III. Uniți prin săgeți fiecare enunț, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

Se consideră unghiul ascuțit AOB și OM bisectoarea acestuia. Se iau punctele P aparține semidreptei OA și Q aparține semidreptei OB . Ce caz de congruență folosim dacă dorim să demonstrăm că $\triangle MOP \equiv \triangle MOQ$ în fiecare din cazurile:

(0,5p) a) $\angle OMP \equiv \angle OMQ$...

1) LUL;

(0,5p) b) $PO \equiv QO$...

2) CC;

(0,5p) c) M aparține segmentului PQ și $PQ \perp OM$...

3) IU;

(0,5p) d) $MP \perp OA$ și $MQ \perp OB$...

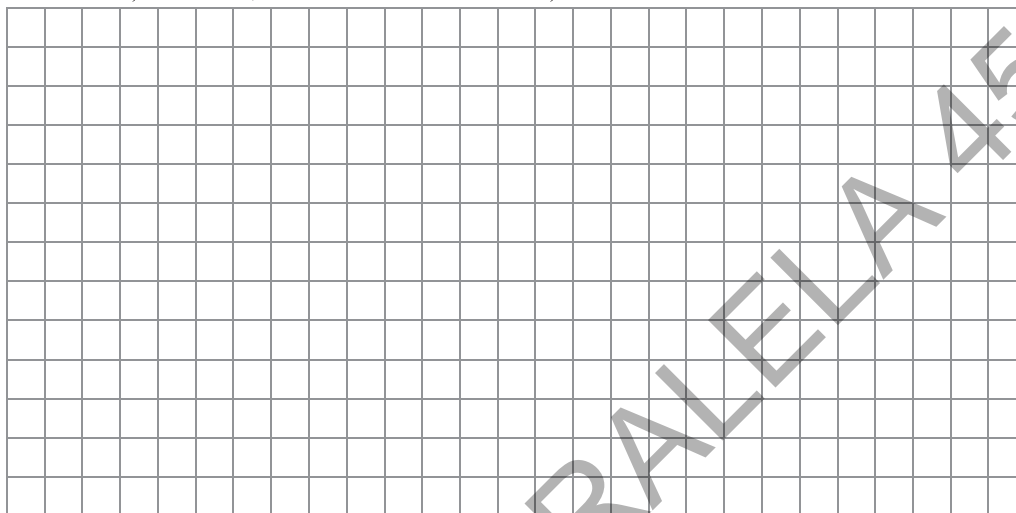
4) ULU;

5) CU.

La problemele IV și V scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

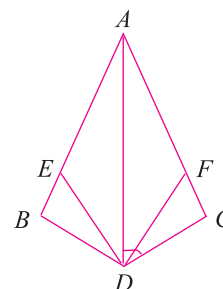
(2p) **IV.** Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = AC$ și $\angle A > 90^\circ$. Mediatoarea laturii AB intersectează latura BC în D , mediatoarea laturii AC intersectează latura BC în E și se notează cu F centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Demonstrați că:

- a) $BD \equiv CE$; b) $AE \equiv AD$;
c) $AF \perp BC$; d) $\angle DAF \equiv \angle EAF$.



(1p) **V.** În figura alăturată se știe că $\angle BDA \equiv \angle CDA$, $DE \equiv DF$ și semidreptele DE , respectiv DF sunt bisectoarele unghiurilor BDA și CDA .

- a) Demonstrați că $\angle BAD \equiv \angle CAD$.
b) Demonstrați că $BE \equiv CF$.



Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

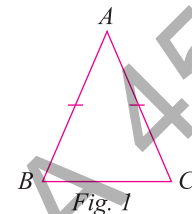
Unitatea: Triunghiuri particulare

PE-PP 1. Proprietățile triunghiului isoscel



Ne amintim că un triunghi cu două laturi congruente este un **triunghi isoscel**.

Dacă triunghiul ABC (figura 1) este isoscel cu laturile AB și AC congruente ($AB = AC$), atunci **BC este baza triunghiului isoscel și unghiul A este unghi opus bazei BC , iar unghiurile B și C sunt unghiuri alăturate bazei BC .**



Problema 1:

Demonstrați că:

- dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente;
- dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel, având ca bază latura determinată de vârfurile celor două unghiuri.

Demonstrație:

- Fie ABC (figura 2) triunghi isoscel ($AB = AC$).

Considerăm triunghiurile ABC și ACB .

$$\text{Din } \begin{cases} \bullet AB = AC \text{ (ipoteză)} \\ \bullet BC = CB \text{ (latură comună)} \text{ și cazul de congruență LLL rezultă} \\ \bullet AC = AB \text{ (ipoteză)} \end{cases}$$

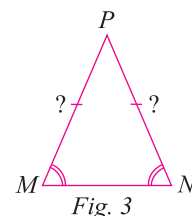
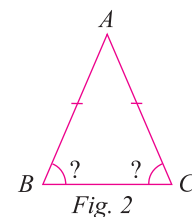
$\triangle ABC \equiv \triangle ACB$. Conform definiției triunghiurilor congruente rezultă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, respectiv $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAB$. Deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;

- Fie MNP (figura 3) un triunghi cu $\sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle PNM$.

Considerăm triunghiurile PMN și PNM .

$$\text{Din } \begin{cases} \bullet \sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle PNM \text{ (ipoteză)} \\ \bullet MN = NM \text{ (latură comună)} \text{ și cazul de congruență ULU rezultă} \\ \bullet \sphericalangle PNM \equiv \sphericalangle PMN \text{ (ipoteză)} \end{cases}$$

$\triangle PMN \equiv \triangle PNM$. Conform definiției triunghiurilor congruente rezultă $PM \equiv PN$, $PN \equiv PM$ și $\sphericalangle MPN \equiv \sphericalangle NPM$. Deci $PM = PN$.



Problema 2:

Se consideră un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$ și AM mediană.

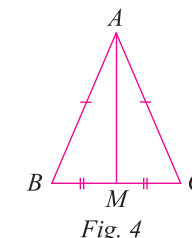
Demonstrați că triunghiurile ABM și ACM sunt congruente și deduceți că mediana AM este și înălțimea din vârful unghiului opus bazei, semidreapta AM este bisectoare a unghiului opus bazei și dreapta AM este mediatoarea bazei BC .

Demonstrație:

Considerăm triunghiurile ABM și ACM (figura 4).

$$\text{Din } \begin{cases} \bullet AB = AC \text{ (ipoteză)} \\ \bullet BM = CM \text{ (ipoteză)} \text{ și cazul de congruență LLL} \\ \bullet AM = AM \text{ (latură comună)} \end{cases}$$

rezultă $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$. Din definiția congruenței triunghiurilor rezultă $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$ (1), $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$ (2), $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC$ (3).



Din (3) și faptul că $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ rezultă $\angle AMB = \angle AMC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ și $AM \perp BC$, adică mediana AM este înălțime. Din (2) rezultă că semidreapta AM este bisectoarea unghiului opus bazei. Din $AM \perp BC$ și $BM = CM$ rezultă că dreapta AM este mediatoarea segmentului BC (vârful A al triunghiului isoscel ABC se află pe mediatoarea bazei BC).

Observație: Dreapta AM ($M \in BC$, $BM = CM$) este și axă de simetrie a triunghiului isoscel ABC .

Problema 3:

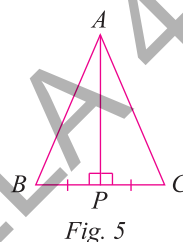
Punctul P se află pe latura BC a triunghiului ABC . Segmentul AP este mediană ($P \in BC$, $BP = CP$) și înălțime ($P \in BC$, $AP \perp BC$).

Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

Demonstrație:

Considerăm triunghiurile dreptunghice ABP și ACP (figura 5), $\angle APB = \angle APC = 90^\circ$ deoarece $AP \perp BC$.

Din $\begin{cases} \bullet BP = CP \text{ (ipoteză)} \\ \bullet AP = AP \text{ (latură comună)} \end{cases}$ și cazul de congruență CC



rezultă $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$. Din definiția congruenței triunghiurilor rezultă $\angle ABP \equiv \angle ACP$ (1), $AB \equiv AC$ (2) și $\angle BAP \equiv \angle CAP$ (3).

Din (2) rezultă că triunghiul ABC este isoscel.

Observație: Triunghiul în care o mediană este și înălțime este un triunghi isoscel.

Reținem!

- Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă unghiurile alăturate bazei sunt congruente.
- Pentru a demonstra că un triunghi este isoscel este suficient să arătăm că două dintre dreptele determinate de liniile importante corespunzătoare unei laturi coincid, iar latura respectivă este baza triunghiului isoscel.
- Dacă un triunghi este isoscel, atunci:
 - medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente;
 - înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente;
 - bisectoarele corespunzătoare unghiurilor congruente sunt congruente.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Construiți un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$, știind că:
 - a) $AB = 5$ cm și $BC = 6$ cm;
 - b) $\angle A = 60^\circ$ și $AC = 4$ cm;
 - c) $BC = 7$ cm și $\angle A = 70^\circ$.
2. Se consideră triunghiul isoscel ABC .
 - a) Dacă $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm, calculați BC .
 - b) Dacă $AB = 3$ cm și $AC = 7$ cm, calculați BC .
3. Unul dintre unghiurile unui triunghi isoscel are măsura de 40° . Calculați măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului.

1. Fie un triunghi isoscel ABC cu baza BC și D mijlocul laturii AC . Paralela prin D la AB intersectează latura BC în punctul E și bisectoarea unghiului ABC în punctul F . Demonstrați că:

- a) triunghiurile DEC și ADE sunt isoscele; b) $AE \perp BC$ și $BE \equiv EC \equiv EF$.

2. Fie două drepte paralele a și b . O dreaptă c intersectează dreapta a în punctul A și dreapta b în punctul B . Bisectoarea a două unghiuri interne și de aceeași parte a secantei c se intersectează în punctul C . Din C se construiesc perpendiculare pe a , b și c , ale căror picioare sunt H , K , M . Demonstrați că:

- a) $\triangle ABC$ este dreptunghic; b) $CH = CM = CK$; c) $AB = AH + BK$.

3. Fie un triunghi isoscel ABC cu baza BC , M mijlocul laturii BC , I piciorul perpendicularei din M pe AC și P astfel încât punctul I este pe segmentul MP și $MI = IP$. Dacă B este piciorul perpendicularei din D pe AC , demonstrați că:

- a) $\sphericalangle DPM \equiv \sphericalangle BAM$; b) $MD \perp AP$.

4. Fie un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza BC și $AB < AC$ și fie punctul D pe latura BC astfel încât $AD = AB$. Perpendiculara din B pe AD intersectează pe AD în punctul E și pe AC în punctul F . Demonstrați că:

- a) triunghiul BFC este isoscel;
b) punctul C este egal depărtat de AD și de paralela la AB dusă prin D .

5. Fie un triunghi isoscel OAB cu baza AB și D un punct astfel încât punctul O aparține segmentului AD și $OD = AO$. Paralela prin D la AB intersectează pe OB în punctul C . Demonstrați că $\triangle OAB \equiv \triangle ODC$.

6. Fie un triunghi isoscel ABC cu baza BC . Pe laturile AB și AC se construiesc triunghiurile congruente ABE și ACF , neavând puncte interioare comune cu triunghiul inițial. Fie $BF \cap CE = \{O\}$. Demonstrați că:

- a) $EF \parallel BC$;
b) A , O și mijloacele segmentelor BC , EF sunt puncte coliniare.

7. Fie un triunghi ABC , AD bisectoarea unghiului BAC ($D \in BC$), E intersecția paralelei prin B la AD cu dreapta AC și F intersecția paralelei prin C la AD cu dreapta AB . Demonstrați că $\triangle AEF \equiv \triangle ABC$.

8. Fie triunghiul ABC și D punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor ABC și ACB . Paralela prin C la BD intersectează AB în punctul E , iar paralela prin B la CD intersectează AC în punctul F . Demonstrați că $BE \equiv CF$.

9. Se consideră triunghiul ABC isoscel, cu baza BC . Fie punctele E pe segmentul AC și F pe semidreapta BA astfel încât punctul A aparține semidreptei BF și $AF \equiv AE$. Demonstrați că $EF \perp BC$.

10. Fie un triunghi isoscel ABC cu baza BC și cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Notăm cu D mijlocul segmentului AB , cu E piciorul perpendicularei din D pe BC , cu F intersecția dreptei ED cu AC și cu H intersecția bisectoarei unghiului CFE cu dreapta BC . Demonstrați că:

- a) $2AF = AC$; b) $BF \perp FC$; c) $DH \parallel AC$.

AUTOEVALUARE

Citiți cu atenție afirmațiile de mai jos și acordați un calificativ: **insuficient (I)**, **suficient (S)**, **bine (B)** sau **foarte bine (FB)** pentru a vă evalua parcursul de învățare din conținuturile studiate.

AFIRMAȚII	FB	B	S	I
1. Știți să construiți triunghiuri cunoscând cazurile de construcție LUL, ULU și LLL.				
2. Știți teorema unghiului exterior unui triunghi.				
3. Puteți să recunoașteți liniile importante într-un triunghi.				
4. Puteți să identificați triunghiuri congruente și să demonstrați congruența acestora.				
5. Știți proprietățile punctelor de pe mediatoarea unui segment.				
6. Știți să folosiți proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment în rezolvarea problemelor.				
7. Știți proprietățile punctelor de pe bisectoarea unui unghi.				
8. Știți să folosiți proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi în rezolvarea problemelor.				
9. Știți proprietățile triunghiului isoscel.				
10. Știți proprietățile triunghiului echilateral.				
11. Știți proprietățile triunghiului dreptunghic.				
12. Știți teorema lui Pitagora.				
13. Știți să aplicați teorema lui Pitagora.				
14. Știți să verificați dacă numerele din tripletul (a, b, c) sunt numere pitagoreice.				

PE-PP Recapitulare finală

I. TEME DE RECAPITULARE FINALĂ

TEMA 1: Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

1. Fie mulțimile $A = \{0, 1, 4\}$ și $B = \{0, 1, 3\}$. Calculați:
a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.
2. Determinați elementele mulțimilor:
 $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x : 5 \text{ și } x \leq 35\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 24 : x \text{ și } x < 11\}$.
3. Calculați:
a) $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 0, 3\}$; b) $\{3, 0, 1, 2\} \cap \mathbb{N}^*$; c) $\{1, 3, 7\} \setminus \{0, 5, 3, 7, 4\}$;
d) $\{2, 0, 1, 3\} \cap \{2, 1, 0, 5\}$; e) $\{4, 0, 6, 7\} \setminus \mathbb{N}^*$; f) $\{3, 0, 5, 9\} \cup \emptyset$.
4. a) Scrieți mulțimea multiplilor numărului 3 cuprinși între 31 și 49.
b) Scrieți mulțimea divizorilor numărului 75.
5. Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{c, d, e\}$.
a) Scrieți toate submulțimile mulțimii B .
b) Scrieți submulțimile nevide ale mulțimii $A \setminus B$.
6. Determinați elementele mulțimilor:
 $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 3\}$; $B = \{b \in \mathbb{N}^* \mid 0 \leq b + 1 < 5\}$;
 $C = \{c \in \mathbb{N} \mid 9 \leq c^2 \leq 36\}$; $D = \{d \in \mathbb{N} \mid 8 \leq d^3 \leq 100\}$;
 $E = \{e \in \mathbb{N} \mid 13 < e^2 - 1 \leq 99\}$; $F = \{2^f \mid f \text{ este cifră pară}\}$.
7. Se consideră mulțimile:
 $A = \{\overline{1a6b} \mid \overline{1a6b} : 5 \text{ și } (a+b) : 4\}$ și $B = \{\overline{1x6x} \mid \overline{1x6x} : 2\}$.
Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
8. Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cap B = \{c, d\}$; b) $A \cap \{e, f\} = \emptyset$;
c) $\{a, b\} \cap B \neq \emptyset$; d) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.
9. Știind că $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 3n, n \in \mathbb{N}\}$, calculați $A \cap B$.
10. Determinați mulțimile A și B , știind că îndeplinesc simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \cap B = \{2, 3\}$; c) $A \setminus B = \{1\}$.
11. Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$ și $B = \{y \mid y = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.
a) Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime. b) Calculați $A \cup B$ și $A \cap B$.
12. Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
a) $A \cap B = \{b, c\}$; b) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$;
c) mulțimile $A \setminus B$ și $B \setminus A$ au același număr de elemente.
13. Se consideră mulțimile:
 $A = \{x \mid x \text{ este divizor al lui } 100\}$; $B = \{y \mid y \text{ este multiplu al lui } 3\}$;
 $C = \{1, 11, 111, 1111, \dots\}$; $D = \{z \mid z \in \mathbb{N} \text{ și } z + 1 < 2024^{2025}\}$.
Precizați care dintre mulțimi sunt finite și care sunt infinite.

11. Unghiurile AOB , BOC și AOC sunt unghiuri în jurul punctului O . Știind că măsura unghiului AOB este de două ori mai mare decât măsura unghiului BOC și cu 40° mai mică decât măsura unghiului AOC , calculați măsurile unghiurilor AOB , BOC și AOC .

12. Fie unghiurilor AOB , BOC și COA unghiuri în jurul punctului O , astfel încât $\angle AOB \equiv \angle BOC$. Arătați că semidreapta opusă semidreptei OB este bisectoarea unghiului AOC .

13. Precizați măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente:

- a) complementare; b) suplementare.

14. Adunând o doime din măsura complementului unui unghi cu trei optimi din măsura suplementului aceluiași unghi, obținem măsura unghiului respectiv. Aflați măsura unghiului.

15. Unghiurile AOB și BOC sunt unghiuri neadiacente complementare și $\angle AOB = 40^\circ$. Fie OM bisectoarea unghiului BOC și ON , respectiv OP semidrepte opuse semidreptelor OM , respectiv OC . Aflați măsurile unghiurilor AOM , AON și PON .

16. Diferența măsurilor a două unghiuri este egală cu $20^\circ 20'$. Aflați măsurile celor două unghiuri, știind că acestea sunt:

- a) unghiuri complementare; b) unghiuri suplementare.

TEMA 6: Paralelism și perpendicularitate

1. Determinați x , astfel încât dreptele a și b din figură alăturată să fie paralele.

2. Se consideră punctele distincte M , N , P și Q și o dreaptă d astfel încât $MN \parallel d$, $NP \parallel d$ și $PQ \parallel d$. Arătați că $MQ \parallel d$.

3. În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele. Semidreptele MP și NQ sunt bisectoarele unghiurilor RMN și MNS . Arătați că $MP \parallel NQ$.

4. Analizați figura alăturată.

- a) Stabiliți dacă dreptele a și b sunt paralele.
b) Calculați-l pe x .

5. Două dreptele paralele a și b intersectate de secanta d determină opt unghiuri. Măsurile a două dintre cele opt unghiuri sunt exprimate în grade prin x° și $2x^\circ + 60^\circ$. Calculați măsurile celor opt unghiuri.

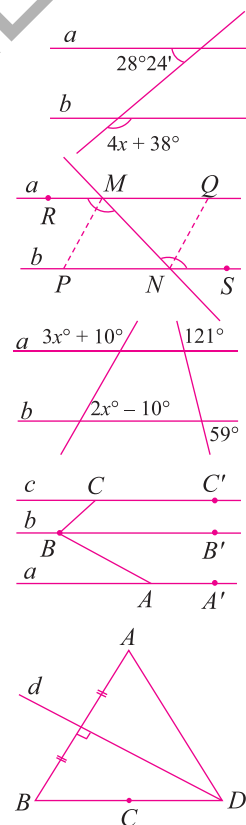
6. În figura alăturată, dreptele a , b și c sunt paralele. Calculați suma măsurilor unghiurilor $C'CB$, CBA și BAA' .

7. În figura alăturată, dreapta d este mediatoarea segmentului AB . Știind că $AD = 10 - x$ mm, $CD = x$ mm și $BC = 4$ mm, calculați lungimea segmentului CD .

8. Se consideră o dreaptă a și un punct M exterior dreptei. Construiți din punctul M perpendiculara MO pe dreapta a ($O \in a$) și o oblică MM' ($M' \in a$). Măsurați segmentele MO și MM' , iar apoi completați spațiile punctate.

a) Dintre perpendiculara și o oblică coborâte din același punct pe aceeași dreaptă lungime mai mică are

b) Dintre unghiurile formate de o dreaptă cu perpendiculara dintr-un punct pe acea dreaptă și oblica din același punct pe aceeași dreaptă, măsura mai mică are unghiul format din



13. Se știe că $ab + ac - 11 = 73$.

a) Calculați $b + c$, știind că $a = -4$.

b) Calculați a , știind că $b + c = -7$.

14. Fie $E(n) = (-1)^n$, unde $n \in \mathbb{N}$. Calculați:

a) $E(0); E(1); E(2)$;

b) $E(0) + E(1) + E(2) + \dots + E(2025)$.

15. Fie x și y numere întregi, astfel încât $x < 0 < y < 11$. Determinați numerele a și b , știind că: $a = |x - 2| - |11 - x|$ și $b = |x - y| + |y - 15| - |x - 3|$.

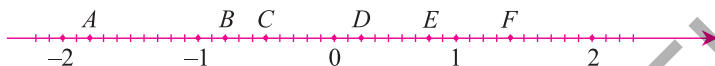
16. Se consideră numerele întregi: $(x - 1); (x - 2); (x - 3); \dots; (x - 2024)$.

a) Pentru $x = 2000$, calculați produsul numerelor.

b) Calculați produsul numerelor pentru $x = 0$ și pentru $x = 2025$. Ce observați?

TEMA 9: Mulțimea numerelor raționale

1. Studiați axa numerelor din figura de mai jos.



Scrieți coordonatele punctelor reprezentate în figură sub formă de fracție:

a) ordinară;

b) zecimală.

2. Se consideră mulțimile $A = \{-2, 0, 1\}$ și $B = \{-1, 2, -3\}$.

a) Scrieți elementele mulțimii $C = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A \text{ și } b \in B \right\}$.

b) Determinați cardinalul mulțimilor: $C \cap \mathbb{Q}_+$ și $C \cap \mathbb{Q}_-$.

3. Se consideră numerele raționale $a = -\frac{3}{4} + \left(-\frac{7}{12}\right)$ și $b = \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)$. Calculați:

a) suma dintre a și opusul numărului b ;

b) produsul dintre pătratul numărului a și inversul numărului b ;

c) diferența dintre modulul numărului b și inversul numărului a .

4. Fie numărul rațional $a = -1,37$. Scrieți:

a) partea întreagă a numărului rațional a ;

b) partea zecimală a numărului rațional a ;

c) opusul numărului rațional a ;

d) numărul întreg x pentru care $|x| < |a|$.

5. Știind că $x = \frac{1}{1+2+3+\dots+10}$ și $y = \frac{1}{1+2+3+\dots+11}$, calculați:

a) $x : y$;

b) $-11(x - y)$;

c) y^{-1} ;

d) $-22(5x - 6y)$.

6. Se consideră mulțimea $M = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{3} \leq x < 4 \right\}$. Rezolvați în mulțimea M ecuațiile:

a) $6x + 2 = 5x + 3$;

b) $3 \cdot (x + 0,5) + 4x = 7x + 1,5$;

c) $x : \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = 7,3$.

7. Știind că $a = 0,5 + 0,25 - 0,1(6)$ și $b = 0,(3) + 0,(1) - 0,8(3)$, calculați:

a) $\frac{36}{7} \cdot (a + b)$;

b) $-\frac{2}{3} \cdot a \cdot b^{-1}$;

c) $\frac{3}{7}(2a - 3b)$.

8. Calculați:

a) $\left(1\frac{7}{18} \cdot \frac{8}{75} + 1\frac{7}{8} \cdot \frac{32}{45}\right) : 2, (6)$;

b) $(0,44 + 0,06) : \left(\frac{2}{15} + \frac{3}{25}\right) \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{1}{9}$.

9. După ce a parcurs $\frac{1}{5}$ dintr-un traseu, un călător a constatat că mai are de parcurs încă

22,5 km pentru a ajunge la jumătatea drumului. Calculați:

- a) lungimea întregului traseu; b) câți kilometri mai are de parcurs.

10. Efectuați calculele:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 : 3^{-1} + 3 : \frac{30}{7} - \frac{2}{9} : \left(\frac{-4}{3}\right) - 6^{-1} + \frac{3}{5} : 0,2 - 0,7;$

b) $\frac{1}{3} - \left(\frac{-5}{9}\right) : \left(+\frac{10}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} : (+3,75) \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) + \left(\frac{-3}{14}\right) \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) : \left(-\frac{2}{27}\right)^{-1}.$

11. Din suma economisită, un elev a cheltuit în prima zi $\frac{1}{25}$, a doua zi a cheltuit $\frac{1}{3}$ din

suma rămasă, a treia zi a cheltuit $\frac{1}{4}$ din noul rest, rămânându-i pentru a patra zi suma de

180 de lei. Calculați ce sumă a avut inițial și cât a cheltuit în fiecare zi.

12. Fie numerele raționale: $a = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{2025}{2024}$ și $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024}$.

Calculați restul împărțirii numărului $a - b$ la 2024.

13. Rezolvați ecuația:

$$\frac{1}{5} \cdot \left\{ \frac{1}{5^2} \cdot \left[\frac{1}{5^3} \cdot \left(\frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} \cdot x \right) - \frac{1}{5^6} \right] - \frac{1}{5^7} \right\} - \frac{1}{5^8} = \frac{1}{5^9}.$$

14. Se consideră numărul rațional: $a = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Arătați că $0 < a < \frac{1}{2}$.

15. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \dots + \frac{x+2024}{2025} = 2024;$

b) $x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{1012}\right) = 2.$

16. Se consideră numerele raționale pozitive:

$$A = \frac{12}{48} + \frac{102}{408} + \frac{1002}{4008} + \frac{10002}{40008} \text{ și } B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2025} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2024}{2025}.$$

Calculați: $A, B, B - A, A^B, (B - 2024)^{A+1}$.

TEMA 10: Triunghiul

1. Pe un segment AB se consideră punctele distincte C și D , astfel încât $D \in CB$ și $AC = BD$. De o parte a dreptei AB se construiește triunghiul echilateral ACE , iar de cealaltă parte a dreptei AB se construiește triunghiul echilateral ADF .

a) Calculați măsurile unghiurilor EAF , BDF și ECB .

b) Demonstrați că $AD \equiv BC$.

c) Arătați că triunghiul BEF este echilateral.

2. Unghiul A al triunghiului isoscel ABC este obtuz. Bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în punctul D . Se știe că $CF \perp BD$ ($F \in BD$) și $CF \cap AB = \{E\}$.

Demonstrați că:

a) triunghiul BCE este isoscel;

b) $\angle BCD \equiv \angle BED$ și triunghiul CDE este isoscel.

II. TESTE DE EVALUARE FINALĂ

TESTUL 1

I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. (1,5 puncte)

(0,5p) 1. Valorile întregi ale lui n pentru care $\frac{n^2 + 4}{n}$ este număr întreg sunt

(0,5p) 2. Dacă $a = 2^{2026} - 2^{2025} - 2^{2024}$ și $\frac{a}{x} = \frac{4^{1011}}{0,25}$, atunci x este egal cu

(0,5p) 3. Suma măsurilor a trei unghiuri este un unghi drept. Suma complementelor celor trei unghiuri este un unghi

II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (1,5 puncte)

(0,5p) 1. Dacă numerele $-\frac{9}{5}$, $-2,2$, $-\frac{b}{10}$ și $-2,4$ sunt scrise în ordine descrescătoare, atunci b este:

A. 23; B. 20; C. -23; D. -21.

(0,5p) 2. Numerele a și b sunt invers proporționale cu 2 și 5. Dacă produsul lor este 490, atunci diferența numerelor a și b este egală cu:

A. -21; B. 21; C. 49; D. -49.

(0,5p) 3. Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri externe, de aceeași parte a secantei, cu măsurile de $5x$, respectiv 45° . Valoarea lui x este egală cu:

A. 45° ; B. 15° ; C. 9° ; D. 27° .

III. Scrieți în căsuța alăturată litera A, dacă afirmația este adevărată, sau litera F, dacă afirmația este falsă. (1,5 puncte)

(0,5p) 1. Numărul $0,(3)$ este soluție a ecuației: $x - 0,(3) = 2,(3) - 0,6x$.

☐

(0,5p) 2. Calculând 5% din 500, obținem 25.

☐

(0,5p) 3. Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{n, o, t, a\}$ este egal cu 4.

☐

IV. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător aflat în coloana B. (1,5 puncte)

În figura alăturată, dreptele AB , CD și EF sunt concurente în punctul O . Dacă măsurile unghiurilor, exprimate în grade, sunt cele din figură, atunci:

A

B

(0,5p) 1. $\angle BOD = \dots$

a) 60° ;

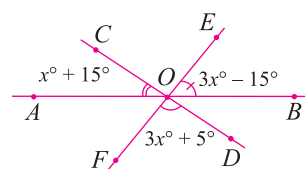
(0,5p) 2. $\angle AOF = \dots$

b) 55° ;

(0,5p) 3. $\angle COE = \dots$

c) 40° ;

d) 80° .



V. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(1,5p) 1. a) O societate comercială are 1400 de muncitori și 60% dintre aceștia sunt muncitori cu înaltă calificare. Calculați numărul muncitorilor cu înaltă calificare din această societate.

- b) Un procent de 85% dintre elevii unei școli participă la o manifestare sportivă. Câți elevi are școala, dacă la manifestarea sportivă au participat 1700 de elevi?
 c) Dintr-o suprafață de 240 ha au fost arate 24 ha. Calculați cât la sută din suprafața respectivă reprezintă suprafața arată.

- (1,5p) 2. Fie un triunghi isoscel ABC cu baza BC și punctele D , respectiv E pe dreapta BC , astfel încât B aparține segmentului DC , C aparține segmentului BE , iar $BD \equiv CE$. Fie $DF \perp AB$ ($F \in AB$), $EG \perp AC$ ($G \in AC$) și $EG \cap DF = \{M\}$. Demonstrați că:
 a) $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle CEG$; b) $FM \equiv GM$; c) $FG \parallel BC$.

❀ TESTUL 2 ❀

I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. (1,5 puncte)

- (0,5p) 1. Dacă $a = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, atunci produsul $-10 \cdot a^{-1}$ este egal cu
- (0,5p) 2. Dintre cei 24 de elevi ai unei clase, 6 au obținut la un test note peste 9. Procentul elevilor care nu au obținut note peste 9 este egal cu
- (0,5p) 3. Dacă suplementul unui unghi are 137° , atunci complementul unghiului respectiv are măsura egală cu

II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (1,5 puncte)

- (0,5p) 1. Numărul întreg x pentru care $|x| = 7$ și $x < 5$ este egal cu:
 A. -5; B. 7; C. -7; D. 5.
- (0,5p) 2. Dintre tripletele următoare, cel care reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, exprimate în aceeași unitate de măsură, este:
 A. (5, 12, 13); B. (5, 11, 13); C. (20, 30, 40); D. (8, 15, 19).
- (0,5p) 3. Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente cu măsurile de $5x^\circ$ și 105° . Valoarea lui x este egală cu:
 A. 15; B. 30; C. 45; D. 21.

III. Scrieți în căsuța alăturată litera A, dacă afirmația este adevărată, sau litera F, dacă afirmația este falsă. (1,5 puncte)

- (0,5p) 1. Numărul $\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$ este număr întreg. ☐
- (0,5p) 2. Frația $\frac{5n + 7}{7n + 10}$ este ireductibilă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. ☐
- (0,5p) 3. Dacă $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5}{x + 2} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -1 < 2y + 1 \leq 3\}$, atunci mulțimile A și B sunt disjuncte. ☐

Indicații și răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scațați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

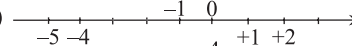


ALGEBRĂ

CAPITOLUL. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

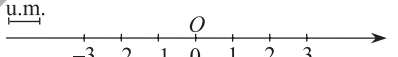
Unitatea: MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI. REPREZENTARE PE AXA NUMERELOR. COMPARARE ȘI ORDONARE

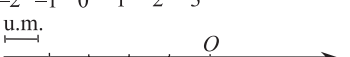
1. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi

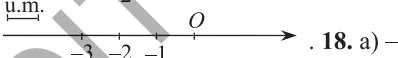
1. a) număr întreg; b) acel număr întreg care se obține din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia; c) o dreaptă pe care s-a fixat un punct numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură. 2. a) ; b) analog; c) analog; d) se ia unitatea de măsură 0,5 mm. 3. a) naturale sunt: 3; 0; $\frac{4}{2} = 2$; 41 și întregi sunt: -17; +3; 0; $\frac{4}{2} = 2$; -13; 41; b) naturale sunt:

0; 83; +15; +43 și întregi sunt: -3; 0; 83; +15; +43; -17. 4. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ deoarece orice număr natural este și întreg, iar $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, deoarece există numere întregi negative care nu sunt naturale. Exemple: $-4 \in \mathbb{Z}$

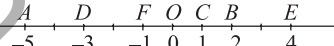
și $-4 \notin \mathbb{N}$. 5. $\{-3\}$; $\{0\}$; $\{2\}$; $\{-3, 0\}$; $\{-3, 2\}$; $\{0, 2\}$; $\{-3, 0, 2\}$; $\emptyset$. 6. a) -3; 14; 0; -11; 13; -2; 3; -4; 7; -5; 12; b) 15; -13; 0; 17; -2; 1; -1; 7; -5; -4; 5; c) 3; -7; 0; -3; 14; -15; -13; 12; -4; 8; 17. 7. a) +1; +2; +4; b) -4; -3; -1; c) -4 și +4; -1 și +1; d) 0; 1; 2; 4. 8. a) $A = \{+2, -3, 0, +444, +3, -7, -2\}$; b) $A = \{+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3\}$. 9. +7, -5, +3, 0, -2, +1, -6, +4. 10. De exemplu: a) 1, 5, 6; b) -1, 1, 3; c) -3, -4, -1; d) 0, 1, 2; e) -7, -2, -1; f) 2, 3, 7. 11. a) -3, -2, -1, 0, 1, 2; b) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4; c) -3, -2, -1, 0, 1. 12. a) 7, 14, 21; b) 14, 7, 0, -7, -14, -21, -28. 13. Adevărate sunt: b), e), f), h), i). 14. $A = \{-4; -7; 2; 0; +5\}$; $B = \{2; 0; +5\}$; $C = \{-4; -7\}$. 15. a) $A = \{+5, 0, 2, +8, +3, 4\}$; b) $B = \{-4, 0, 2, +8, 4\}$; c) $C = \{-7, -9, -1\}$; d) $D = \{-4, 2, 8, 4\}$. 16. $A = \{-4, -3, -2, -1, 0,$

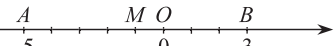
$1, 2\}$; $B = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$. 17. a) 

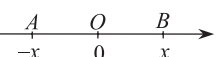
b) ; c) 

d) . 18. a) -10, -8, -6, -4, -2; b) -15, -13, -11.

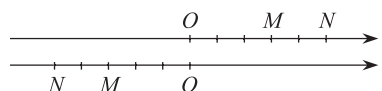
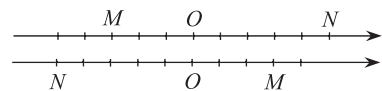
19. a) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3; b) -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5; c) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. 20. -7° .

21. a) ; b) $AE = 9$ cm; $BD = 5$ cm; $EF = 5$ cm.

22. a) ; b) $OA + OB + AM + AB = 5 + 3 + 4 + 8 = 20$ (u.m.).

23.  a) Din $AB + 5OB = 14 \Rightarrow 2x + 5x = 14 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$;

b) Din $3OA + 5BO = 16 \Rightarrow 3x + 5x = 16 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$.

24. a)  

Testul 3: I. 1. -90. 2. opusul celui de-al doilea număr. 3. 5 km. II. 1. D. 2. A. 3. C. III. 1. F. 2. A. 3. A. IV. 1. → c) 2. → d) 3. → a). V. 1. a) -24; b) 0; c) 2025. 2. a) 30; b) 14; c) -19.

Unitatea: OPERAȚII CU NUMERE ÎNTREGI (2)

1. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți

1. a) pozitiv; b) pozitiv; c) negativ. 2. $a \cdot b \in \{120; -2150; -7280; 2415; 0; 2924; 0; 2011\}$. 3. a) 10; b) -21; c) -18; d) 27; e) -44; f) 0; g) -82; h) -2 130; i) 408; j) -330; k) -90; l) 0. 4. Se efectuează calculele. 5. a) Care au același semn; b) care au semne diferite; c) zero; d) unul dintre factori este zero. 6. Se efectuează înmulțirile. 7. 1 sau 3. 8. Se folosește distributivitatea sau scoaterea factorului comun ca una dintre metode, iar al doilea mod este calculul ținând cont de ordinea efectuării operațiilor; a) $3 \cdot (5 - 7) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 15 - 21 = -6$ sau $3 \cdot (5 - 7) = 3 \cdot (-2) = -6$; b), c), d), e), f), g), h) analog cu a). 9. Distributivitatea, comutativitatea, distributivitatea înmulțirii față de adunare și distributivitatea înmulțirii față de scădere. 10. a) -560; b) 0; c) -36; d) 72; e) 4 800; f) 30; g) 40; h) 0; i) -105; j) -150; k) 0; l) 105. 11. a) -22; b) -7; c) 21; d) 2; e) -12; f) 0; g) -16; h) -72; i) -12. 12. a) 170; b) 2300; c) -1080; d) -2 160; e) 0; f) -30. 13. a) -312; b) -520; c) 143; d) 0; e) 0; f) -62. 14. a) -3; b) -875; c) 5 și x ; d) -1 331. 15. a) 0; b) -123; c) 0; d) -468. 16. a) -14; b) -24; c) -309; d) -4. 18. a) -162; b) -32; c) -66; d) -96; e) 54; f) -43; g) 13; h) 315. 19. a) 21 300; b) 3 510; c) 37 000; d) -510 000; e) 43 400; f) -751 200. 20. a) $a = -2$; b) $b + c = 6$. 21. a) -6; b) $(-2)(a + b)$; c) -480; d) $-2a$. 22. a) -44; b) -25; c) -38; d) 137; e) -36. 23. a) $(-13 + 13) \cdot 13 + 13 = 13$. 24. a) $a = -86$; $|a| = -a = 86$; b) $|a| = 6 \Rightarrow a = 6$ sau $a = -6$. 25. a) -2 010; b) -180; c) 63; d) 0; e) 0. 26. a) 0; b) -6 623; c) -990; d) 8; e) -16. 27. a) -500; b) -30; c) 0. 28. a) -900; b) 42; c) 80. 29. a are semnul „+”; b, c și d au semnul „-”. 31. a) 3 333 300; b) 757 000; c) 0; d) 0. 32. a) 2021; b) 2^{2018} ; c) 2. 33. $a = 2019 - x(1 - x) - x^3(1 - x) - \dots - x^{2017}(1 - x) \Rightarrow a = 2019 - (1 - x)(x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2017}) \Rightarrow a = 2019 - (1 - x) \cdot x \cdot (1 + x^2 + \dots + x^{2016})$. Numărul a este nenul pentru că $(1 - x) \cdot x \cdot (1 + x^2 + \dots + x^{2016})$ este număr par. 34. $x = 2018 \cdot 2019 \cdot 2020$. 35. a) $(15^{2n} \cdot 145); (3 \cdot 145)$ pentru $n \neq 0$; b) $n = 1$. 36. $E(x) = x_1 - x_2 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_3 - 3x_4 + \dots + 2019 \cdot x_{2019} - 2019 \cdot x_{2020} + 2020 \cdot x_{2020} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{2019} + x_{2020} = 0$. 37. $S_{\min} = -n \cdot (2n + 1)$ și $S_{\max} = n \cdot (2n + 1)$. 38. Restul mai mic decât împărțitorul, înseamnă că sunt 20 de numere naturale și 40 de numere întregi. 39. Este suficient să dăm un contraexemplu. Pentru $a = -1$ și $b = -1$ avem $a \cdot b = (-1) \cdot (-1) = 1$. 40. a) -3, 0; b) produsul 0.

2. Împărțirea numerelor întregi

1. a) 4; b) -17; c) -1; d) -25; e) -2 573; f) -17; g) -20; h) -1; i) 22; j) 4; k) 3; l) -13. 2. a) $a = b \cdot c$; b) $p : x = y \Rightarrow p : y = x$; c) $y = x$; d) $a = -1$; e) $a = 0$ și $x \in \mathbb{Z}^*$. 3. a) 3; b) -14; c) -121; d) -705; e) 24; f) -2 841. 5. a) pozitiv; b) pozitiv; c) negativ. 7. a) -6; b) -102; c) -30; d) 1; e) 3 104; f) -204; g) 70; h) -71; i) 9 106. 8. a) -5; b) -4; c) -110; d) -955; e) -631; f) 111. 10. a) -9; b) -14; c) 0; d) 22; e) 3; f) -9; g) 5; h) 40; i) -1 070. 11. a) 8; b) -18; c) -17; d) 50; e) 91; f) -13. 12. a) -99; b) -500; c) -3; d) -483; e) -314; f) -3 449. 13. $b + c = 8$. 14. $x = -32$. 15. $x = 28$. 16. a) -2; b) 0; c) 23; d) 29; e) 104; f) 38. 17. $x = 131$. 18. $x = -23$. 19. a) 0; b) 0; c) 1; d) 6; e) 5; f) 0; g) -90. 20. a) -1009; b) 1009; c) -1009; d) 1009. 21. a) $\frac{-100 \cdot 101}{(-101) \cdot 2} = 50$; b) $-2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2 \cdot (101)} = 100$; c) $-5 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100) : (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = -5$. 22. $a = -1$ și $b = -2$. 23. a) Se scrie $x \cdot (y + 5) = 2$ și se consideră divizorii numărului 2 $\Rightarrow (x, y) \in \{(1, -3); (2, -4); (-1, -7); (-2, -6)\}$; b) $(x, y) \in \{(3, 5); (1, -5); (7, 1); (-3, -1)\}$. 24. Din $x^2 y z^2 t^2 \cdot (x - y + z) < 0 \Rightarrow y$ și $x - y + z$ au semne contrare (1). Analog, din $x^2 y^2 z t^2 \cdot (y - z + t) < 0 \Rightarrow z$ și $y - z + t$ au semne contrare (2). 1) Presupunem că toate numerele x, y, z, t sunt pozitive, din (1) $\Rightarrow x - y + z < 0 \Leftrightarrow x + z < y$ (3) și din (2) $\Rightarrow y - z + t < 0 \Leftrightarrow y + t < z$ (4). Adunând (3) și (4) obținem $x + y + z + t < y + z \Leftrightarrow x + t < 0$. Fals, deoarece am presupus $x > 0, t > 0$. 2) Analog, presupunând că toate numerele x, y, z, t sunt negative se ajunge în

CAPITOLUL. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Unitatea: MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE.

REPREZENTARE PE AXA NUMERELOR. COMPARARE ȘI ORDONARE

1. Mulțimea numerelor raționale. Număr rațional

1. false sunt: b), f), h) și adevărate sunt: a), c), d), e), g). 2. $C = \left\{ \frac{-1}{-2}; \frac{-1}{5}; \frac{2}{-2}; \frac{2}{5}; \frac{-3}{-2}; \frac{-3}{5} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -1, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{5} \right\}$. 3. Da. 4. $M_1 = \left\{ \frac{21}{7}, 0 \right\} = \{3, 0\}$; $M_2 = \left\{ \frac{21}{7}; 0; -1; -9 \right\} = \{3, 0; -1; -9\}$; $M_3 = \left\{ -1; 2, (3); \frac{1}{7}; -9; \frac{21}{7}; 0; -1, 5 \right\} = M$; $M_4 = \{-1, -9\}$; $M_5 = \left\{ 2, (3); \frac{1}{7}; -1, 5 \right\}$; $M_6 = \left\{ -1; 2, (3); \frac{1}{7}; -9; -1, 5 \right\}$. 5. a) 0,6; b) -3,5; c) 0,55; d) -0,04; e) -4,25; f) 0,26; g) 0,76; h) 2,875. 6. a) $1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$; b) $17 \cdot 17 \neq 3 \cdot 3$; c) $5 \cdot 49 = 7 \cdot 35$; d) $24 \cdot 15 = 18 \cdot 20$. Doar la b) fracțiile nu sunt echivalente.

7. a) 0,6; b) -3,5; c) 0,55; d) -0,04; e) 4,25; f) -0,26; g) 0,152; h) -2. 8. a) -0,(09); b) -0,(3); c) 0,(7); d) -1,(846153); e) -0,(6); f) 3,(703); g) -0,(216); h) -15,(6). 9. a) 1,1(6); b) -0,02(27); c) 0,7(72); d) -8,2(6); e) 2,9(6); f) -7,791(6); g) 0,8(2); h) -3,9(4). 10. a) și b) periodice simple; c) și d) finite; e) și f) periodice mixte. 11. a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{17}{10}$; c) $\frac{243}{20}$; d) $\frac{41}{20}$; e) $\frac{1}{100}$; f) $\frac{209}{25}$; g) $\frac{1}{8}$; h) $\frac{22}{5}$. 12. a) $\frac{12}{9}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) $\frac{310}{99}$; d) $-\frac{221}{99}$; e) $\frac{41}{333}$; f) $-\frac{410}{333}$. 13. a) $\frac{2}{15}$; b) $-\frac{67}{30}$; c) $\frac{107}{330}$; d) $-\frac{37}{300}$; e) $\frac{4096}{495}$; f) $-\frac{1}{12}$. 14. a) fals. Fie $x = -2 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ și $x \notin \mathbb{N}$; b) adevărat; c) fals. Fie $x = 0,5 \Rightarrow x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ și $x \notin \mathbb{N}$; d) adevărat. 15. a) $[2, 15] = 2$ și $\{2, 15\} = 0,15$; b) $[-3, 81] = -4$ și $\{-3, 81\} = 0,19$; c) $\frac{14}{-2} = -7 \Rightarrow \Rightarrow [-7] = -7$ și $\{-7\} = 0$; d) $[-0,2] = -1$ și $\{-0,2\} = 0,8$; e) $3\frac{1}{4} = 3,25 \Rightarrow [3,25] = 3$ și $\{3,25\} = 0,25$; f) $[0,7] = 0$ și $\{0,7\} = 0,7$. 16. a) $[-0,6] = -1$ și $\{-0,6\} = 0,4$; b) $[3,5] = 3$ și $\{3,5\} = 0,5$; c) $[1,3(6)] = 1$ și $\{1,3(6)\} = 0,3(6)$; d) $[2,1(6)] = 2$ și $\{2,1(6)\} = 0,1(6)$; e) $[-0,5] = -1$ și $\{-0,5\} = 0,5$; f) $[-2,(3)] = -3$ și $\{-2,(3)\} = 0,(6)$. 17. a) 2,3; b) -2,3; c) -0,6; d) 0,1. 18. a) $\frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} = -\frac{9}{15}$; b) $\frac{-2}{6} = -\frac{3}{9} = -\frac{5}{15}$; c) $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{7}{7}$; d) $-\frac{2}{15} = -\frac{4}{30} = -\frac{6}{45}$; e) $\frac{41}{20} = \frac{82}{40} = \frac{205}{100}$; f) $-\frac{14}{6} = -\frac{21}{9} = -\frac{28}{12}$. 19. a) -0,(3); 2; 1,(54); -4,1(6); b) $[-0,(3)] = -1$ și $\{-0,(3)\} = 0,7$; $[2] = 2$ și $\{2\} = 0$; $[1,(54)] = 1$ și $\{1,(54)\} = 0,(54)$; $[-4,1(6)] = -5$ și $\{-4,1(6)\} = 0,8(3)$. 20. $x \in \{1, 2, 5, 10\}$; b) $x \in \{-1, -3, -5, -15\}$; c) $x \in \{0, 2, 6, 20, -2, -4, -8, -22\}$; d) $x \in \{4, 5, 3, 2\}$. 21. a) Presupunem că a și b nu sunt prime între ele. Înseamnă că au un divizor comun diferit de 1. Fie d divizorul comun. Avem că: $d \mid (7n + 11)$ și $d \mid (2n + 3) \Rightarrow d \mid 2 \cdot (7n + 11)$ și $d \mid 7 \cdot (2n + 3) \Rightarrow d$ divide diferența lor, adică $d \mid 1$. Fals, deoarece $d \neq 1$. Presupunerea făcută este falsă și ca urmare numerele a și b sunt prime între ele, adică $(a, b) = 1$; b) Se rezolvă prin metoda reducerii la absurd ca în cazul a). 22. Se demonstrează că numărătorul și numitorul sunt numere prime între ele ca în exercițiul anterior. 23. a) Frația se simplifică cu 3; b) Frația se simplifică cu 2. 24. a) 0,5(60); b) 0; c) 305. 25. a) $\{0, 1\}$; b) $\{2, 3\}$; c) $n = 4$. 26. a) $n \in \{1, 2\}$; b) $n \in \{0, 4\}$; c) $n \in \{3, 9\}$. 27. $a = 5, b = 2, c = 4$. 28. 5,(74). 29. a) $a = 3$; b) $a = 0$; c) $a = 2$; d) $a = 5$; e) $a = 2$. 30. Numitorul fracției este multiplu de 2 pentru că $n \cdot (n + 1)$ este număr par și numitorul fracției este și multiplu de 3 conținând produsul a trei numere consecutive. Numitorul conține pe lângă alți factori și pe 2, ca urmare se transformă în fracție zecimală periodică mixtă.

obținem $a \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \dots \cdot \frac{2019}{2021} \cdot \frac{2021}{2023} = \frac{1}{2023}$. Calculăm $a \cdot b + \frac{2022}{2023} = \frac{1}{2023} + \frac{2022}{2023} = \frac{2023}{2023} = 1$ și 1 este număr natural; b) Observăm că $\frac{1}{3} < \frac{3}{5}$, pentru că $5 < 9$ și analog $\frac{5}{7} < \frac{7}{9}, \dots, \frac{2019}{2021} < \frac{2021}{2023}$. Înmulțind relațiile obținem: $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdot \dots \cdot \frac{2019}{2021} < \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2023}$, adică $a < b$. Din $a < b \mid \cdot a$ rezultă că $a^2 < ab$ și cum $ab = \frac{1}{2023}$ și $\frac{1}{2023} < 0,005$, rezultă că $a^2 < 0,0005$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL. TRIUNGHIUL

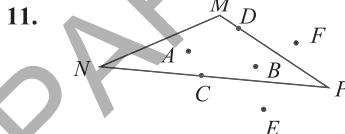
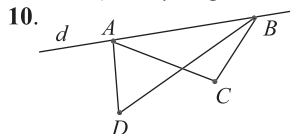
Unitatea: TRIUNGHIUL

1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului



1. vârfuri: M, N, P ; laturi: MN, PN, MP ; unghiuri: MNP, MPN, NMP .

2. a) BC ; b) $\angle C$; c) $\angle B$ și $\angle C$. 3. 4 triunghiuri: PQR, PQH, PRH, QRH . 4. a) ABF, ABD, ABE, ABC ; b) FBD, EBC . 5. Adevărate: a), b), iar restul false. 6. Are două laturi congruente; are toate laturile congruente; are un unghi drept; are un unghi obtuz; are toate unghiurile ascuțite. 7. Ipotezuza este PR și $\angle Q = 90^\circ$. 8. a) scalen; b) isoscel; c) echilateral. 9. a) dreptunghic isoscel; b) obtuzunghic isoscel; c) ascuțitunghic.



10. a) 11,4 cm; b) 10,5 cm; c) 7,2 cm. 11. a) $BC = 4$ cm; $AB = 2,4$ cm; $AC = 3,2$ cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm. 12. 3 cm. 13. a) obtuzunghic; b) dreptunghic isoscel; c) echilateral. 14. a) $7 < 5 + 8, 5 < 7 + 8$ și $8 < 7 + 5 \Rightarrow$ punctele A, B, C determină un triunghi, deci sunt necoliniare; b) $11 = 8 + 3$, adică $b = a + c \Rightarrow$ nu există $\triangle ABC$, deci punctele A, B, C sunt coliniare. 15. $\mathcal{P}_{ABD} = 19$ cm $\Rightarrow AB + AD + BD = 19$ cm $\Rightarrow AB + BD = 11$ cm (1); $\mathcal{P}_{ACD} = 26$ cm $\Rightarrow AC + AD + DC = 26$ cm $\Rightarrow AC + DC = 18$ cm (2). Atunci $\mathcal{P}_{ABC} = AB + BC + AC = AB + AC + BD + DC \stackrel{(1),(2)}{=} 29$ cm. 16. $AB = 16$ cm, $BC = 50$ cm, $CA = 40$ cm. 17. 72 cm, 120 cm și 168 cm. 18. 144 cm. 19. În triunghiul ABC presupunem laturile AB și AC congruente. Cazul 1: $AB = AC = 8$ cm rezultă $BC = 26$ cm $- 16$ cm $= 10$ cm. Cazul 2: $BC = 8$ cm rezultă $AB = (26$ cm $- 8$ cm) $: 2 = 9$ cm. 20. 234 cm. 21. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului. Presupunem că $a \leq b \leq c$. Atunci $a, b \leq 4$ și $c \geq 5$. Avem imediat $c < a + b \leq 4 + 4 = 8$, adică $c \in \{5, 6, 7\}$ (1). În funcție de valorile lui c din (1) analizăm, pe rând, cazurile: i) $c = 5 \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4)\}$, adică există două triunghiuri isoscele; ii) $c = 6 \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 4); (4, 4)\}$, adică există un singur triunghi isoscel; iii) $c = 7 \Rightarrow a = b = 4$, adică există un singur triunghi isoscel. În total există 4 triunghiuri isoscele. 22. $a = 15, b = 10, c = 6$; $c = 24\%$ din $(a + b)$. 23. Fie A, B, C, D, E, F cele 6 puncte, astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Atunci sunt 5 segmente cu o extremitate în A : AB, AC, AD, AE și AF . Aplicând principiul cutiei, oricum le-am colora cu roșu sau cu albastru, există cel puțin trei segmente de aceeași culoare. Presupunem AB, AC, AD colorate în roșu. Studiem ce culoare au laturile triunghiului BCD : i) Dacă una dintre laturile acestui triunghi are culoarea roșie, atunci triunghiul determinat de acea latură și punctul A este roșu. ii) Dacă niciuna dintre laturile acestui triunghi nu are culoarea roșie, atunci $\triangle BCD$ este albastru, adică există cel puțin un triunghi de aceeași culoare.

2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior

1. a) $\angle C = 180^\circ - (64^\circ + 59^\circ) = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$; b) $\angle B = 180^\circ - (58^\circ 29' + 74^\circ 35') = 180^\circ - 132^\circ 64' = 179^\circ 60' - 133^\circ 04' = 46^\circ 56'$; c) $\angle A = 180^\circ - (\alpha^\circ + 3\alpha^\circ) = 180^\circ - 4\alpha^\circ$. 2. a) complementare; b) 60° ; c) unghiurile interioare neadiacente cu el. 3. a) 53° ; b) 45° ; c) $65^\circ 43'$; d) $72^\circ 35' 28''$. 4. a) 52° ; b) 133° ; 99° ; 128° . 5. 110° ; 50° ; 20° . 6. a) Unghiul adiacent și suplementar cu un unghi al triunghiului; b) suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el. 7. 37° ; $35^\circ 45'$; $107^\circ 15'$. 8. 70° ; 70° ; 40° . 9. a) Vezi definiția; b) Sunt șase unghiuri și unghiurile exterioare cu același vârf sunt congruente pentru că sunt opuse la vârf (vezi fig. 1). 10. a) Vezi teoria; b) 720° .

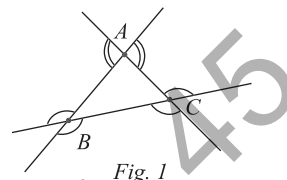


Fig. 1

11. Fie x, y și z măsurile unghiurilor. Avem $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ \Rightarrow x = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ, y = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$ și $z = 5 \cdot 18^\circ = 90^\circ$. 12. Fie x măsura celui de-al

doilea unghi $\Rightarrow$ un unghi este $x + 25^\circ$, iar celălalt este $2x - 9^\circ$ și avem: $(x + 25^\circ) + x + (2x - 9^\circ) = 180^\circ \Rightarrow x + 25^\circ + x + 2x - 9^\circ = 180^\circ \Rightarrow 4x + 16^\circ = 180^\circ \Rightarrow 4x = 164^\circ \Rightarrow x = 41^\circ, x + 25^\circ = 66^\circ$ și $2x - 9^\circ = 73^\circ$. 13. Fie a, b, c măsurile unghiurilor. Avem: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{180^\circ}{z+z} =$

$\frac{180^\circ}{2z} = \frac{90^\circ}{z} \Rightarrow \frac{c}{z} = \frac{90^\circ}{z} \Rightarrow c = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic cu $c = 90^\circ$. 14. a) $\angle A + \angle B > 90^\circ$

și $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) \Rightarrow \angle C < 90^\circ$. 15. 59° ; 60° ; 61° . 16. Dacă măsura unghiului exterior este 120° , înseamnă că măsura unghiului interior adiacent cu acesta este egală cu 60° și triunghiul isoscel cu un unghi de 60° este echilateral. 17. a) Fie $\triangle ABC$ cu $AB = AC = BC \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 180^\circ : 3 = 60^\circ$; b) Fie $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$ și $\angle B = 45^\circ \Rightarrow \angle C = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel; c) Fie $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$ și $AB = AC \Rightarrow \angle B = \angle C = (180^\circ - 90^\circ) : 2 = 45^\circ$. 18. a) Fie $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$ și presupunem că $\angle B \geq 90^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B \geq 180^\circ$ (absurd) $\Rightarrow$ triunghiul dreptunghic nu poate avea încă un unghi drept sau un unghi obtuz; b) Fie $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$ și $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle B$ și $\angle C$ sunt complementare.

19. $\triangle PQM$ este isoscel și $\triangle MNR$ este isoscel și cum $\angle QMP = \angle RMN$, fiind opuse la vârf $\Rightarrow \angle QPM = \angle NRM$ și cum unghiurile au poziție de alterne interne pentru dreptele PQ, RN și secanta $PR \Rightarrow PQ \parallel RN$. 20. Dacă măsurile unghiurilor exterioare sunt de 110° și $150^\circ \Rightarrow$ măsurile unghiurilor interioare adiacente cu acestea sunt de 70° și $30^\circ \Rightarrow$ măsura celui alt unghi este de $180^\circ - (70^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. 21. $\angle A - \angle B = 10^\circ$ și $\angle A + \angle B = \angle ACD = 30^\circ \Rightarrow 2\angle A = 40^\circ \Rightarrow \angle A = 20^\circ \Rightarrow \angle B = 10^\circ$ și $\angle C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ (vezi fig. 2). 22. Măsura unghiului exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el și, ca urmare, este mai mare decât oricare dintre acestea. 23. $\alpha^\circ = \angle BAC + \angle BCA$ și $\beta^\circ = \angle DAC + \angle DCA$, fiind unghiuri exterioare, și $\alpha^\circ + \beta^\circ = \angle BAC + \angle BCA + \angle DAC + \angle DCA =$

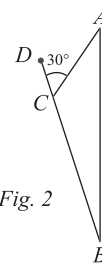


Fig. 2

$= (\angle BAC + \angle DAC) + (\angle BCA + \angle DCA) = x^\circ + y^\circ$. 24. În $\triangle AOB$ avem că $\angle AOB = 90^\circ - \angle ABO$, $\angle AO'C = 90^\circ - \angle O'BC$ și $\angle ABO = \angle O'BC$ fiind opuse la vârf $\Rightarrow \angle AOB = \angle AO'C$ și cum $\angle CO'B + \angle BO'C' = 180^\circ \Rightarrow \angle AOC + \angle AO'C' = 180^\circ$. 25. a) $x = 6^\circ$; b) $x = 15^\circ$. 26. Se notează $\angle CBD = \angle DBA = x$ și $\angle ABE = \angle EBM = y$. Dacă semidreptele BD și BE sunt bisectoare, atunci $x + y = 90^\circ$. Pentru că $BD = BE$, avem $\angle BDE = \angle BED = 45^\circ$. Deoarece $\angle BDE = 45^\circ$, rezultă că $\angle BDC = 135^\circ$. Unghiul BDC este unghi exterior triunghiului BDA , prin urmare este mai mare decât orice unghi interior neadiacent. Obținem $\angle BAD < 135^\circ$ (1). Unghiul BDA este unghi exterior triunghiului BCD și atunci $x < 45^\circ$. Cum $x + y = 90^\circ$, deducem că $y > 45^\circ$. Unghiul BAD este unghi exterior triunghiului BAE și atunci $\angle BAD = y + 45^\circ > 90^\circ$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $90^\circ < \angle BAC < 135^\circ$.

În $\triangle AND$, $\sphericalangle N = 90^\circ \Rightarrow MD \perp AP$. 4. a) $\sphericalangle EBD \equiv \sphericalangle C (= 90^\circ - \sphericalangle B)$; b) Notăm $DM \parallel AB$, $M \in AC \Rightarrow DM \perp AC$ și $CN \perp AD$, $N \in AD$. Atunci $\triangle CMD \equiv \triangle CND$ (IU) $\Rightarrow CM \equiv CN$. 5. Cazul ULU 6. a) Fie M mijlocul lui EF ; $\triangle AEF$ isoscel $\Rightarrow AM \perp EF \Rightarrow EF \parallel BC$. În $\triangle ABC$, AM bisectoare $\Rightarrow AM \perp BC$; b) A, M, N coliniare (de la punctul a). $\triangle ABO \equiv \triangle ACO \Rightarrow AO$ bisectoare în $\triangle BAC \Rightarrow O \in AM$. 7. $\triangle ABE$ și $\triangle ACF$ isoscele $\Rightarrow AB \equiv AE$ și $AC \equiv AF \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle AFE$ (LUL). 8. $\triangle BEC$ isoscel $\Rightarrow BE \equiv BC$; $\triangle BCF$ isoscel $\Rightarrow BC \equiv CF \Rightarrow BE \equiv CF$. 9. Fie $AM \perp BC$, $M \in BC$; $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle MAC \left(= \frac{\sphericalangle A}{2} \right) \Rightarrow EF \parallel AM \Rightarrow EF \perp BC$. 10. a) Fie $AM \perp BC \Rightarrow AM \parallel DE \Rightarrow \sphericalangle FDA \equiv \sphericalangle DAM$ (alterne interne) și $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle MAC$ (corespondente) $\Rightarrow \triangle AFD$ isoscel; b) $\sphericalangle BAC = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle FAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle AFD$ echilateral $\Rightarrow DF \equiv DB \Rightarrow \triangle BDF$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle BFD = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle BFC = 90^\circ$; c) $\sphericalangle DHF \equiv \sphericalangle HFC$ (alterne interne) $\Rightarrow DH \parallel AC$.

RECAPITULARE FINALĂ

I. TEME DE RECAPITULARE FINALĂ

TEMA 1: Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

1. a) $\{0, 1, 3, 4\}$; b) $\{0, 1\}$; c) $\{4\}$; d) $\{3\}$. 2. $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. 3. a) $\{0, 1, 2, 3\}$; b) $\{1, 2, 3\}$; c) $\{1\}$; d) $\{0, 1, 2\}$; e) $\{0\}$; f) $\{0, 3, 5, 9\}$. 4. a) $\{33, 36, 39, 42, 45, 48\}$; b) $\{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$. 5. $\emptyset$, $\{c\}$; $\{d\}$; $\{e\}$; $\{c, d\}$; $\{c, e\}$; $\{d, e\}$; $\{c, d, e\}$; b) $A \setminus B = \{a, b\}$ și submulțimile nevide ale mulțimii $A \setminus B$ sunt: $\{a\}$; $\{b\}$; $\{a, b\}$. 6. $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3\}$; $C = \{3, 4, 5, 6\}$; $D = \{2, 3, 4\}$; $E = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $F = \{1, 4, 16, 64, 256\}$. 7. $A = \{1060, 1460, 1860, 1365, 1765\}$; $B = \{1060, 1262, 1464, 1666, 1868\}$; $A \cup B = \{1060, 1262, 1365, 1460, 1464, 1666, 1765, 1860, 1868\}$; $A \cap B = \{1060\}$; $A \setminus B = \{1460, 1860, 1365, 1765\}$; $B \setminus A = \{1262, 1464, 1666, 1868\}$. 8. $A = \{a, c, d\}$ și $B = \{b, c, d, e, f\}$ sau $A = \{b, c, d\}$ și $B = \{a, c, d, e, f\}$. 9. $A \cap B = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$. 10. $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 3, 4\}$. 11. a) $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$; $B = \{1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots\}$; b) $A \cup B = \mathbb{N}^*$ și $A \cap B = \emptyset$. 12. $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, c, d\}$ sau $A = \{b, c, d\}$ și $B = \{a, b, c\}$. 13. finite sunt A și D , iar infinite sunt B și C . 14. a) $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$; $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$; $D_{15} \cup D_{45} = D_{45}$ și $D_{15} \cap D_{45} = D_{15}$; b) $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; $D_{27} = \{1, 3, 9, 27\}$; $D_{18} \cup D_{27} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$ și $D_{18} \cap D_{27} = \{1, 3, 9\}$; c) $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots, 3n, \dots\}$; $M_{12} = \{0, 12, 24, 36, \dots, 12n, \dots\}$; $M_3 \cup M_{12} = M_3$ și $M_3 \cap M_{12} = M_{12}$; d) $M_4 = \{0, 4, 8, 12, \dots, 4n, \dots\}$; $M_6 = \{0, 6, 12, 18, \dots, 6n, \dots\}$; $M_4 \cup M_6 = \{0, 4, 6, 8, 12, \dots\}$ și $M_4 \cap M_6 = \{0, 12, 24, \dots, 12n, \dots\}$. 15. a) $78 \in A$ deoarece $78 = 6 \cdot 13$; b) 12, respectiv 96; c) $\text{card } A = 15$. 16. a) $B = \{1, 3, 5\}$ și $\text{card } B = 3$; b) Dacă $A = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$, atunci $B = \{2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_7 + 1\}$ unde oricare două elemente ale mulțimii B sunt diferite și $\text{card } A = \text{card } B$. Pentru a demonstra că oricare două elemente ale mulțimii B sunt diferite folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că două elemente ale mulțimii B ar fi egale. Fie $2x_i + 1$ și $2x_j + 1$ cele două elemente, cu $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, 7\}$. Am avea $2x_i + 1 = 2x_j + 1 \mid -1$ rezultă $2x_i = 2x_j \mid : 2$ și $x_i = x_j$ (fals), deoarece $x_i \neq x_j$ fiind elemente distincte ale mulțimii A ; c) Analog pentru $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ și $B = \{2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_n + 1, \dots\}$. Cum elementele mulțimii A sunt distincte (într-o mulțime fiecare element apare o singură dată) și mulțimea A este infinită rezultă că și mulțimea B este infinită, căci în caz contrar ar însemna ca cel puțin două elemente ale mulțimii B să coincidă, ceea ce este absurd conform demonstrației prin reducere la absurd de la b).

TEMA 2: Divizibilitatea numerelor naturale

1. a) $\{9, 12, 18, 21, 39, 54\}$; b) $\{4, 9, 12, 18\}$. 2. a) 5402, 84300, 79324; b) 1305, 7425, 32175, 84300; c) 84300, 79324; d) 1305, 7425, 32175, 84300; e) 7425, 32175, 84300; f) 1305, 7425, 32175. 3. a) $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $x \in \{0, 5\}$; c) $x \in \{0, 4, 8\}$; d) $x \in \{1, 4, 7\}$; e) $x = 5$; f) $x = 1$. 4. a) Fie n și $n+1$ două numere consecutive. i) Dacă n este număr par, adică $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $n+1$ este nu-

$\angle ADC$, adică $\angle ADM = \angle CDM$. **15.** Din $d_1 \parallel d_2$ și secanta d rezultă $\angle ABC \equiv \angle QNB$ (unghiuri corespondente). Dar $\angle QNB \equiv \angle MNP$ (opuse la vârf). Deci $\angle ABC \equiv \angle QNB$ (1). Din $AB = MN$ (ipoteză), $BC = NP$ (ipoteză), (1) și LUL rezultă $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ și $\angle ACB \equiv \angle MPN$ (2); b) Din (2) și faptul că $\angle ACB$ și $\angle MPN$ sunt unghiuri alterne interne pentru dreptele AC , MP și secanta d rezultă $AC \parallel MP$. **16.** a) Din teorema lui Pitagora în $\triangle ABC$ se obține $AC = 40$ cm; b) Din teorema lui Pitagora în $\triangle ABD$ se obține $BD = 18$ cm; c) Din $BC = 50$ cm și $BD = 18$ cm rezultă $CD = 32$ cm. Cum $BM = CM$, rezultă $CM = \frac{BC}{2} = 25$ (cm) și $MD = CD - CM = 32 - 25 = 7$ (cm).

II. TESTE DE EVALUARE FINALĂ

Testul 1. I. 1. ± 4 , ± 2 , ± 1 . **2. 1.** 3. alungit. **II. 1.** A. **2.** B. **3.** D. **III. 1.** F. **2.** A. **3.** F. **IV. 1.** $\rightarrow$ c);

2. $\rightarrow$ a); **3.** $\rightarrow$ d). **V. 1.** a) $\frac{60}{100} \cdot 1400 = 840$; b) $\frac{85}{100} \cdot x = 1700$ și $x = 2000$; c) $\frac{24}{240} = \frac{x}{100}$ și $x = 10$, deci 10%. **2.** a) Din IU rezultă că $\triangle BDF \equiv \triangle CEG$, rezultă că $\angle BDF \equiv \angle CEG$ (1), $DF = EG$ (2); b) Din (1) rezultă că $\triangle DME$ este isoscel, cu $DM = EM$, și din (2) rezultă că $DM - DF = EM - EG$, adică $FM = GM$ și triunghiul FMG este isoscel; c) În $\triangle FMG$ avem $\angle F = \angle G = \frac{180^\circ - \angle FMG}{2}$ (3).

În $\triangle DME$ avem $\angle D = \angle E = \frac{180^\circ - \angle DME}{2}$ (4). Din (3), (4) și faptul că $\angle FMG \equiv \angle DME$ rezultă că $\angle F \equiv \angle D$, adică $\angle GFM \equiv \angle EDM$. Dar $\angle GFM$ și $\angle EDM$ sunt unghiuri corespondente pentru dreptele DE , FG și secanta DM , deci $FG \parallel BC$.

Testul 2. I. 1. 16. **2.** 75%. **3.** 47° . **II. 1.** C. **2.** A. **3.** D. **III. 1.** F. **2.** A. **3.** A. **IV. 1.** $\rightarrow$ d); **2.** $\rightarrow$ c); **3.** $\rightarrow$ a).

V. 1. a) Din $\frac{b}{3} = \frac{2}{a}$ rezultă că $ab = 6$ (1) și din $\frac{b}{3} = \frac{2}{a} = \frac{3}{a+c}$ rezultă că $b(a+c) = 9$, adică $ab + bc = 9 = 6 + bc = 9$ și $bc = 3$; b) Se analizează cazurile n par, respectiv n impar și se obțin valorile -25 , respectiv -15 ; c) 4. **2.** a) Calculăm $\angle AOB' = 90^\circ - \angle AOB = \angle BOA'$ (1); b) Calculăm $\angle A'OB' = \angle AOB' + \angle AOB + \angle BOA' = 90^\circ - \angle AOB + \angle AOB + 90^\circ - \angle AOB = 180^\circ - \angle AOB$. Deci $\angle A'OB' = 180^\circ - \angle AOB$ și $\angle A'OB' + \angle AOB = 180^\circ$; c) Fie OM bisectoarea $\angle AOB$. Rezultă că $\angle AOM = \angle BOM$ (2). Calculăm $\angle A'OM = \angle A'OB + \angle BOM$, iar din (1) și (2) $\Rightarrow \angle A'OM = \angle AOB' + \angle AOM = \angle B'OM$. Deci $\angle A'OM = \angle B'OM$, rezultă că OM este bisectoarea $\angle A'OB'$, adică unghiurile AOB și $A'OB'$ au aceeași bisectoare.

Testul 3. I. 1. 0. **2.** 26° . **3.** -2 . **II. 1.** B. **2.** A. **3.** D. **III. 1.** F. **2.** A. **3.** A. **IV. 1.** $\rightarrow$ b); **2.** $\rightarrow$ c); **3.** $\rightarrow$ a). **V. 1.** a) 1170; b) 3,(3)%; c) 3125. **2.** Folosim reciproca teoremei lui Pitagora și obținem: a) $18^2 + 24^2 = 30^2$ și triunghiul este dreptunghic, cu $\angle C = 90^\circ$; b) $20^2 + 21^2 = 29^2$ și triunghiul este dreptunghic, cu $\angle B = 90^\circ$; c) $21^2 + 28^2 = 35^2$ și triunghiul este dreptunghic, cu $\angle C = 90^\circ$.

Testul 4. I. 1. 0,3. **2.** 500 lei. **3.** 15 cm. **II. 1.** A. **2.** C. **3.** C. **III. 1.** A. **2.** A. **3.** A. **IV. 1.** $\rightarrow$ d); **2.** $\rightarrow$ a); **3.** $\rightarrow$ c). **V. 1.** a) -3 ; b) 0,1(6); c) $-0,(3)$. **2.** a) În triunghiul BCE , BF este bisectoare ($F \in BD$) și BF este înălțime ($CF \perp BD$), deci triunghiul BCE este isoscel, cu $BE = BC$ (1); b) Din $BD = BD$ (latură comună), $\angle EBD = \angle CBD$ (BD este bisectoare), $BC = BE$ (din (1)) și LUL rezultă că $\triangle BCD \equiv \triangle BED$ și $\angle BCD = \angle BED$, $CD = ED$ (3); c) Din (3), $DF = DF$ (latură comună), $\angle DFC = \angle DFE = 90^\circ$ și CI rezultă că $\triangle CDF \equiv \triangle EDF$, respectiv $\angle CDF \equiv \angle EDF$.

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimea numerelor întregi

Unitatea: Mulțimea numerelor întregi. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare

1. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg.	
Reprezentarea pe axă a numerelor întregi	7
2. Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi	12
3. Recapitulare și sistematizare prin teste	16
Test de autoevaluare	19

Unitatea: Operații cu numere întregi (1)

1. Adunarea numerelor întregi. Scăderea numerelor întregi	21
2. Proprietățile adunării numerelor întregi	25
3. Recapitulare și sistematizare prin teste	28
Test de autoevaluare	31

Unitatea: Operații cu numere întregi (2)

1. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți	33
2. Împărțirea numerelor întregi	38
3. Recapitulare și sistematizare prin teste	42
Test de autoevaluare	45

Unitatea: Operații cu numere întregi (3)

1. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri	47
2. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	52
3. Recapitulare și sistematizare prin teste	55
Test de autoevaluare	59

Unitatea: Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor în mulțimea numerelor întregi

1. Ecuații în mulțimea numerelor întregi	61
2. Inecuații în mulțimea numerelor întregi	65
3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, respectiv inecuațiilor în contextul numerelor întregi	68
4. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	71
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	74
Test de autoevaluare	77
Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare	79
AUTOEVALUARE	80

Capitolul. Mulțimea numerelor raționale

Unitatea: Mulțimea numerelor raționale. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare

1. Mulțimea numerelor raționale. Număr rațional	82
2. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale	89
3. Recapitulare și sistematizare prin teste	95
Test de autoevaluare	99

Unitatea: Operații cu numere raționale

1. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți	101
2. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale. Proprietăți	106
3. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri	111
4. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	116
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	118
Test de autoevaluare	123

Unitatea: Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b + c$, unde a, b, c sunt numere raționale. Probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip

1. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b + c$, unde a, b, c sunt numere raționale.....	125
2. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor.....	129
3. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	133
4. Recapitulare și sistematizare prin teste	137
Test de autoevaluare	141
Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare.....	143
AUTOEVALUARE	144

GEOMETRIE

Capitolul. Triunghiul

Unitatea: Triunghiul

1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului	147
2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior.....	151
3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului.....	155
4. Linii importante în triunghi. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris în triunghi.....	160
5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi.....	163
6. Linii importante în triunghi. Înălțimile unui triunghi. Ortocentrul unui triunghi	166
7. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi. Centrul de greutate al unui triunghi.....	169
8. Recapitulare și sistematizare prin teste	173
Test de autoevaluare	177

Unitatea: Congruența triunghiurilor (1)

1. Congruența triunghiurilor oarecare.....	179
2. Criteriile (cazurile) de congruență a triunghiurilor	181
3. Metoda triunghiurilor congruente	184
4. Recapitulare și sistematizare prin teste	188
Test de autoevaluare	191

Unitatea: Congruența triunghiurilor (2)

1. Criteriile (cazurile) de congruență a triunghiurilor dreptunghice.....	193
2. Aplicații. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment	196
3. Recapitulare și sistematizare prin teste	201
Test de autoevaluare	205

Unitatea: Triunghiuri particulare

1. Proprietățile triunghiului isoscel	207
2. Proprietățile triunghiului echilateral.....	211
3. Proprietățile triunghiului dreptunghic.	215
4. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	221
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	225
Test de autoevaluare	229
Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare.....	231
AUTOEVALUARE	232

RECAPITULARE FINALĂ

Teme recapitulare finală	233
Teste de evaluare finală	246

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	251
--------------------------------------	-----