

Gheorghe IUREA
Adrian ZANOSCHI
Gabriel POPA
Gabriela-Elena ZANOSCHI
Ioana ANTON

matematică

aritmetică

geometrie

clasa a VI-a

ediția a IV-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 3014/04.01.2023.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca, Ramona Rossall, Iuliana Ene

Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică : aritmetică, geometrie : clasa a VI-a / Gheorghe Iurea,
Adrian Zanoschi, Gabriel Popa, ... – Ed. a 4-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4308-7

I. Iurea, Gheorghe

II. Zanoschi, Adrian

III. Popa, Gabriel

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

PROBLEME RECAPITULATIVE – CLASA a V-a

1. Care este cel mai mare număr de patru cifre distincte care are cifra sutelor egală cu 9? Dar cel mai mic?
2. Câte numere $\overline{abcd}$ verifică condițiile $a + b = 5$ și $b + c = 11$?
3. O carte are 216 pagini. Câte cifre sunt folosite pentru paginarea acesteia?
4. Suma a două numere impare distincte este 206. Care este diferența maximă dintre numere? Dar diferența minimă?
5. Care este cel mai mic număr natural care împărțit la 76 dă câtul 57? Dar cel mai mare?
6. Care este cel mai mic număr natural, mai mare decât 1000, care împărțit la 48 dă restul 15?
7. Care este cel mai mare număr natural, mai mic decât 1000, care împărțit la 48 dă restul egal cu 15?
8. a) Câte numere de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 6?
b) Câte numere de trei cifre au suma cifrelor egală cu 6?
9. Efectuați:
a) $2305 \cdot 2304 - 2304 \cdot 2303 - 2 \cdot 2303$;
b) $572 \cdot 68 - 572 \cdot 63 + 128 \cdot 71 - 128 \cdot 66$.
10. Dacă $a = 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0$ și $b = 3 \cdot 2^8 - 5^4 + 10^2 - 3^5$, calculați a^b și b^a .
11. Efectuați:
a) $3^7 \cdot 3^5 \cdot 3^{73} - 3^8 \cdot 3^{100} : 3^{23}$;
b) $(2^3)^8 - (2^4)^6 + 3^2 \cdot 9^2 - 3^6$;
c) $(9^{24} + 2 \cdot 81^{16} : 9^8) : 3^{49}$;
d) $(2^{79} + 3 \cdot 2^{76} + 2^{78} + 2^{76}) : 4^{39}$.
12. Scrieți numărul 10 ca o sumă, diferență, produs, cât sau putere de numere naturale.
13. a) Arătați că 1089 este pătrat perfect.
b) Arătați că 1365 nu este pătrat perfect.
14. Câte numere de cinci cifre conțin secvența 234?
15. Un număr se împarte la 9 și dă restul 7. Câtul se împarte la 8 și dă restul 5. Noul cât se împarte la 7 și dă câtul 6 și restul 3. Aflați numărul inițial.
16. Determinați numerele $\overline{abc}$, știind că:
a) $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 292$;
b) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 581$.
17. Fie x, y, z numere naturale, astfel încât $2x + 3y = 31$ și $4y + 3z = 67$.
a) Determinați trei numere naturale x, y, z care verifică condițiile date.
b) Calculați suma $S = 6x + 25y + 12z$.

TESTE ÎNȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

- (1p) 1. Calculați $\left(\frac{1}{3} + 0,25\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{7}\right)$.
- (1p) 2. Calculați $2a + 3b + c$, știind că $a + b = 20$ și $b + c = 21$.
- (1p) 3. Scrieți în ordine descrescătoare numerele: $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{8}{5}$, $c = 1,6(12)$, $d = 1,6(1)$.
- (1p) 4. Ionuț are 142 de timbre, iar Ana are 56 de timbre. Câte timbre trebuie să îi dea Ionuț Anei pentru a avea de două ori mai multe timbre decât Ana?
- (1p) 5. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 52 : 5,2$ și $b = 3,24 - 0,5 - 0,74$.
- (1p) 6. Considerăm un segment AB cu lungimea de 4 cm. Notăm cu C simetricul lui A față de B și cu D simetricul lui C față de A .
- (1p) a) Construiți punctul C .
- (1p) b) Care este lungimea segmentului BC ?
- (1p) c) Care este lungimea segmentului CD ?
- (1p) 7. Calculați $4^5 \cdot 50 - 4^4 \cdot 150 - 25 \cdot 2^9$.

TESTUL 2

- (1p) 1. Calculați $92 : 9,2 - 4,2 : 0,7$.
- (1p) 2. Un număr natural dă restul 2 la împărțirea prin 3.
- (1p) a) Ce rest va da dublul numărului la împărțirea prin 3?
- (1p) b) Ce rest va da triplul numărului la împărțirea la 3?
- (1p) 3. Calculați $(2 + 4 + 6 + \dots + 100) - (1 + 3 + 5 + \dots + 99)$.
- (1p) 4. Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 8 dau câtul de două ori mai mic decât restul.
- (1p) 5. Arătați că numărul $n = 2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6 \cdot 27^{10} : 81^7$ este divizibil cu 9.
- (1p) 6. Fie unghiul AOB și semidreptele OC , OM și ON , astfel încât semidreapta OC este opusă semidreptei OA , semidreptele OM și ON sunt interioare unghiului AOB , $\sphericalangle MON = 2\sphericalangle AOM$, $\sphericalangle NOB = 3\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle BOC = 4\sphericalangle AOM$.
- (1p) a) Determinați măsura unghiului AOM .
- (1p) b) Determinați măsura unghiului BOM .
- (1p) 7. Aflați câte numere de forma $\overline{abcabca}$ sunt divizibile cu 9 și cu 100.

ARITMETICĂ

CAPITOLUL I MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. DESCRIERE, NOTAȚII, REPREZENTĂRI. MULȚIMI NUMERICE/ NENUMERICE. RELAȚIA DINTRE UN ELEMENT ȘI O MULȚIME



• În matematică, o **mulțime** este o colecție de obiecte diferite, numite **elementele mulțimii**. Elementele unei mulțimi pot fi obiecte matematice de orice fel: numere, simboluri, figuri geometrice, alte mulțimi etc.

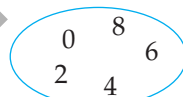
Mulțimile se notează cu litere mari.

Dacă A este o mulțime și x este un element al său, spunem că „ x aparține mulțimii A ” și scriem $x \in A$. Dacă x nu este un element al mulțimii A , spunem că „ x nu aparține mulțimii A ” și scriem $x \notin A$.

O mulțime poate fi reprezentată astfel:

1. scriind elementele sale între două acolade: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler:



3. indicând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii:

$A = \{x \mid x \text{ este număr natural par, mai mic decât } 10\}$.

O mulțime ale cărei elemente sunt numere se numește mulțime **numerică**:

$A = \{1, 2, 3\}$ este o mulțime numerică, iar $B = \{a, b, c\}$ nu este o mulțime numerică.

Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțimea **vidă** și se notează cu simbolul $\emptyset$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Considerăm cuvântul „matematica” și mulțimea A , formată din literele acestuia.

a) Câte litere are cuvântul considerat?

b) Câte elemente are mulțimea A ?

c) Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții:

$P_1: m \in A$; $P_2: e \notin A$; $P_3: z \in A$; $P_4: m \in A$ și $t \notin A$; $P_5: c \notin A$ sau $t \in A$.

d) Stabiliți care dintre propozițiile următoare este adevărată:

$Q_1: A = \{m, a, t, e, i, c\}$; $Q_2: A = \{m, a, t, e, m, a, t, i, c, a\}$; $Q_3: A = \{a, e, i, c, m, t\}$;

$Q_4: A = \{m, t, c, a, e\}$.

Soluție: a) Cuvântul „matematica” are 10 litere.

b) Elementele unei mulțimi sunt distincte, deci mulțimea A are 6 elemente.

c) Avem: P_1 este adevărată, P_2 este falsă, P_3 este falsă, P_4 este falsă (căci $t \in A$), iar P_5 este adevărată (deoarece $t \in A$).

d) În scrierea unei mulțimi, fiecare element apare o singură dată, iar ordinea în care sunt scrise elementele nu contează. Prin urmare, Q_1 și Q_3 sunt adevărate, iar Q_2 și Q_4 sunt false.

2. Scrieți fiecare dintre următoarele mulțimi, enumerându-le elementele:

- mulțimea cifrelor impare;
- mulțimea cifrelor numărului 2023;
- mulțimea divizorilor numărului 6;
- mulțimea multiplilor numărului 25, care sunt mai mici decât 100;
- mulțimea soluțiilor, numere naturale, ale ecuației $4x + 3 = 5$.

Soluție: a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; b) $B = \{0, 2, 3\}$; c) $C = \{1, 2, 3, 6\}$; d) $D = \{0, 25, 50, 75\}$; e) $E = \emptyset$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor pentru fiecare dintre următoarele cuvinte:

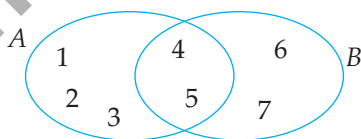
- aritmetica;
- algebra;
- geometria.

2. Patru elevi, Ana, Barbu, Corina și Dan, au scris mulțimea cifrelor din care este format numărul 50053. Răspunsurile lor se pot vedea în tabelul următor.

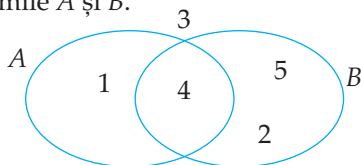
Ana	Barbu	Corina	Dan
$\{3, 0, 5\}$	$\{5, 0, 0, 5, 3\}$	$\{0, 0, 3, 5, 5\}$	$\{5, 3, 0\}$

Care dintre cei patru elevi a răspuns corect?

3. În figura 1 sunt reprezentate mulțimile A și B . Scrieți cele două mulțimi, enumerându-le elementele.



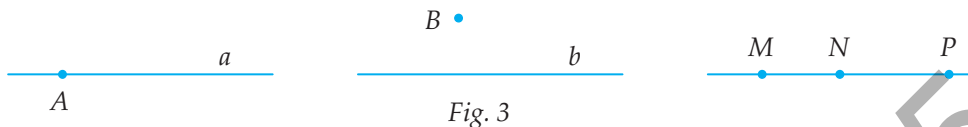
4. Folosiți simbolurile „ $\in$ ” sau „ $\notin$ ” pentru a descrie relația în care se află fiecare număr din figura 2 față de mulțimile A și B .



5. Fie mulțimea $M = \{5, 2, 3, 0, 7\}$. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile:

$P_1: 3 \in M; P_2: 6 \in M; P_3: 1 \notin M; P_4: 5 \notin M; P_5: 7 \in M; P_6: 8 \notin M.$

6. Scrieți, folosind unul dintre simbolurile „ $\in$ ” sau „ $\notin$ ”, următoarele relații (figura 3).



- Punctul A este situat pe dreapta a .
- Punctul B nu se află pe dreapta b .
- Punctul N aparține dreptei MP , fiind situat între punctele M și N .
- Punctele (diferite) M, N, P sunt coliniare.

7. Determinați elementele fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

$A = \{x \mid x \text{ este număr natural mai mic decât } 4\};$

$B = \{y \mid y = 3n - 4, n = 2, 3, 4\};$

$C = \{z \mid z = 2^n - 1, \text{ unde } n \in \{0, 1, 2, 3\}\};$

$D = \{t \mid t \text{ este număr natural și } 5t + 1 \leq 16\}.$

8. Scrieți, cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor, mulțimile:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\};$

$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\};$

$C = \{8, 16, 32, 64\};$

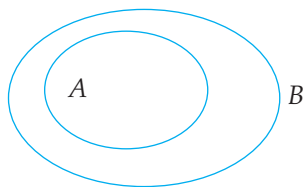
$D = \{10, 20, 30, \dots, 90, 100\}.$

1.2. RELAȚII ÎNTRE MULȚIMI



Două mulțimi care au aceleași elemente se numesc **egale**. Dacă două mulțimi, A și B , sunt egale, scriem $A = B$, iar dacă nu sunt egale, scriem $A \neq B$.

Dacă toate elementele unei mulțimi A sunt și elemente ale unei mulțimi B , spunem că mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B și notăm $A \subset B$. În acest caz, mulțimea A se numește **submulțime** (sau parte) a mulțimii B .



$$(\text{oricare ar fi } x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subset B)$$

Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime: $\emptyset \subset A$, oricare ar fi mulțimea A .

Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A .

Două mulțimi, A și B , sunt egale, dacă și numai dacă fiecare dintre ele este submulțime a celeilalte mulțimi: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ și } B \subset A).$

CAPITOLUL II

RAPOARTE. PROPORȚII

II.1. RAPOARTE



• Fie a și b două numere raționale pozitive, cu $b \neq 0$. Numărul rațional $a : b$ se numește **raportul** numerelor a și b și se notează $\frac{a}{b}$; numerele a și b se numesc **termenii raportului**, iar câtul obținut prin împărțirea numărului a la numărul b se numește **valoarea raportului** $\frac{a}{b}$.

Exemplu: Raportul numerelor 5 și 4 este $\frac{5}{4}$, termenii raportului sunt numerele 5 și 4, iar valoarea raportului este $5 : 4 = 1,25$.

Observații:

1. Valoarea unui raport nu se schimbă dacă înmulțim sau împărțim ambii termeni ai săi cu același număr nenul: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ și $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$, pentru orice numere raționale pozitive a, b, c , cu $b \neq 0$ și $c \neq 0$.

2. Dacă numerele a și b reprezintă mărimi de aceeași natură, atunci pentru scrierea raportului $\frac{a}{b}$ este necesar ca cele două mărimi să fie exprimate folosind aceeași unitate de măsură; în această situație, raportul nu va avea unitate de măsură.

Exemplu: Dacă înălțimea Mariei este egală cu 1,2 m, iar înălțimea lui Dan este de 150 cm, atunci raportul înălțimilor celor doi copii este $\frac{120 \text{ cm}}{150 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$.

3. Dacă numerele a și b reprezintă mărimi de tipuri diferite, atunci raportul $\frac{a}{b}$ este însoțit de unitate de măsură; astfel de rapoarte apar des în fizică.

Exemplu: Daria parcurge distanța de acasă până la școală (1,2 km), cu trotineta, în 20 de minute. Din egalitatea rapoartelor $\frac{1,2 \text{ km}}{20 \text{ min}} = \frac{3,6 \text{ km}}{60 \text{ min}}$ rezultă că viteza Dariei este de 3,6 km/h.

• Exemple cunoscute de rapoarte:

1. **Raportul procentual** este un raport de forma $\frac{p}{100}$, care se notează $p\%$.

2. **Scara unei hărți** este raportul dintre distanța pe hartă și distanța reală; se exprimă ca un raport cu numărătorul 1.

3. Densitatea populației dintr-o regiune este raportul dintre numărul de locuitori din acea regiune și suprafața corespunzătoare.

4. Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului.

5. Viteza de deplasare este raportul dintre distanța parcursă și timpul corespunzător.

PROBLEME REZOLVATE

1. În clasa a VI-a A sunt 28 de elevi, dintre care 16 sunt băieți. Aflați valoarea raportului dintre numărul fetelor și numărul băieților din această clasă.

Soluție: În clasă sunt $28 - 16 = 12$ fete, iar raportul dintre numărul fetelor și cel al băieților este egal cu $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, având valoarea 0,75.

2. Într-un manual de geografie este inclusă o hartă a Europei, având scara 1 : 20000000. Știind că pe acea hartă distanța dintre București și Viena este de aproximativ 5,35 cm, aflați distanța reală (pe teren) dintre cele două capitale.

Soluție: Scara hărții exprimă faptul că la 1 cm de pe harta respectivă corespund 20000000 cm reali (pe teren); prin urmare, distanța reală dintre București și Viena este egală cu $5,35 \cdot 20000000 = 107000000 \text{ cm} = 1070 \text{ km}$.

3. Aflați ce cantitate de aur conține un aliaj cu titlul egal cu 0,2, știind că respectivul aliaj este compus din aur și cupru, iar masa cuprului este de 920 g.

Soluție: Dacă notăm cu a masa metalului prețios (aur), atunci titlul aliajului este $\frac{a}{a + 920} = 0,2$, de unde $a = 0,2 \cdot a + 184$ și obținem $a = 230 \text{ g}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți raportul numerelor:

a) 2 și 6;

b) 7 și 10;

c) 15 și 43;

d) 256 și 32;

e) 3^3 și 3;

f) 3,5 și 0,2.

2. Considerăm numerele $a = 12$ și $b = 24$. Aflați rapoartele numerelor de mai jos:

a) a și b ;

b) $2a$ și $a + b$;

c) $3b - 10$ și $a + 20$.

3. Calculați valoarea raportului numerelor:

a) 6 și 4;

b) 3 și 12;

c) 18 și 75;

d) 3^4 și 15;

e) 2,5 și 12,5;

f) 0,28 și 0,14.

4. Aflați numerele necunoscute din rapoartele următoare:

a) $\frac{a}{3} = 1,5$;

b) $\frac{7}{b} = 2$;

c) $\frac{25}{c} = 0,5$;

d) $\frac{315}{15} = d$;

e) $\frac{e}{3,4} = 0,5$.

16. Matei are o hartă a României cu scara $1 : 5000000$ și măsoară pe aceasta, cu rigla gradată, o distanță de 7,8 cm între orașele Iași și Cluj. Stabiliți care este distanța reală (pe teren) dintre cele două orașe.

17. Mara dorește să realizeze o schiță la scara $1 : 250000$ a orașului în care locuiește, marcând principalele instituții. Știind că pe teren universitatea se află la distanța de 10,5 km față de primăria orașului, aflați la ce distanță se află reprezentările celor două clădiri pe schița Marei.

18. George analizează harta complexului montan în care va merge în tabără și observă că cea mai mare dintre piscine este reprezentată sub forma unui pătrat cu latura de 5 cm. Știind că scara hărții este $1 : 1000$, aflați:

- a) raportul dintre perimetrul piscinei de pe hartă și perimetrul piscinei reale;
- b) raportul dintre aria piscinei de pe hartă și aria piscinei reale.

19. Maria admiră într-un magazin mai multe schițe ale Arcului de Triumf din București, realizate la scări diferite. Pe prima schiță, având scara $1 : 150$, înălțimea Arcului, măsurată cu rigla, este de 18 cm.

a) Aflați scara celei de-a doua schițe, dacă pe această schiță înălțimea Arcului este egală cu 27 cm.

b) Aflați care este înălțimea Arcului (în cm) pe a treia schiță, dacă scara acesteia este $1 : 200$.

c) Ar fi posibil ca o schiță să aibă scara $1 : 250$, iar înălțimea Arcului pe aceasta să fie egală cu 10 cm? Justificați răspunsul.

20. Cea mai dens populată țară din lume este Monaco, un oraș-stat cu suprafața de aproximativ 2 km^2 și o populație de aproximativ 39000 de locuitori. Aflați densitatea populației în Monaco.

21. Aflați ce suprafață are o regiune cu densitatea de 27 de locuitori/ km^2 și cu o populație de 459 de locuitori.

22. Viteza medie de croazieră a unui elicopter este de 5 km/min, în comparație cu cea a unui avion, care este de 850 km/h. Aflați raportul dintre viteza avionului și cea a elicopterului.

23. Un avion parcurge distanța de 2730 km dintre Iași și Londra în 3 ore și 20 de minute. Aflați care este viteza medie de deplasare a acestui avion.

24. Aflați numărul rațional pozitiv x , cu proprietatea că valorile rapoartelor $\frac{x}{3}$ și $\frac{12}{x+1}$ sunt numere naturale.

CAPITOLUL III

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

III.1. NUMĂR ÎNTREG. MULȚIMEA $\mathbb{Z}$ A NUMERELOR ÎNTREGI



- **Mulțimea numerelor întregi** se notează cu $\mathbb{Z}$ și este:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Mulțimea numerelor întregi pozitive: $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Mulțimea numerelor întregi negative: $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$.

Mulțimea numerelor întregi nenule: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

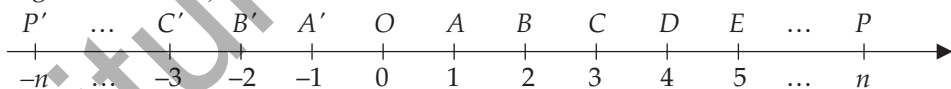
Observăm că $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Numărul întreg 0 nu este nici pozitiv, nici negativ.

- **Axa numerelor** este o dreaptă pe care au fost fixate: un punct O numit **origine**, un **sens pozitiv de parcurgere** indicat de o săgeată (de la origine spre dreapta) și o **unitate de măsură**.

Fiecărui număr întreg a îi corespunde pe axă un unic punct notat $P(a)$; numărul întreg a se numește **ordonată** (abscisa) punctului P . Originea axei numerelor are coordonata 0 și se notează $O(0)$.

Numerele întregi pozitive n corespund punctelor situate la dreapta originii, astfel încât distanța dintre origine și punctul corespunzător $P(n)$ să fie egală cu n unități de măsură. Similar, numerele întregi negative $-n$, (unde $n \in \mathbb{N}^*$) corespund punctelor situate la stânga originii, astfel încât distanța de la origine la punctul $P'(-n)$ să fie egală cu n unități de măsură.



Dacă două puncte sunt așezate simetric față de origine pe axă, atunci numerele corespunzătoare lor se numesc **numere opuse**.

Exemplu: Opusul lui 2 este -2 , iar opusul lui -3 este 3.

- **Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr întreg a , notat cu $|a|$, este numărul natural ce reprezintă distanța de la origine la punctul care îi corespunde lui a pe axa numerelor. Modulul numărului întreg 0 este egal cu 0.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a > 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}.$$

Exemple: $|+1| = +1$, $|-2| = -(-2) = +2$, $|0| = 0$.

Proprietăți: 1. $|a| > 0$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}^*$.

2. $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$.

• **Compararea și ordonarea numerelor întregi.** Dintre două numere întregi reprezentate pe axa numerelor, numărul mai mare este situat în dreapta celui alt.

Reguli pentru compararea numerelor întregi:

1. Dintre două numere întregi pozitive, mai mare este numărul cu modulul mai mare. Exemplu: $+2 < +5$.

2. Dintre două numere întregi negative, mai mare este numărul cu modulul mai mic. Exemplu: $-4 < -1$.

3. Dintre două numere întregi cu semne diferite, mai mare este numărul pozitiv. Exemplu: $-7 < +2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Asociați fiecărui număr ce apare în enunțurile de mai jos unul dintre semnele „+” sau „-”:

- Ana a primit de la bunici 250 de lei.
- Bianca i-a dat Anei 100 de lei.
- Codin a făcut scufundări până la o adâncime de 20 de metri.
- Daria a escaladat un versant înalt de 40 de metri.
- La Polul Nord temperatura a coborât cu 42° sub 0° .
- În mijlocul verii, la noi sunt uneori peste 35°C .

2. Completați tabelul de mai jos:

n	-3			5	-17		$-(-2)$	
Opusul lui n		0	2			-8		$-(-1)$

3. Considerăm mulțimea $A = \{-36, -35, -34, \dots, 46, 47, 48\}$. Stabiliți câte elemente ale mulțimii A au proprietatea că opusele lor sunt, la rândul lor, elemente ale mulțimii A .

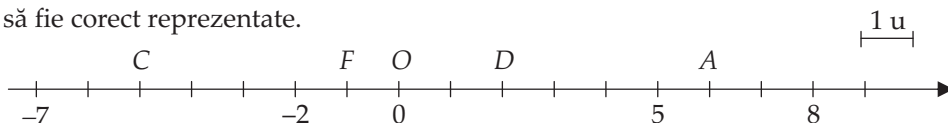
4. Reprezentați pe axa numerelor, folosind ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm, numerele întregi de mai jos:

- 1, 3, -2, 4, -1, -4;
- 3, 2, 5, 0, -6, -5.

5. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:

- 5, -5, 10, 20, -30, -15;
- 75, -150, 100, 25, -200, -50.

6. Considerăm pe axa numerelor punctele $A(6)$, $B(8)$, $C(-5)$, $D(2)$, $E(-3)$, $F(-1)$, $G(5)$, $H(-7)$, $I(-2)$ și $O(0)$. Completați desenul de mai jos, astfel încât toate punctele de mai sus să fie corect reprezentate.



17. Scrieți: a) patru numere întregi negative mai mari decât -5 ;
b) patru numere naturale mai mici decât 4 ;
c) patru numere întregi cuprinse între -3 și 3 ;
d) patru numere întregi pare cuprinse între -20 și -10 ;
e) patru numere întregi consecutive, dintre care exact două sunt opuse.
18. Scrieți: a) cel mai mare număr întreg de două cifre;
b) cel mai mic număr întreg de două cifre, cu cifrele distincte;
c) cel mai mare număr întreg mai mic decât -36 ;
d) cel mai mic număr întreg mai mare decât -12 .
19. Ordonați crescător numerele întregi de mai jos:
a) $-9, 8, -5, -7, 0, 3$; b) $1, -10, -11, 2, -14, -18$;
c) $-39, -41, 40, -38, 42, -43$; d) $-1, -11, -111, -1111, -11111$;
e) $-1122, -1221, -1212, -1222, -1220$.
20. Ordonați descrescător următoarele numere întregi:
 $-|-2|, -(-3), -(+5), -|1|, -7, -(-9), +|-11|, -|3|, |-|-6||, -|-|-4||$.
21. Comparați numerele întregi de mai jos:
a) $|-2|$ și 2 ; b) $|1|$ și -1 ; c) $-(-3)$ și 4 ; d) $-|-4|$ și -5 ;
e) $|-9|$ și 3^2 ; f) -2^3 și -8 ; g) -7 și -11 ; h) $-(+5)$ și $-|5|$.
22. Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 5\}$. Determinați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
23. Aflați numerele întregi a , b , c și d , știind că:
a) $|a| = 2$; b) $|b| \leq 3$; c) $|c| > 4$; d) $1 < |d| \leq 4$.
24. Determinați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile următoare:
 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| = 3\}$;
 $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$; $E = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid |x| \leq 5\}$; $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < -7\}$.
25. Tabelul de mai jos cuprinde temperaturile înregistrate de o stație meteorologică din Munții Bucegi, într-o săptămână din luna aprilie, măsurate la trei ore diferite:

	Ora la care a fost înregistrată temperatura:		
	6:00	13:00	20:00
Luni	-8°C	2°C	-5°C
Mărti	-11°C	-5°C	-13°C
Miercuri	-15°C	-10°C	-15°C
Joi	-9°C	-1°C	-7°C
Vineri	-5°C	2°C	0°C
Sâmbătă	-5°C	4°C	1°C
Duminică	-4°C	2°C	-3°C

Determinați:

- a) cea mai mică temperatură măsurată (specificați ziua și ora);
- b) cea mai mare temperatură măsurată (specificați ziua și ora);
- c) temperatura măsurată joi la ora 20:00;
- d) în ce zi a fost cel mai cald la prânz;
- e) în ce zi a fost cel mai frig dimineața.

26. Determinați cifra a în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $-13 < \overline{-1a}$;

b) $\overline{-2a5} \geq -256$;

c) $\overline{-3a4} \leq \overline{-34a}$.

III.2. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR ÎNTREGI



• Rezultatul adunării a două numere întregi se numește **sumă**, iar numerele care se adună se numesc **termeni**.

• **Reguli** pentru adunarea numerelor întregi:

1. Pentru a aduna două numere întregi care au **același semn**, se adună modulele lor, iar rezultatul are semnul celor doi termeni.

Exemple: $(+2) + (+17) = +19$;

$$(-2) + (-3) = -5.$$

2. Pentru a aduna două numere întregi care au **semne diferite**, se scad modulele lor, iar rezultatul are semnul termenului cu modulul mai mare.

Exemple: $(+11) + (-3) = +8$;

$$(-5) + (+2) = -3$$

$$(+1) + (-1) = 0.$$

• **Proprietățile adunării** numerelor întregi:

P₁. Adunarea este **comutativă**: $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele întregi a și b .

P₂. Adunarea este **asociativă**: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele întregi a , b și c .

P₃. Numărul întreg 0 este **element neutru** pentru adunare: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul întreg a .

P₄. Orice număr întreg a are un **opus**, notat $-a$, astfel încât $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

• **Diferența** a două numere întregi a și b este numărul întreg obținut prin adunarea numărului a cu opusul lui b : $a - b = a + (-b)$.

În acest caz a se numește **descăzut**, iar b se numește **scăzător**.

Exemple: $(+5) - (-2) = (+5) + (+2) = +7$;

$$(+3) - (+7) = (+3) + (-7) = -4.$$

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

- (1p) 1. Calculați $12 - 5 \cdot (16 - 36)$.
- (1p) 2. Aflați suma dintre cel mai mare număr întreg care este mai mic decât -9 și cel mai mic număr întreg care este mai mare decât -5 .
- (1p) 3. Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x \leq 1\}$.
- (1p) 4. Calculați $10 \cdot [-2 + 4 \cdot (3 - 5 \cdot 2)]$.
- (1p) 5. Determinați toți divizorii întregi ai numărului 49.
- (1p) 6. Calculați $0^5 - (-2)^{16} : (-2)^{14} + (3^5)^6 : 3^{30}$.
- (1p) 7. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $2x + 3 = 4x - 9$.
- (1p) 8. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ inecuația $2 - 3(x - 1) \geq 17$.
- (1p) 9. Determinați toate numerele întregi x , știind că $x - 1$ divide numărul $2x + 3$.

TESTUL 2

- (1p) 1. Calculați $64 : (-8) - (-2) \cdot (+3)$.
- (1p) 2. Calculați $(-3)^3 + (-2)^2 + (-1)^0 - (-2)^{40} : 2^{38}$.
- (1p) 3. Ordonăți crescător numerele: $a = (-1)^{15}$, $b = (-2)^5$, $c = (-3)^2$, $d = (-2)^4$ și $e = (-13)^0$.
- (1p) 4. Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |1 - x| \leq 2\}$.
- (1p) 5. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $2(x - 1) + 3x = 6x + 12$.
- (1p) 6. Calculați $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots + 97 + 98 - 99 - 100$.
- (1p) 7. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ inecuația $(2x - 1) : (-3) \leq 11$.
- (1p) 8. Determinați toate perechile de numere întregi (x, y) , știind că $xy + 2x + 3 = 0$.
- (1p) 9. Zece numere întregi consecutive au produsul egal cu 0. Determinați valoarea minimă și valoarea maximă a sumei celor zece numere.

CAPITOLUL IV

MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1. NUMĂR RAȚIONAL. MULȚIMEA $\mathbb{Q}$ A NUMERELOR RAȚIONALE



• **Mulțimea numerelor raționale:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Observații: 1. Au loc incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este mulțimea numerelor raționale nenule.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$, unde $\mathbb{Q}_-$ este mulțimea numerelor raționale negative și $\mathbb{Q}_+$ este mulțimea numerelor raționale pozitive.

3. Numărul rațional $\frac{a}{b}$ este întreg dacă și numai dacă a se divide cu b .

• **Forme de scriere a numerelor raționale.** Un număr rațional poate fi reprezentat:

i) prin fracții ordinare echivalente (reamintim că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$, unde a, b, c, d sunt numere întregi cu $b \neq 0$ și $d \neq 0$);

ii) printr-o fracție zecimală finită;

iii) printr-o fracție zecimală infinită periodică (simplă sau mixtă).

• **Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale.** Un număr rațional pozitiv reprezentat prin fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}$ și $b \geq 2$, se transformă, împărțind numărul a la numărul b , în:

i) fracție zecimală finită – dacă descompunerea lui b în factori primi conține numai factorii 2 sau 5;

Exemple: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{17}{4} = 4,25$.

ii) fracție zecimală periodică simplă – dacă descompunerea lui b în factori primi conține factori diferiți de 2 și de 5;

Exemple: $\frac{1}{3} = 0,(3)$; $\frac{17}{11} = 1,(54)$; $\frac{125}{27} = 4,(629)$.

iii) fracție zecimală periodică mixtă – dacă descompunerea lui b în factori primi conține cel puțin unul din factorii 2 sau 5 și cel puțin un alt factor prim diferit de 2 și de 5.

Exemple: $\frac{1}{6} = 0,1(6)$; $\frac{47}{30} = 1,5(6)$; $\frac{1801}{330} = 5,4(57)$.

• **Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare** se face după următoarele reguli:

i) $\overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{a_0 a_1 \dots a_n}{10^n}$ (transformarea fracțiilor zecimale finite);

ii) $\overline{a_0, (a_1 a_2 \dots a_n)} = \frac{a_0 a_1 \dots a_n - a_0}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}}}$ (transformarea fracțiilor periodice simple);

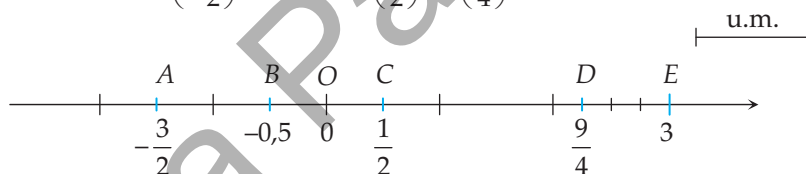
iii) $\overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_k)} = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_k - a_0 a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ cifre}} \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ cifre}}}$ (transformarea fracțiilor

lor periodice mixte).

• **Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor.** Fiecărui număr rațional r îi corespunde un punct unic pe axa numerelor, notat $P(r)$. Invers, fiecărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un unic număr rațional. Dat punctul $P(r)$, numărul rațional r se numește **ordonată (abscisă)**. Numerele raționale pozitive r corespund punctelor $P(r)$ situate la dreapta originii O , astfel încât distanța de la O la P să fie egală cu r unități de măsură; similar, numerele raționale negative $-r$ (cu $r \in \mathbb{Q}_+^*$) corespund punctelor $P'(-r)$ situate la stânga originii O , astfel încât distanța de la O la P' să fie egală cu r unități de măsură.

Exemplu: Pe axa numerelor de mai jos sunt reprezentate punctele:

$$A\left(-\frac{3}{2}\right), B(-0,5), C\left(\frac{1}{2}\right), D\left(\frac{9}{4}\right) \text{ și } E(3).$$



• Dacă punctele P și P' sunt așezate simetric față de origine pe axa numerelor, atunci numerele corespunzătoare lor se numesc **numere opuse**.

Exemple: Opusul lui $\frac{1}{2}$ este $-\frac{1}{2}$, iar opusul lui $-0,75$ este $0,75$.

• **Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr rațional r , notat $|r|$, este numărul ce reprezintă distanța de la origine la punctul $P(r)$.

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{dacă } r > 0 \\ 0, & \text{dacă } r = 0. \\ -r, & \text{dacă } r < 0 \end{cases}$$

Exemple: $\left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7}$; $|-0,3(7)| = 0,3(7)$; $|2,5| = 2,5$; $\left|\frac{11}{3}\right| = \frac{11}{3}$.

• **Compararea și ordonarea numerelor raționale.** Dintre două numere raționale, este mai mare cel a cărui reprezentare pe axa numerelor este situată la dreapta reprezentării celuilalt.

Reguli pentru compararea numerelor raționale:

1. Dintre două numere raționale cu semne diferite, mai mare este numărul pozitiv.

Exemple: $-\frac{137}{2} < \frac{1}{2}$; $-13,21 < 0,37$.

2. Dintre două numere raționale negative, mai mare este cel cu modulul mai mic.

Exemple: $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{4}$; $-13,5(7) < -13,5$.

• **Partea întreagă și partea fracționară ale unui număr rațional.** Pentru numărul rațional r , **partea** sa **întreagă** este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu r , notat $[r]$. Pentru orice $r \in \mathbb{Q}$ are loc: $[r] = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \leq r < n + 1$.

Exemple: $\left[\frac{12}{5}\right] = 2$, deoarece $2 \leq \frac{12}{5} < 3$; $\left[-\frac{11}{2}\right] = -6$, deoarece $-6 \leq -\frac{11}{2} < -5$;

$[-13,(57)] = -14$, deoarece $-14 \leq -13,(57) < -13$; $[-7] = -7$; $\left[\frac{12}{3}\right] = 4$.

Pentru numărul rațional r , **partea** sa **fracționară** este numărul notat $\{r\}$, obținut ca diferență între r și $[r]$:

$$\{r\} = r - [r], \text{ oricare ar fi } r \in \mathbb{Q}.$$

Exemple: $\left\{\frac{12}{5}\right\} = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5} = 0,4$; $\left\{-\frac{11}{2}\right\} = -\frac{11}{2} - (-6) = \frac{1}{2} = 0,5$; $\left\{\frac{12}{3}\right\} = \frac{12}{3} - 4 = 0$;

$\{-13,(57)\} = -13,(57) - (-14) = 0,(42)$; $\{-7\} = -7 - (-7) = 0$.

Observație: $[r] \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq \{r\} < 1$, pentru orice $r \in \mathbb{Q}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Considerăm mulțimea $A = \left\{-3; 0,375; -1,8(3); -0,(45); \frac{56}{14}\right\}$.

a) Arătați că $A = \left\{-3, \frac{3}{8}, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{11}, 4\right\}$.

b) Determinați $A \cap \mathbb{N}$.

c) Câte elemente are mulțimea $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$?

Soluție: a) $0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$; $-1,8(3) = -1\frac{83-8}{90} = -1\frac{75}{90} = -1\frac{5}{6} = -\frac{11}{6}$; $-0,(45) = -\frac{45}{99} = -\frac{5}{11}$;

$\frac{56}{14} = 4$. Rezultă că $A = \left\{-3, \frac{3}{8}, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{11}, 4\right\}$.

b) $A \cap \mathbb{N} = \{4\}$.

c) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{ \frac{3}{8}, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{11} \right\}$, mulțime care are trei elemente.

2. Numerelor raționale $a = -\frac{1}{20}$ și $b = -\frac{1}{21}$ le asociem pe axa numerelor punctele A și B .

a) Reprezentați punctele A și B pe axa numerelor.

b) Arătați că $a < b$.

c) Calculați lungimea segmentului AB .

d) Scrieți trei numere raționale cuprinse între a și b .

Soluție: a)  unde $OA = \frac{1}{20}$ și $OB = \frac{1}{21}$.

b) Cum punctul A este situat pe axa numerelor la stânga punctului B , rezultă că $a < b$.

c) $AB = OA - OB = \frac{1}{420}$.

d) Aducem fracțiile la același numitor: $a = -\frac{21}{420}$, $b = -\frac{20}{420}$. Amplificăm fracțiile obținute pentru a mări distanța dintre numărătorii lor. De exemplu, deoarece $a = -\frac{210}{4200}$ și $b = -\frac{200}{4200}$, numerele cerute pot fi $-\frac{203}{4200}$, $-\frac{202}{4200}$ și $-\frac{201}{4200}$.

3. Determinați numerele întregi x , știind că:

a) $\frac{-15}{2x+1}$ este număr natural;

b) $\frac{3x+7}{2x-1}$ este număr întreg.

Soluție: a) $\frac{-15}{2x+1}$ este număr natural dacă și numai dacă $2x+1$ este divizor negativ al numărului -15 , deci $2x+1 \in \{-15, -5, -3, -1\}$. Rezultă că $x \in \{-8, -3, -2, -1\}$.

b) $\frac{3x+7}{2x-1}$ este un număr întreg dacă și numai dacă $2x-1 \mid 3x+7$. Cum $2x-1 \mid 2x-1$ pentru orice x întreg, rezultă că $2x-1 \mid 6x+14$ și $2x-1 \mid 6x-3$. De aici, $2x-1 \mid 17$. Astfel, $2x-1 \in \{-17, -1, 1, 17\}$, prin urmare $x \in \{-8, 0, 1, 9\}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți sub forma $+\frac{a}{b}$ sau $-\frac{a}{b}$, unde a, b sunt numere naturale nenule, numerele:

a) $-\frac{5}{11}$; b) $\frac{6}{-13}$; c) $-\frac{5}{-9}$; d) $-\frac{4}{19}$; e) $-\frac{2}{-3}$; f) $-\frac{9}{-8}$; g) 2; h) -3.

2. Arătați că fracțiile: $-\frac{20}{35}, \frac{24}{-42}, \frac{-8}{14}, -\frac{52}{91}, -\frac{-44}{-77}$ sunt reprezentanți ai aceluiași număr rațional. Exprimați acest număr sub formă de fracție ordinară ireductibilă.

3. Determinați numerele întregi a și b , dacă fracțiile $\frac{15}{a}, \frac{-18}{b}$ și $\frac{21}{49}$ sunt reprezentanți ai aceluiași număr rațional.

4. Determinați numerele întregi a, b și c pentru care: $-\frac{2}{3} = \frac{a}{-9} = \frac{4b}{6} = \frac{14}{c+1}$.

5. a) Determinați reprezentanții numărului rațional $\frac{5}{11}$ care au drept numitor un număr natural situat între 130 și 150.

b) Determinați reprezentanții numărului rațional $-\frac{7}{12}$ care au drept numărător un număr întreg situat între -90 și -72 .

6. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile următoare:

- a) $\frac{-2}{1} \in \mathbb{Z}$; b) $-1,3 \notin \mathbb{Q}$; c) $-\frac{1}{4} \notin \mathbb{N}$;
d) $-\frac{11}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; e) $1,2 \in \mathbb{Q}$; f) $-5 \notin \mathbb{Q}$.

7. Stabiliți în ce mulțime este numărul a , urmând modelul de pe prima coloană:

Mulțimea \ a	$-2,3$	$\frac{3}{4}$	-3	$-\frac{7}{5}$	$\frac{-18}{-6}$	$0,5$	4
$\mathbb{N}$	F						
$\mathbb{Z}$	F						
$\mathbb{Q}$	A						
$\mathbb{Q}_+$	F						
$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	A						

8. Considerăm mulțimea $A = \left\{ -10; \frac{1}{-2}; \frac{-8}{-2}; -\frac{14}{7}; -0,2; \frac{27}{7}; 1\frac{22}{22}; 0,13 \right\}$. Determinați:

- a) $A \cap \mathbb{N}$; b) $A \cap \mathbb{Z}$; c) $A \setminus \mathbb{Q}$.

9. Scrieți sub formă de fracție ordinară ireductibilă următoarele fracții zecimale:

- a) $-1,25; -2,04; 3,125; -1,4; -0,14; 1,0652$;
b) $3,(6); -0,(45); -1,(18); 7,(3); -0,(3366); -1,(522)$;
c) $-0,2(7); 1,41(6); -1,1(36); -4,1(6); 1,013(8)$.

10. Scrieți ca fracție zecimală următoarele fracții ordinare:

- a) $-\frac{27}{10}; -\frac{27}{100}; -\frac{27}{1000}; \frac{31}{5}; -\frac{31}{4}; -\frac{23}{8}; \frac{17}{20}; -\frac{43}{40}$;

26. Dați exemple de numere raționale pozitive și de numere raționale negative având partea fracționară egală cu:

- a) 0; b) 0,5; c) $\frac{1}{3}$; d) 0,14.

27*. Fie a și b două numere raționale. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

- a) Dacă $a \leq b$, atunci $[a] \leq [b]$. b) Dacă $[a] \leq [b]$, atunci $a \leq b$.
c) Dacă $a \leq b$, atunci $\{a\} \leq \{b\}$. d) Dacă $\{a\} \leq \{b\}$, atunci $a \leq b$.

28. Aflați cifrele nenule a și b , știind că $\overline{-a,(b)}$ și $\overline{b,(a)}$ sunt direct proporționale cu $0,(19)$ și $-0,(1)$.

29*. Determinați cifrele nenule distincte a și b , știind că $\frac{a}{b} = \overline{0,a(b)}$.

30*. Pentru n număr întreg, considerăm numerele raționale $a = \frac{7n-5}{12}$ și $b = \frac{5n-3}{12}$.

- a) Există $n \in \mathbb{Z}$ pentru care a sau b este număr întreg?
b) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, a și b nu pot fi simultan întregi.

IV.2. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR RAȚIONALE



• Prin **adunarea** numerelor raționale a și b se obține un număr rațional, notat $a + b$, numit **suma** numerelor a și b ; la fel ca în cazul numerelor naturale sau întregi, numerele a și b care se adună se numesc **termeni**.

• Reguli pentru adunarea numerelor raționale:

1. Pentru a aduna două numere raționale care au același semn, se adună modulele lor, iar rezultatul are același semn ca cei doi termeni.

Exemple: $1,35 + 0,25 = 1,6$;

$$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{4}.$$

2. Pentru a aduna două numere raționale care au semne diferite, se scad modulele lor (din cel mai mare se scade cel mai mic), iar rezultatul are semnul termenului cu modulul mai mare.

Exemple: $10,2 + (-11,3) = -(11,3 - 10,2) = -1,1$;

$$\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = +\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; \quad \left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{5}{6} = 0.$$

• Proprietățile adunării numerelor raționale:

P₁. Adunarea este **comutativă**: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$.

P₂. Adunarea este **asociativă**: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL V NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1. UNGHIIUL. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

Definiție. Unghiul este reuniunea a două semidrepte care au aceeași origine.

Cele două semidrepte se numesc **laturile** unghiului, iar originea lor comună se numește **vârful** unghiului.

În figura 1 este reprezentat unghiul xOy . Laturile sale sunt semidreptele Ox și Oy , iar vârful său este punctul O .

Dacă pe semidreptele Ox și Oy considerăm punctele A , respectiv B , unghiul poate fi notat $\angle AOB$. Dacă nu există pericol de confuzie, putem nota simplu $\angle O$.

Interiorul unghiului xOy , notat $\text{Int}(\angle xOy)$, este intersecția semiplanului determinat de dreapta OA ce conține punctul B cu semiplanul determinat de dreapta OB ce conține punctul A . Porțiunea din plan rămasă după eliminarea unghiului și a interiorului său se numește **exteriorul** unghiului.

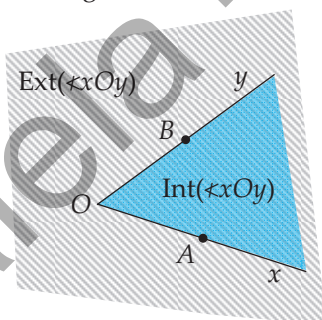


Fig. 1

Unghiul alungit este un unghi ale cărui laturi sunt două semidrepte opuse.

Unghiul nul este un unghi ale cărui laturi sunt două semidrepte identice.

Un unghi care nu este nici alungit și nici nul numește **unghi propriu**.

Măsura unui unghi este un număr de la 0 la 180, care se asociază unghiului prin *măsurare cu raportorul* (figura 2).

Unghiul alungit se împarte în 180 de părți egale, numit **grade**. La rândul său, gradul se împarte în 60 de **minute**, iar minutul în 60 de **secunde**.

$$1^\circ = 60', \quad 1' = 60''$$

Clasificarea unghiurilor proprii (figura 3):

- unghi **ascuțit**: are măsura cuprinsă între 0° și 90° ;
- unghi **drept**: are măsura de 90° ;
- unghi **obtuz**: are măsura cuprinsă între 90° și 180° .

Unghiul nul are măsura de 0° , iar cel alungit are măsura de 180° .

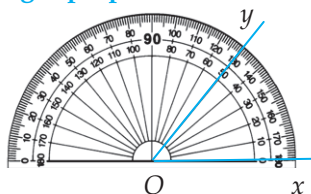


Fig. 2

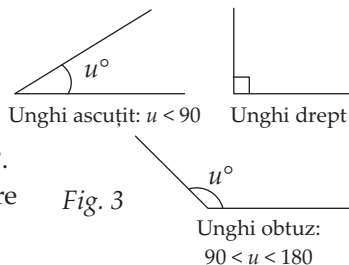


Fig. 3

Unghiurile congruente sunt două sau mai multe unghiuri având aceeași măsură; notăm $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$ sau, mai simplu, $\sphericalangle xOy = \sphericalangle x'O'y'$ (numerele care exprimă măsurile celor două unghiuri sunt egale).

PROBLEME PROPUSE

- Stabiliți care dintre notațiile de mai jos desemnează unghiul din figura 4:
 a) $\sphericalangle AOB$; b) $\sphericalangle AOC$; c) $\sphericalangle DOB$; d) $\sphericalangle DAB$;
 e) $\sphericalangle O$; f) $\sphericalangle BOC$; g) $\sphericalangle CAB$; h) $\sphericalangle COD$.
- Numiți toate unghiurile formate de semidreptele din figura 5.
- Urmărind figura 6, stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele afirmații:
 a) $C \in \sphericalangle AOD$; b) $E \notin \sphericalangle BOC$; c) $E \in \text{Int}(\sphericalangle AOB)$;
 d) $E \in \text{Ext}(\sphericalangle AOB)$; e) $(OB \subset \text{Int}(\sphericalangle AOC))$; f) $\sphericalangle AOB \subset \sphericalangle AOC$.

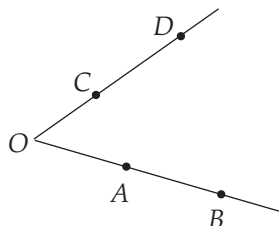


Fig. 4

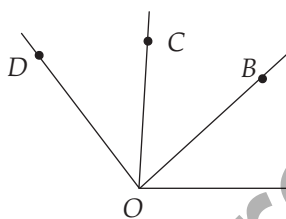


Fig. 5

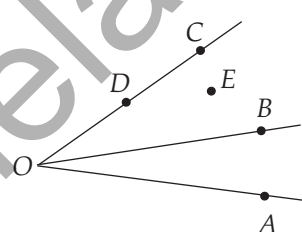


Fig. 6

- În figura 7 este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele afirmații:

- $D \in \text{Int}(\sphericalangle ABC)$;
- $B' \in \text{Int}(\sphericalangle A'AB)$;
- $C' \in \text{Int}(\sphericalangle A'AB)$;
- $D' \in \text{Int}(\sphericalangle A'AB)$;
- $D' \in \text{Int}(\sphericalangle A'AD)$;
- $D' \in \text{Int}(\sphericalangle C'CD)$.

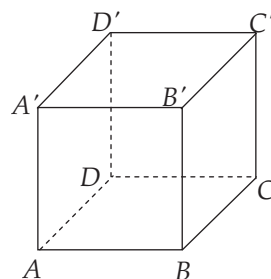


Fig. 7

- Desenați două unghiuri $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle PQR$, astfel încât:
 a) $\text{Int}(\sphericalangle AOB) \cap \text{Int}(\sphericalangle PQR) = \emptyset$;
 b) $\text{Int}(\sphericalangle AOB) \subset \text{Int}(\sphericalangle PQR)$;
 c) $\text{Int}(\sphericalangle AOB) \cap \text{Int}(\sphericalangle PQR) \neq \emptyset$ și $\text{Int}(\sphericalangle AOB) \not\subset \text{Int}(\sphericalangle PQR)$.
- Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile din figura 8 și scrieți măsura fiecăruia:

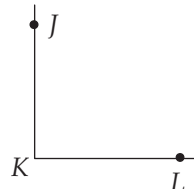
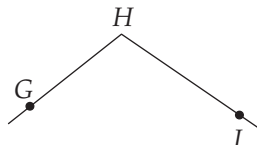
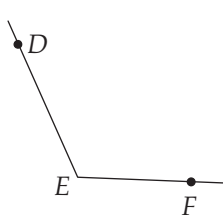
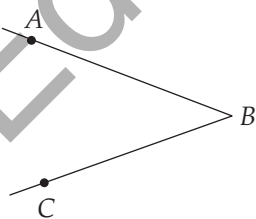


Fig. 8

7. Desenați unghiuri ABC , DEF , GHI , JKL având măsurile: $\sphericalangle ABC = 65^\circ$, $\sphericalangle DEF = 155^\circ$, $\sphericalangle GHI = 110^\circ$, $\sphericalangle JKL = 32^\circ$.

8. Notați unghiurile din figura 9 și precizați tipul fiecăruia (nul, ascuțit, drept, obtuz sau alungit).

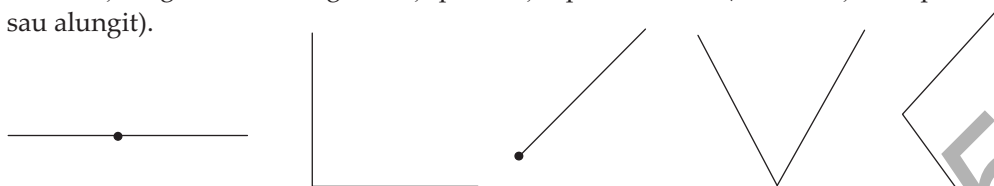


Fig. 9

9. În figura 10 este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Identificați cât mai multe unghiuri drepte având drept laturi câte două dintre muchiile paralelipipedului.

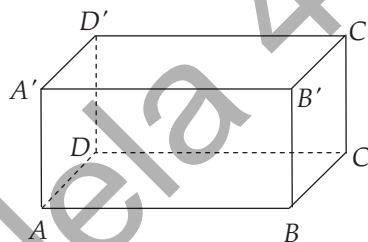


Fig. 10

10. Transformați:

a) în minute: 12° ; $3^\circ 12'$; $25^\circ 34'$;

b) în grade: $1500'$; $1980'$; $18000'$.

11. Calculați:

a) $25^\circ + 73^\circ$; $13^\circ 12' + 47^\circ 35'$; $103^\circ 44' + 67^\circ 39'$;

b) $73^\circ - 25^\circ$; $35^\circ 43' - 17^\circ 35'$; $28^\circ 15' - 19^\circ 42'$; $103^\circ - 25^\circ 13'$;

c) $27^\circ \cdot 3$; $32^\circ 14' \cdot 4$; $18^\circ 32' \cdot 5$;

d) $144^\circ : 6$; $32^\circ : 5$; $25^\circ 15' : 3$.

12. Două unghiuri au măsurile de $15^\circ 12'$, respectiv 24° .

Arătați că raportul k al măsurilor lor verifică relația

$$\frac{1}{2} < k < \frac{2}{3}.$$

13. În figura 11, unghiurile AOB , BOC și COD au măsurile de 42° , 23° , respectiv 48° . Determinați măsurile unghiurilor AOC , BOD și AOD .

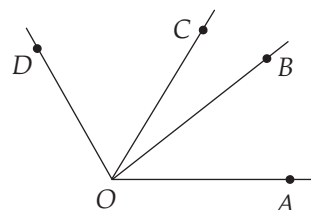


Fig. 11

14. În figura 12, unghiurile AOB , BOC , COD , DOE și EOF sunt congruente, iar măsura unghiului AOF este de 124° . Determinați măsurile unghiurilor AOB , AOC , BOE și BOF .

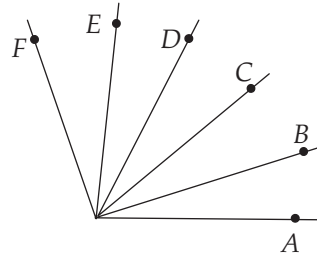


Fig. 12

15. Se consideră unghiul alungit AOB și semidreptele OC și OD , ambele situate în unul dintre semiplanele delimitate de dreapta AB , astfel încât $\sphericalangle AOC = 35^\circ$ și $\sphericalangle COD = 110^\circ$. Demonstrați că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

16. Se consideră unghiul alungit AOB și semidreptele OC și OD , ambele situate în unul dintre semiplanele delimitate de dreapta AB , astfel încât $\angle AOC = 65^\circ$ și $\angle COD = 32^\circ$. Determinați măsurați unghiului BOD .

17. Se consideră unghiul alungit AOB și semidreptele OC și OD , situate în semiplane opuse delimitate de dreapta AB , astfel încât $\angle AOC = 53^\circ$ și $\angle AOD = 127^\circ$.

a) Determinați măsurați unghiurilor BOC și BOD .

b) Arătați că punctele C , O și D sunt coliniare.

18. Măsura unghiului AOB se exprimă, în grade, printr-un număr natural. Semidreapta OC , interioară unghiului AOB , formează cu laturile acestuia unghiuri cu măsurile $a^\circ b'$, respectiv $b^\circ a'$, unde a și b sunt numere naturale nenule mai mici decât 60. Determinați măsura unghiului AOB .

V.2. UNGHIIURI COMPLEMENTARE, UNGHIIURI SUPLEMENTARE.

UNGHIIURI ADIACENTE



Definiție. Două unghiuri se numesc **complementare** dacă suma măsurilor lor este 90° . Fiecare dintre cele două unghiuri se numește **complement** al celuilalt.

Definiție. Două unghiuri se numesc **suplementare** dacă suma măsurilor lor este 180° . Fiecare dintre cele două unghiuri se numește **suplement** al celuilalt.

Definiție. Două unghiuri proprii se numesc **adiacente** dacă au vârf comun, o latură comună, iar laturile lor necomune sunt situate de o parte și de alta a laturii comune (figura 1).

Observație. Dacă unghiurile AOB și BOC sunt adiacente, atunci interioarele lor sunt disjuncte:

$$\text{Int}(\angle AOB) \cap \text{Int}(\angle BOC) = \emptyset.$$

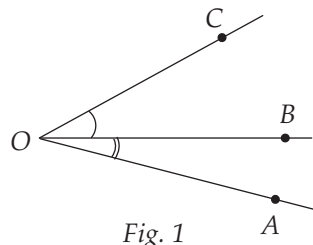
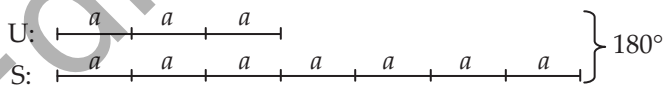


Fig. 1

PROBLEME REZOLVATE

1. Aflați măsura unui unghi, știind că este egală cu $\frac{3}{7}$ din măsura suplementului său.

Soluția 1: Putem folosi metoda grafică:



$$10a = 180^\circ \Rightarrow a = 18^\circ. \text{ Unghiul are măsura } 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ.$$

Soluția 2: Fie x măsura, în grade, a unghiului căutat. Avem: $x = \frac{3}{7}(180 - x) \Rightarrow 7x = 3(180 - x) \Rightarrow 7x = 540 - 3x \Rightarrow 10x = 540 \Rightarrow x = 54$.

CAPITOLUL VI

TRIUNGHIUL

VI.1. TRIUNGHIUL: DEFINIȚIE, ELEMENTE. PERIMETRU. CLASIFICĂRI



Definiție. Triunghiul ABC este reuniunea segmentelor AB , BC și CA , unde A , B și C sunt trei puncte necoliniare, numite **vârfurile** triunghiului.

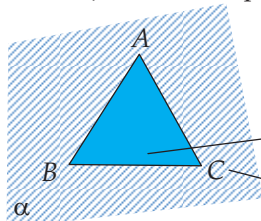


Fig. 1

$$\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$$

$$\text{Int } ABC = \text{Int}(\angle A) \cap \text{Int}(\angle B) \cap \text{Int}(\angle C)$$

$$\text{Ext } ABC = \alpha \setminus (\Delta ABC \cup \text{Int } ABC)$$

Elemente:

- **laturi:** segmentele AB , BC și AC ;
- **unghiuri:** $\angle A$, $\angle B$ și $\angle C$.

În mod uzual, lungimile laturilor triunghiului se notează folosind litera mică ce corespunde unghiului care se opune laturii, ca în figura 2.

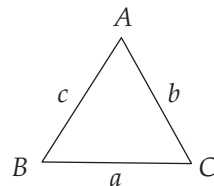


Fig. 2

Perimetrul triunghiului ABC este suma lungimilor laturilor acestuia:

$$\mathcal{P} = AB + BC + CA (= c + a + b).$$

Clasificarea triunghiurilor

• În funcție de lungimile laturilor:

1. Triunghiul **echilateral** este cel care are toate laturile egale: $a = b = c$ (figura 3).
2. Triunghiul **isoscel** este cel care are două laturi egale: $a = b$ sau $a = c$ sau $b = c$ (situația din figura 4). Latura care nu este implicată în egalitățile de mai sus se numește **baza** triunghiului isoscel. *Atenție:* triunghiul echilateral este isoscel în trei moduri, oricare latură putând fi considerată bază.
3. Triunghiul **oarecare** (**scalene**) este cel în care nu există o relație precisă între laturi. În unele cărți, prin triunghi oarecare se înțelege un triunghi cu laturile diferite două câte două: $a \neq b \neq c \neq a$ (figura 5).

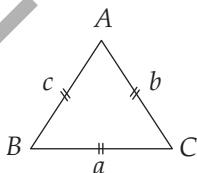


Fig. 3

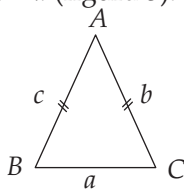


Fig. 4

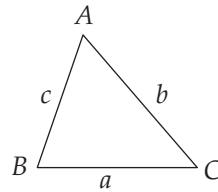


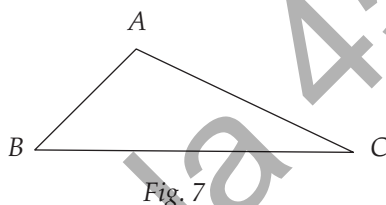
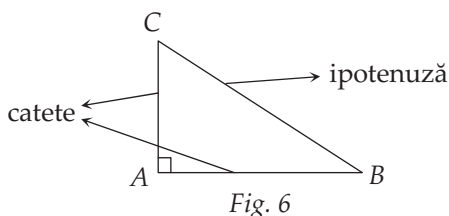
Fig. 5

• În funcție de măsurile unghiurilor:

1. Triunghiul **ascuțitunghic** este cel care are toate unghiurile ascuțite (triunghiurile din figurile 3, 4 și 5 sunt toate ascuțitunghice).

2. Triunghiul **dreptunghic** este cel care are un unghi drept (celelalte două fiind ascuțite). Laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura care se opune unghiului drept se numește **ipotenuză** (figura 6).

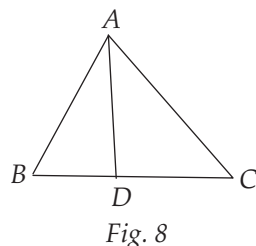
3. Triunghiul **obtusunghic** este cel care are un unghi obtuz (celelalte două fiind ascuțite; figura 7).



PROBLEME REZOLVATE

1. Urmăriți figura 8 și precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

- Segmentul BD este latură a triunghiului ABC .
- $\angle ABD$ este unghi al triunghiului ABC .
- D este vârf al triunghiului ABC .
- Punctul D aparține triunghiului ABC .
- Punctele B , D și C sunt vârfuri ale unui triunghi.



Soluție: a) Fals: segmentul BD este inclus în latura BC , dar nu coincide cu aceasta.

b) Adevărat: este tocmai unghiul B al triunghiului.

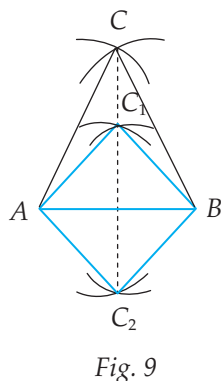
c) Fals: vârfurile triunghiului ABC sunt punctele A , B și C .

d) Adevărat: punctul D aparține segmentului BC , deci aparține triunghiului ABC , care este reuniunea segmentelor AB , BC și AC .

e) Fals: cele trei puncte sunt coliniare.

2. Fie A și B două puncte date în plan. Câte triunghiuri isoscele ABC cu baza AB există? Câte dintre acestea sunt echilaterale?

Soluție: Deschidem compasul astfel încât distanța r dintre vârfuri să fie mai mare decât jumătatea lungimii segmentului AB . Cu vârful în A , apoi în B , trasăm arce de cerc. Punctul C de intersecție a celor două arce este egal depărtat de punctele A și B : $CA = CB = r$ (figura 9), prin urmare triunghiul ABC este isoscel, cu baza AB . Cum deschiderea compasului este oarecare (cu restricția inițială $r > \frac{1}{2}AB$), există o infinitate de puncte C cu proprietatea



din enunț. Toate aceste puncte C sunt situate pe mediatoarea segmentului AB (dreapta punctată din figura 9). Triunghiurile echilaterale CAB sunt în număr de două: ele se obțin atunci când $r = AB$, triunghiurile fiind cele albastre din figura 9.

PROBLEME PROPUSE

1. Desenați un triunghi ABC . Numiți vârfurile, laturile și unghiurile sale. Folosind rigla, determinați perimetrul triunghiului.

2. Urmăriți figura 10 și precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $D \in \text{Int } ABC$; | b) $E \in \text{Int } ABC$; |
| c) $F \in \text{Ext } ABC$; | d) $F \in \Delta ABC$; |
| e) $D \in \Delta ABC$; | f) $A \notin \Delta DAB$. |

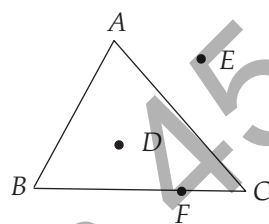


Fig. 10

3. Desenați un triunghi ABC și punctele coliniare D, E, F , astfel încât $D \in \text{Int } ABC$, $E \in \Delta ABC$, $F \in \text{Ext } ABC$.

4. În figura 11 este reprezentat un triunghi dreptunghic ABC .

- Care este unghiul drept?
- Care sunt catetele triunghiului? Dar ipotenuza sa?
- Care sunt unghiurile alăturate ipotenuzei?

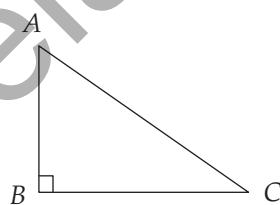


Fig. 11

5. În figura 12 sunt desenate cele două echeri din trusa geometrică. În ce categorie se încadrează fiecare în clasificarea triunghiurilor în funcție de laturi? Dar în clasificarea în funcție de unghiuri?

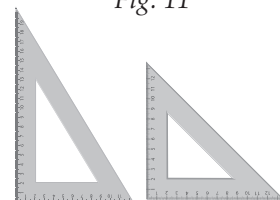


Fig. 12

6. Desenați un triunghi echilateral ABC cu latura de 4 cm și un triunghi echilateral MNP cu latura de 6 cm. Măsurați, folosind raportorul, cele șase unghiuri ale celor două triunghiuri. Ce observați?

7. Calculați perimetrul triunghiului ABC , știind că:

- $AB = 6$ cm, $BC = 7,5$ cm, $AC = 8,5$ cm;
- $AB = AC = 5$ cm, $BC = 4$ cm;
- triunghiul ABC este echilateral, cu $AB = 5$ cm.

8. Un triunghi echilateral are perimetrul de 21,6 cm. Determinați lungimea laturii triunghiului.

9. Două dintre laturile unui triunghi isoscel au lungimile 3 cm, respectiv 4 cm. Determinați perimetrul triunghiului.

10. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4, iar perimetrul triunghiului este 108 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului.

11. Perimetrul unui triunghi este 42 cm. Determinați lungimile laturilor, știind că ele se exprimă, în centimetri, prin trei numere naturale consecutive.

12. Lungimile laturilor unui triunghi se exprimă, în centimetri, ca în figura 13, unde a este un număr rațional pozitiv. Știind că perimetrul triunghiului este 13 cm, stabiliți natura acestuia.

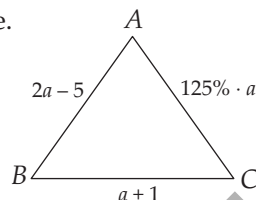


Fig. 13

13. În figura 14 este reprezentată o grădină având forma unui triunghi ABC , înconjurată de un gard (de-a lungul laturilor) cu lungimea de 96 m. Un alt gard unește punctul A cu un punct D al laturii BC . Gardul ce împrejmuește suprafața ABD are lungimea de 64 m, iar cel care împrejmuește suprafața ACD are lungimea de 72 m. Aflați lungimea gardului AD .

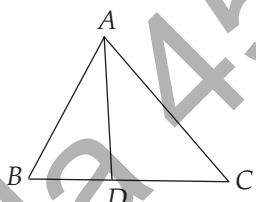


Fig. 14

14. Triunghiul CSF din figura 15 este o reprezentare la scara 1 : 20000 a traseului pe care îl parcurge Mihai în fiecare marți: pleacă de acasă (C) către școală (S), după care merge pe terenul de antrenament pentru fotbal (F) și de acolo se întoarce acasă. Folosind o riglă, determinați distanța pe care o parcurge Mihai în fiecare zi de marți.

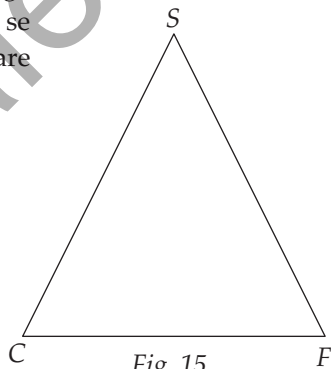


Fig. 15

15. Desenați:

- un triunghi ascuțitunghic ABC ;
- un triunghi dreptunghic ABC , cu $\angle A = 90^\circ$;
- un triunghi obtuzunghic ABC , cu $\angle B > 90^\circ$.

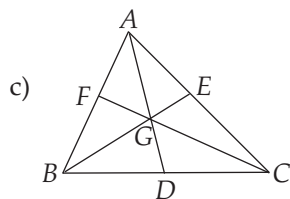
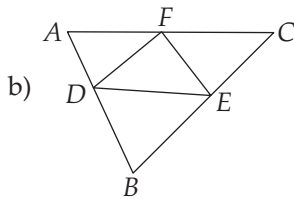
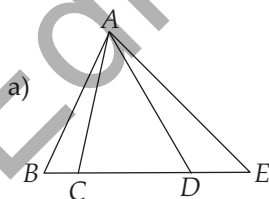
Pentru fiecare triunghi desenat, comparați:

- $AB \square BC + CA$;
- $BC \square AB + AC$;
- $AC \square AB + BC$;
- $AB^2 \square BC^2 + CA^2$;
- $BC^2 \square AB^2 + AC^2$;
- $AC^2 \square AB^2 + BC^2$.

16. Se consideră un cerc de centru O . Desenați un triunghi isoscel OAB , astfel încât A și B să fie puncte ale cercului, iar punctul O să fie:

- vârful opus bazei;
- vârf aparținând bazei.

17. Câte triunghiuri puteți identifica în figurile de mai jos?



18. Fie A, B, C și D patru puncte, nu toate coliniare. Care este numărul minim posibil de triunghiuri care să aibă vârfurile în aceste puncte? Dar cel maxim?

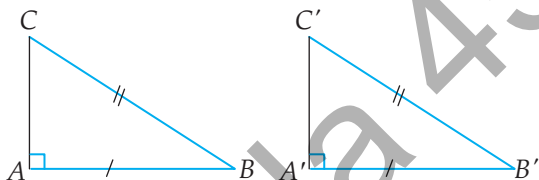


Am văzut că pentru congruența triunghiurilor oarecare sunt suficiente trei relații de congruență alese conform cazurilor: LUL, ULU (sau LUU) și LLL. În cazul triunghiurilor dreptunghice, având deja unghiurile drepte congruente, este nevoie doar de două relații de congruență, una dintre ele fiind între laturi.

Criterii de congruență a triunghiurilor dreptunghice:

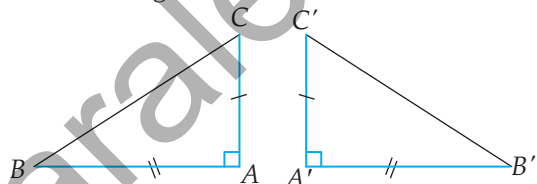
1. Criteriul IC (ipotenuză – catetă). Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90^\circ \\ AB \equiv A'B' \\ BC \equiv B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \text{IC}$$



2. Criteriul CC (catetă – catetă). Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

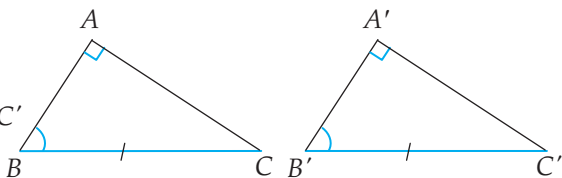
$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90^\circ \\ AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \text{CC}$$



Observație. Cazul CC de la triunghiurile dreptunghice este, de fapt, cazul LUL de la triunghiurile oarecare.

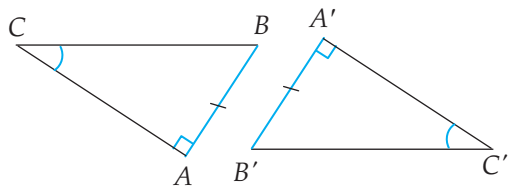
3. Criteriul IU (ipotenuză – unghi ascuțit). Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și o pereche de unghiuri ascuțite respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90^\circ \\ BC \equiv B'C' \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \text{IU}$$



4. Criteriul CU (catetă – unghi ascuțit). Dacă două triunghiuri dreptunghice au o pereche de catete și o pereche de unghiuri ascuțite respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90^\circ \\ AB \equiv A'B' \\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C' \\ (\text{sau } \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B') \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \text{CU}$$

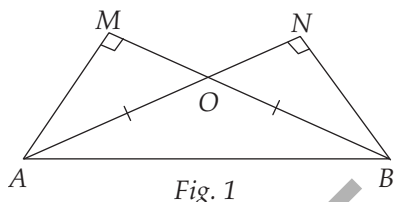


Observație. Cazul CU de la triunghiurile dreptunghice este, de fapt, cazul LUU sau ULU de la triunghiurile oarecare.

PROBLEME REZOLVATE

1. În figura 1, $OA = OB$, M este piciorul perpendicularei din A pe dreapta OB , iar N este piciorul perpendicularei din B pe dreapta OA . Demonstrați că:

- $\triangle OAM \equiv \triangle OBN$;
- $AN = BM$;
- $\triangle ABM \equiv \triangle BAN$.

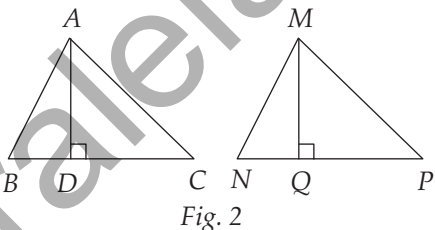


Soluție: a) Deoarece $\angle AMO = \angle BNO = 90^\circ$, $OA = OB$ și $\angle AOM = \angle BON$ (unghiuri opuse la vârf), rezultă că $\triangle OAM \equiv \triangle OBN$ (IU).

b) Din congruența triunghiurilor OAM și OBN deducem că $OM = ON$, deci $AN = AO + ON = BO + OM = BM$.

c) Cum $\angle AMB = \angle BNA$, $BM = AN$ (punctul b)) și $AB = BA$ (latură comună), rezultă că $\triangle ABM \equiv \triangle BAN$ (IC).

2. În figura 2 sunt desenate triunghiurile congruente ABC și MNP , împreună cu înălțimile lor, AD și MQ . Demonstrați că $\triangle ABD \equiv \triangle MNQ$ și deduceți că $AD = MQ$.



Soluție: Deoarece $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, rezultă că $AB = MN$ și $\angle B \equiv \angle N$. Astfel, din relațiile $\angle ADB \equiv \angle MQN = 90^\circ$, $AB = MN$ și $\angle B \equiv \angle N$, deducem că $\triangle ABD \equiv \triangle MNQ$ (IU). Cum AD și MQ sunt laturi omoloage în triunghiurile congruente ABD și MNQ , avem $AD = MQ$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie triunghiurile dreptunghice XYZ și $X'Y'Z'$ cu $\angle X = \angle X' = 90^\circ$ și $\angle Y = \angle Y' = 30^\circ$. Care dintre următoarele condiții garantează că $\triangle XYZ \equiv \triangle X'Y'Z'$?

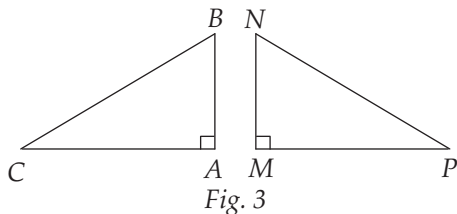
- $XY \equiv X'Y'$;
- $\angle Z \equiv \angle Z'$;
- $YZ \equiv Y'Z'$;
- $ZX \equiv Z'X'$.

2. Considerăm triunghiurile ABC și DEF , astfel încât $\angle A = \angle D = 90^\circ$ și $BC = EF$. Care dintre următoarele condiții ar trebui adăugată pentru a fi siguri că $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$?

- $\angle B \equiv \angle E$;
- $\angle B \equiv \angle F$;
- $AB = DE$;
- $BC = DF$.

3. Fie triunghiurile ABC și MNP dreptunghice în A , respectiv M , cu $BC = NP$, $\angle C = 30^\circ$ și $\angle N = 60^\circ$ (figura 3). Demonstrați că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$.

4. Considerăm triunghiurile ABC și MNP cu $\angle A = \angle M = 90^\circ$, $AB = MN$, $\angle B = 70^\circ$ și $\angle P = 20^\circ$ (figura 3). Arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$.



13. În figura 10, AB este un diametru al cercului $\mathcal{C}$ de centru O , iar C și D sunt două puncte pe diametrul AB , astfel încât O este mijlocul segmentului CD . Punctele E și F sunt situate pe cercul $\mathcal{C}$ și $EC \perp AB$, $FD \perp AB$. Demonstrați că:

- a) $\triangle EOC \equiv \triangle FOD$; b) $\triangle ACE \equiv \triangle BDF$.

14. În figura 11 este reprezentat cercul $\mathcal{C}$, cu centrul în O și coardele sale AB și CD , egal depărtate de centrul cercului: $OM = ON$, unde $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $M \in AB$, $N \in CD$. Demonstrați că $\triangle OMA \equiv \triangle ONC$, $\triangle OMB \equiv \triangle OND$ și $AB = CD$.

15. În figura 12 sunt reprezentate două cercuri cu același centru O (cercuri concentrice). Coardele cercului exterior, AB și CD , sunt tangente cercului interior în M , respectiv N . Demonstrați că $\triangle OMA \equiv \triangle OND$ și deduceți apoi că $AB = CD$.

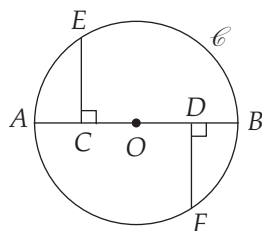


Fig. 10

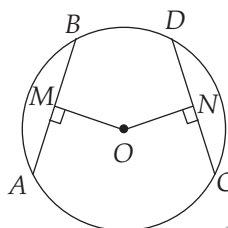


Fig. 11

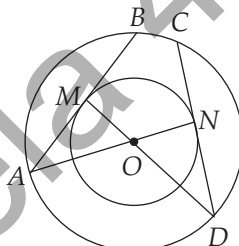


Fig. 12

16. Demonstrați că, dacă dreptele PA și PB sunt tangente la cercul cu centrul în O în punctele A , respectiv B , atunci $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$. Deduceți că $PA = PB$ și dreapta OP este bisectoare pentru unghiurile AOB și APB (figura 13).

17. În figura 14, dreptele AD și BC sunt paralele și $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Demonstrați că:

- a) $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$; b) $BC = DA$; c) $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$.

18. Pe laturile OX și OY ale unghiului XOY , cu $\angle XOY < 90^\circ$, considerăm punctele A , respectiv B , astfel încât $OA = OB$. Perpendiculara în A pe OX intersectează pe OY în D , iar perpendiculara în B pe OY intersectează pe OX în E . Fie P punctul de intersecție a dreptelor AD și BE (figura 15). Demonstrați că:

- a) $\triangle OAD \equiv \triangle OBE$;
b) $BD = AE$;
c) $\triangle PBD \equiv \triangle PAE$;
d) OP este bisectoarea unghiului XOY .

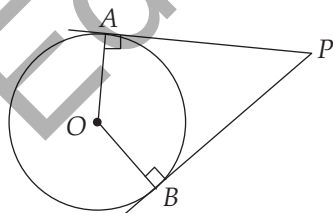


Fig. 3

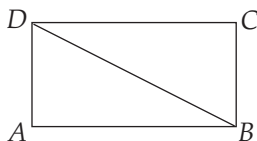


Fig. 14

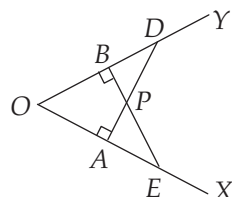


Fig. 15

VI.15. TEOREMA LUI PITAGORA

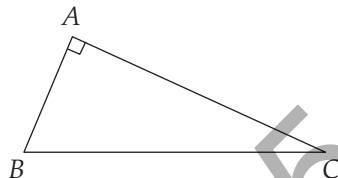


Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

$$\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Observație. Este adevărată și **reciproca teoremei**: dacă într-un triunghi, suma pătratelor a două laturi este egală cu pătratul celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

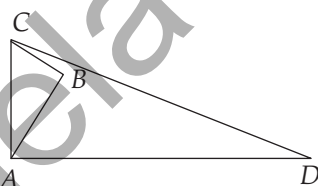
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ.$$



PROBLEME REZOLVATE

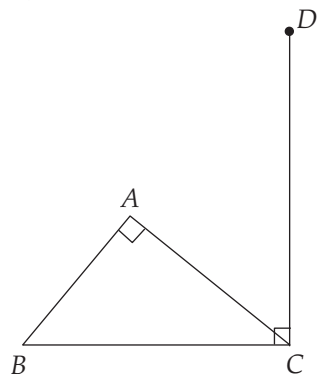
1. În figura alăturată avem $\angle ABC = \angle CAD = 90^\circ$, $AB = 4$ m, $BC = 3$ m și $CD = 13$ m. Determinați lungimea segmentului AD .

Soluție: Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC , obținem $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2$, deci $AC = 5$ m. Aplicând din nou teorema lui Pitagora în triunghiul CAD , avem $AD^2 = CD^2 - AC^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$. Prin urmare, $AD = 12$ m.



2. În figura alăturată este desenat triunghiul ABC , dreptunghic în A , și punctul D , astfel încât $DC \perp BC$. Dacă $BC = 45$ cm, $AC = 36$ cm, $DC = 60$ cm și $AD = 48$ cm, demonstrați că punctele B , A și D sunt coliniare.

Soluție: Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABC și BCD , obținem $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 45^2 - 36^2 = 27^2$, respectiv $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 45^2 + 60^2 = 75^2$, de unde rezultă că $AB = 27$ cm și $BD = 75$ cm. Din relația $AB + AD = 27$ cm + 48 cm = 75 cm = BD , deducem că punctele B , A și D sunt coliniare, A fiind între B și D .



PROBLEME PROPUSE

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\angle A = 90^\circ$. Determinați lungimea ipotenuzei BC în fiecare dintre următoarele cazuri:

- a) $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm;
c) $AB = 8$ cm și $AC = 15$ cm;

- b) $AB = 5$ cm și $AC = 12$ cm;
d) $AB = 7$ cm și $AC = 24$ cm.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC . Determinați lungimea catetei AC în fiecare dintre următoarele cazuri:

- a) $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm;
c) $AB = 15$ cm, $BC = 25$ cm;

- b) $AB = 24$ cm, $BC = 26$ cm;
d) $AB = 9$ cm, $BC = 41$ cm.

14. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , cu $AB = 24$ cm, $AC = 32$ cm și punctul D pe latura AC , astfel încât $CD = 25$ cm (figura 8).

- Calculați perimetrul triunghiului BDC .
- Determinați distanța de la punctul D la dreapta BC .

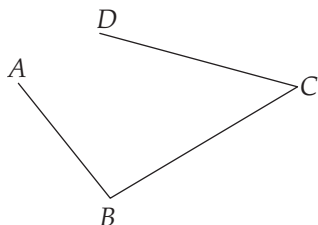


Fig. 7

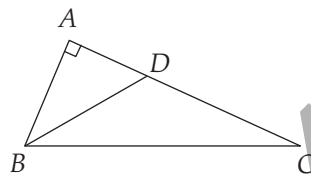
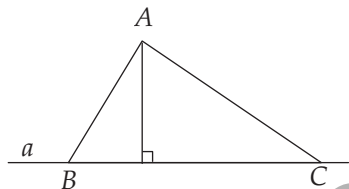


Fig. 8

15. Fie A un punct exterior drepte a situat la distanță de 20 cm de dreapta a . Considerăm oblicele $AB = 29$ cm și $AC = 52$ cm, $B \in a$, $C \in a$ (figura 9). Aflați lungimea segmentului BC .

16. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și A, B două puncte pe cerc. Fie $OM \perp AB$, $M \in AB$ (figura 10).

- Calculați AB , știind că $r = 10$ cm și $OM = 6$ cm.
- Calculați OM , dacă $r = 29$ cm și $AB = 40$ cm.
- Determinați r , știind că $AB = 20$ cm și $OM = 24$ cm.



sau

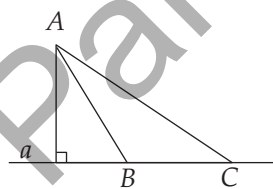


Fig. 9

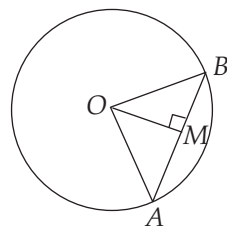


Fig. 10

17. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r = 13$ cm, se consideră coardele $AB = AC = 24$ cm. Arătați că AO este bisectoarea unghiului BAC (figura 11).

18. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r = 13$ cm, se consideră coardele paralele $AB = 10$ cm și $CD = 24$ cm (figura 12). Determinați distanța dintre cele două coarde.

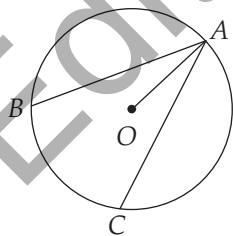
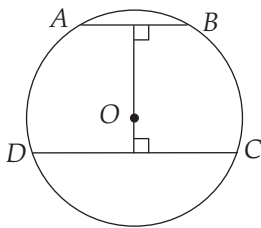


Fig. 11



sau

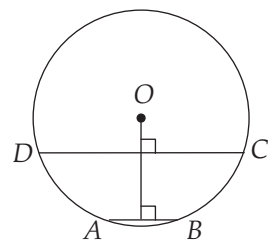


Fig. 12

19. În figura 13 sunt desenate cercurile concentrice $\mathcal{C}_1(O, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O, r_2)$ cu $r_1 = 8$ cm și $r_2 = 17$ cm. Coarda AB a cercului $\mathcal{C}_2$ este tangentă în punctul T cercului $\mathcal{C}_1$. Determinați lungimea coardei AB .

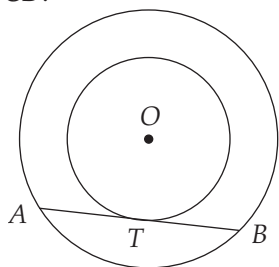


Fig. 13

20*. În figura 14, cercurile $\mathcal{C}_1(O, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O, r_2)$ sunt concentrice și $r_1 = 29$ cm, $r_2 = 35$ cm. Coarda $AB = 56$ cm, a cercului $\mathcal{C}_2$, determină pe cercul $\mathcal{C}_1$ coarda CD . Aflați lungimea coardei CD .

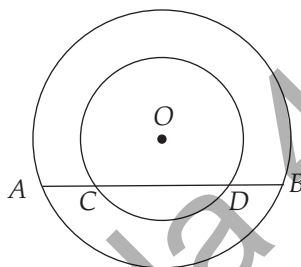


Fig. 14

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

- (1p) 1. Fie un triunghi ABC cu $AB = AC$ și $\angle A = 40^\circ$. Determinați măsura unghiului B .
- (1p) 2. Un triunghi MNP are $\angle M = \angle N = 60^\circ$ și $MP = 14$ cm. Calculați perimetrul triunghiului.
- (1p) 3. Un triunghi DEF are $\angle D = 80^\circ$ și $\angle E = 20^\circ$. Ce fel de triunghi este DEF : isoscel, echilateral sau dreptunghic?
- (1p) 4. Un triunghi ABC are $AB = AC$ și $\angle B = 20^\circ$. Determinați măsura unuia dintre unghiurile exterioare triunghiului, cu vârful în A .
- (1p) 5. Calculați lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABC , știind că $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ și cu $BC = 27$ cm.
- (1p) 6. Determinați lungimea catetei NP a triunghiului dreptunghic MNP cu ipotenuza $MN = 26$ m și cateta $MP = 24$ m.
- (1p) 7. Se consideră triunghiul ABC , cu $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ și $AB = 72$ cm. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, calculați lungimea segmentului DC .

RECAPITULARE FINALĂ

ARITMETICĂ

1. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

$$A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } n \text{ împărțit la } 7 \text{ dă câtul egal cu restul}\},$$

$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 2^n < 1000\}, \quad C = \{n = \overline{ab} \mid a + b = 6\}, \quad D = \{n = \overline{ab} \mid a \cdot b = 18\}.$$

2. Determinați numărul de elemente ale fiecăreia dintre următoarele mulțimi: $A = \{29, 30, 31, \dots, 104\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 16 < n^2 < 81\}$, $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n^3 < 2022\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 1 \text{ divide } 60\}$.

3. Fie mulțimile $A = \{0, 1, 4\}$ și $B = \{0, 1, 3\}$. Mulțimea $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ este egală cu:

- a) $\{0, 1, 3, 4\}$; b) $\{0, 1\}$; c) $\{3, 4\}$; d) $\{1, 3, 4\}$.

4. Determinați $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, știind că $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x : (-5) \text{ și } -7 < x < 10\}$, iar $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x - 2) \mid 3\}$.

5. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 3n - 1, n = 1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x = 2^n, n = 0, 1, 2, 3\}$ și $C = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Determinați $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap C$ și $B \setminus C$.

6. Se consideră $a = 64^5 \cdot 81^3$.

a) Calculați sfertul lui a și triplul lui a .

b) Arătați că numărul $\frac{a}{12^{12}}$ este natural.

c) Arătați că a este pătrat perfect și cub perfect.

d) Determinați ultima cifră a numărului a .

7. Se consideră numerele $a = 792$, $b = 756$.

a) Arătați că 18 este divizor comun al celor două numere.

b) Determinați cel mai mare divizor comun al celor două numere.

c) Câți divizori comuni au numerele a și b ?

8. Se consideră numerele $a = 120$, $b = 144$.

a) Este 2160 multiplu comun al numerelor date?

b) Determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor date.

c) Câți multipli comuni, de patru cifre, au cele două numere?

9. Fie a și b două numere naturale care verifică condițiile: $(a, b) = 5$ și $[a, b] = 175$.

a) Arătați că $a \cdot b = 875$.

b) Determinați a , b , $a < b$, care verifică condițiile din enunț.

10. Împărțind numerele 1832, 2927 și 2572 la același număr natural nenul n , se obțin resturile 17, 23, respectiv 31.

a) Poate fi numărul natural n egal cu 31?

b) Determinați toate valorile posibile ale numărului n care verifică cerințele din enunț.

37. Numerele raționale nenule x, y, z sunt invers proporționale cu: 0,2; 0,125; 3.
 a) Determinați x, y, z , știind că $2x - y - 5z = 4$.
 b) Arătați că x reprezintă 60% din $(y + z)$.
38. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:
 a) $2x + 1 = -7$; b) $-2x + 17 = 4x - 1$; c) $3(x - 2) + 2(x + 1) = 16 - 5x$;
 d) $|2x - 3| + |4x - 6| = 9$; e) $|2 - x| + |x - 5| + 3 = 0$.
39. Determinați soluțiile întregi ale inecuațiilor:
 a) $2x - 7 > -3$; b) $-4x + 7 \geq -1$; c) $|x| \leq 2$; d) $|x| \geq 8$.
40. Determinați valorile numărului întreg x , știind că:
 a) $\frac{10}{2x-1} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{3x+1}{2x-1} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{-12}{2x-3} \in \mathbb{N}$; d) $\frac{-15}{4x+1} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.
41. Aflați numerele întregi x și y , știind că $xy - 7x + 6 = 0$.
42. Determinați numerele întregi m și n , astfel încât $|m| = m$, $|n| = -n$, iar $|m \cdot n| = 10$.
43. Fie a, b, c trei numere raționale nenule, astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$.
 a) Arătați că a, b, c au același semn.
 b) Demonstrați că $a = b = c$.
44. Aflați numerele întregi x și y , știind că:
 a) $3x - 7y = 28$ și $|x| < 10$; b) $5x + 7y = 20$ și $|y| < 10$.
45. a) Determinați numerele raționale x și y , știind că $|5x - 4| + |8 + 4y| = 0$.
 b) Determinați numerele întregi x și y , știind că $x^2 + |5 - 2y| = 3$.
46. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - a| \leq 8, a \in \mathbb{Z}\}$.
 a) Determinați numărul elementelor mulțimii A .
 b) Determinați numărul întreg a , astfel încât A să aibă suma elementelor egală cu 68.
 c) Determinați valoarea lui a , astfel încât mulțimea A să aibă exact 10 elemente strict negative.

GEOMETRIE

1. Trei unghiuri au măsurile egale cu a, b, c . Știind că a este egal cu $\frac{1}{3}$ din b , că b și c sunt direct proporționale cu 0,125 și 0,(3), iar a și c sunt complementare, determinați a, b și c .
2. În figura 1, punctele A, B, C sunt coliniare, dreptele BE și BF sunt perpendiculare, BG este bisectoarea unghiului FBC , iar $\angle GBC = 17^\circ$. Determinați măsurile unghiurilor:
 a) $\angle ABC$; b) $\angle FBC$; c) $\angle ABE$.
3. În figura 2, unghiul BOC este drept, iar dreptele AB și DE sunt concurente în punctul O . Știind că măsura unghiului COD este egală cu 40° , determinați măsurile unghiurilor:
 a) $\angle BOD$; b) $\angle AOE$; c) $\angle EOB$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

PROBLEME RECAPITULATIVE – CLASA A V-A

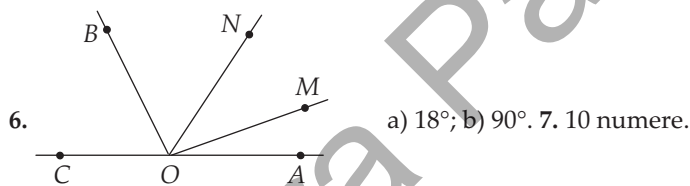
1. 8976; 1902. 2. Numerele sunt $\overline{147d}$, $\overline{238d}$, $\overline{329d}$, $d = 0, 1, \dots, 9$, deci 30 de numere. 3. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 117 \cdot 3 = 540$ cifre. 4. Diferența maximă este $204 = 205 - 1$. Diferența minimă este $4 = 105 - 101$. 5. $76 \cdot 57 = 4332$; $76 \cdot 57 + 75 = 4407$. 6. 1023. 7. 975. 8. a) 9 numere; b) 21 de numere. 9. a) 2; b) 3500. 10. $a = 1$, $b = 0$; $a^b = 1$, $b^a = 0$. 11. a) 0; b) 0; c) 1; d) 4. 12. De exemplu: $10 = 10 + 0 = 10 - 0 = 10 \cdot 1 = 10 : 1 = 10^1$. 13. a) $1089 = 33^2$; b) $36^2 < 1365 < 37^2$. 14. Numerele sunt $\overline{234ab}$, $\overline{a234b}$, $\overline{ab234}$, deci $100 + 90 + 90 = 280$ de numere. 15. Notăm cu c_1 , c_2 câturile obținute și cu n numărul căutat. Atunci $n = 9c_1 + 7$, $c_1 = 8c_2 + 5$, $c_2 = 7 \cdot 6 + 3$. Rezultă că $n = 3292$. 16. a) 194 sau 244; b) 524. 17. a) De exemplu: $y = 1$, $x = 14$, $z = 21$; b) $S = 3(2x + 3y) + 4(4y + 3z) = 361$. 18. a) A; b) A; c) A; d) F; e) F; f) A. 19. 1 sau 4. 20. 18. 21. 60. 22. 46. 23. 1080; 5535. 24. $A = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot (4 \cdot 3 + 2^3 - 3) = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 17$ și cum $n \in \mathbb{N}^*$, A se divide cu $17 \cdot 2^2 \cdot 3 = 204$. 25. a) 10035; 99990; b) Cum $10035 = 9 \cdot 5 \cdot 223$ și $99990 = 9 \cdot 5 \cdot 2222$, numerele căutate sunt $45 \cdot 223$, $45 \cdot 224$, ..., $45 \cdot 2222$, deci 2000 de numere. 26. a) $799 = 47 \cdot 17$ și $2632 = 47 \cdot 56$; b) $7560 = 120 \cdot 63$ și $7560 = 135 \cdot 56$. 27. a) 23,23; b) 17,81; c) 0,88; d) 6,5; e) 2,36; f) 2,27. 28. a) 0,84; b) 19,44; c) 1,8; d) 0,11; e) 112; f) 40. 29. a) 0,045; b) 36; c) 1; d) 5. 30. a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1,8; d) 2,8; e) 3. 31. $\frac{5}{14} = 0,357(142857)$ este fracție periodică mixtă. Suma primelor 100 de zecimale este egală cu $3 + 5 + 7 + 16(1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) + 1 = 448$. 32. 25,2 lei. 33. 80 tone. 34. Împreună, cele două roți fac $30 \cdot 2 = 60$ km. Fiecare roată face $60 : 3 = 20$ km. 35. În prima etapă merge $24 \cdot 1\frac{1}{3}$ km = 32 km. În etapa a doua va merge 25 km în $25 : 30$ h = $\frac{5}{6}$ h = 50 minute. 36. a) $x = 8$; b) $x = 4$; c) $x = \frac{2}{3}$; d) $x = 3$. 37. a) 8; b) 4,5; c) 225. 38. 5 lei și 7 lei. 39. Fie S suma de bani și n prețul unui caiet. Atunci $S = 4n - 2$ și $S + 15 = 5n + 5$. Rezultă $n = 8$, $S = 30$ lei. 40. 125 și 100. 41. Fie x prețul rochiei. Atunci $80 + \frac{2}{3}x = x$, de unde $x = 240$ lei. 42. Fie x lungimea fiecărei bucăți. Atunci $x - 18 = 3(x - 34)$. Rezultă $x = 42$ m. 43. Fie f numărul fetelor din clasă și b numărul băieților din clasă. Atunci $f = b + 8$ și $f = 4(b - 4)$. Rezultă $f = 16$, $b = 8$. Sunt 24 de elevi. 44. Fie x numărul de pagini ale cărții. Atunci $\frac{x}{5} = \frac{x}{7} + 8$. Rezultă că $x = 140$. 45. Fie x numărul de copii care au mâncat tort și au băut suc. Atunci $2x + \frac{x}{4} = 27$. Rezultă că $x = 12$. Ionel a avut 11 invitați. Variantă: 4 copii consumă 8 sucuri și un tort. Sunt $27 : 9 = 3$ grupe de câte 8 sucuri și un tort, deci 12 copii. Ionel a avut 11 invitați. 46. Într-o oră Radu repară $\frac{1}{4}$ din gard, Ioana $\frac{1}{6}$, iar Tudor $\frac{1}{3}$. Lucrând împreună, într-o

oră cei trei copii repară $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ din gard, deci $\frac{3}{4}$ din gard. Cei trei copii au nevoie de $\frac{4}{3}$ ore, deci o oră și 20 de minute. **47.** $S \geq 2,95 \cdot 10 = 29,5$; $S < 2,95 \cdot 11 = 32,45$; $S \in \mathbb{N}$, deci $S = 30$, $S = 31$ sau $S = 32$. **48.** a) În zilele 2, 3, 4 și 5 trebuie să viziteze cât mai puține obiective, deci 6, 7, 8 și 9 obiective. În ziua 6 vizitează maximum $52 - (6 + 7 + 8 + 9) = 17$ obiective; b) Turistul vizitează în cele șase zile 5, a , b , c , d , e obiective, $5 < a < b < c < d < e$. Astfel, $52 = 5 + a + b + c + d + e \geq 5 + a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4)$. Rezultă că $5a < 37$ și de aici $a_{\max} = 7$. De exemplu, vizitează 5, 7, 8, 9, 10, 13 obiective. **49.** a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) A; g) F. **50.** a) 4 drepte; b) 6 segmente. **51.** 10 cm sau 4 cm. **52.** a) A este între B și C; b) B este între A și C; c) C este între A și B. **53.** 2 cm. **54.** a) Semidreptele Ox , Oy ; b) Punctul O; c) Fals; d) Adevărat; e) Semidreapta OD este în interiorul unghiului xOy . **55.** 44° sau 102° . **56.** a) $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 90^\circ$; b) $\angle AOD = 180^\circ$. **57.** a) $\angle MON = \angle AOB = 20^\circ$; b) 70° . **58.** a) $x = 24^\circ$; b) $x = 16^\circ$. **59.** Fie $EH = x$; atunci $BE = 2x$ și $AB = 4x$, deci perimetrul figurii $AHIJFGCD$ este $22x$; a) 66 cm; b) $AH = 21$ cm. **60.** Fie l lungimea dreptunghiului și l lățimea dreptunghiului. Din $L \cdot l = 40$ și $(L + 2)l = 50$ rezultă $l = 5$ m, $L = 8$ m. Astfel, perimetrul dreptunghiului este egal cu 26 m.

TESTE ÎNȚIALE

Testul 1. 1. 1. 2. 61. 3. $a > d > c > b$. 4. 10 timbre. 5. $a = 10$, $b = 2$; media aritmetică = 6. 6. b) 4 cm; c) 16 cm. 7. 0.

Testul 2. 1. 4. 2. a) 1; b) 0. 3. 50. 4. 10, 20 și 30. 5. $n = 63 : 9$.



Testul 3. 1. 2. 2. $2\frac{1}{6}$. 3. Ana are 5 cărți, Bianca are 7 cărți și Cristi are 10 cărți. 4. $n = 102\overline{ab} + 51 = 51(2\overline{ab} + 1) : 51$. 5. $a < b$. 6. 261. 7. a) 12 cm; b) 96 de cubulețe; c) 8 cubulețe.

ARITMETICĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

1. a) $\{a, r, i, t, m, e, c\}$; b) $\{a, l, g, e, b, r\}$; c) $\{g, e, o, m, t, r, i, a\}$. 2. Ana și Dan. 3. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$. 4. $1 \in A$, $2 \notin A$, $3 \notin A$, $4 \in A$, $5 \notin A$, $1 \notin B$, $2 \in B$, $3 \notin B$, $4 \in B$, $5 \in B$. 5. $P_1 - A$; $P_2 - F$; $P_3 - A$; $P_4 - F$; $P_5 - A$; $P_6 - A$. 6. a) $A \in a$; b) $B \notin b$; c) $N \in (MP)$; d) $M \in NP$ sau $N \in MP$ sau $P \in MN$. 7. $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5, 8\}$, $C = \{0, 1, 3, 7\}$, $D = \{0, 1, 2, 3\}$. 8. De

exemplu, $A = \{x \mid x \text{ este o cifră impară}\}$, $B = \{x \mid x \text{ este un număr natural divizibil cu } 3 \text{ și } x \leq 18\}$, $C = \{x \mid x = 2^n, n \in \{3, 4, 5, 6\}\}$, $D = \{x \mid x = 10k, k = 1, 2, \dots, 10\}$.

I.2. Relații între mulțimi

1. $A = B = C = \{4, 5, 6, \dots\}$. 2. a) $\emptyset, \{0\}$; b) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$; c) $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$. 3. P_1 – corect, A ; P_2 – incorect; P_3 – incorect; P_4 – corect, A ; P_5 – corect, F ; P_6 – corect, F ; P_7 – incorect; P_8 – corect, A . 4. $P_1 - A$; $P_2 - F$; $P_3 - F$; $P_4 - F$; $P_5 - A$; $P_6 - A$; $P_7 - A$; $P_8 - A$. 5. $A = \{125, 224, 323, 422, 521, 620\}$, $B = \{125, 521\}$ și $B \subset A$. 6. a) $B = \{1, 2, 5, 7, 8\}$; b) $B = \{1\}$; c) $B = \{1, 2, 5, 7\}$; d) $B = \{8\}$. 7. Dacă $n = 0$, atunci $M = \emptyset$ și are o singură submulțime: $\emptyset$, iar $2^0 = 1$. Dacă $n = 1$, atunci $M = \{a\}$ are două submulțimi: $\emptyset$ și $\{a\}$, iar $2^1 = 2$. Dacă $n = 2$, atunci $M = \{a, b\}$ are 4 submulțimi: $\emptyset, \{a\}, \{b\}$ și $\{a, b\}$, iar $2^2 = 4$. Dacă $n = 3$, atunci $M = \{a, b, c\}$ are 8 submulțimi: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ și $\{a, b, c\}$, iar $2^3 = 8$. 8. Cum $3 \notin A$, deoarece $2^3 < 3^2$, rezultă că $\{3, 4, 5\} \not\subset A$. Avem $2^5 > 5^2$, $2^6 > 6^2$ și $2^7 > 7^2$, deci $\{5, 6, 7\} \subset A$. 9. a) $\{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}$ și $\{2, 3, 5\}$; b) $\{1, 5, 6\}$ și $\{2, 3, 5\}$. 10. $X = \{5, 7\}$ sau $X = \{3, 5, 7\}$. 11. a) $x \in \{2, 3, 4\}$; b) $a = 1, b = 3$ sau $a = 1, b = 4$ sau $a = 3, b = 4$ sau $a = 3, b = 1$ sau $a = 4, b = 1$ sau $a = 4, b = 3$. 12. Din condiția $\{1, 3\} \subset \{2, 3, a, b\}$ rezultă că $a = 1$ sau $b = 1$. Cum, pentru $b = 1$, în mulțimea $\{b, b - 1, 1, 2\}$ ar fi două elemente egale, înseamnă că nu putem avea decât $a = 1$. În continuare, din relația $\{1, 2, 3, b\} \subset \{b, b - 1, 1, 2, 5\}$ obținem $3 = b - 1$, deci $b = 4$. Prin urmare, $a = 1$ și $b = 4$.

I.3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale

1. Dintre mulțimile considerate, numai cea de la punctul c) este infinită, restul fiind finite. 2. Avem $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ și $C = \{4, 8, 16, 32\}$, deci $\text{card } B = \text{card } C$, dar $B \neq C$. 3. a) $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_7 = \{1, 7\}$, $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$; b) $M_7 = \{0, 7, 14, \dots\}$, $M_{12} = \{0, 12, 24, \dots\}$, $M_{30} = \{0, 30, 60, \dots\}$. 4. $\text{card } A = 5$, $\text{card } B = 6$, $\text{card } C = 3$, $\text{card } D = 18$. 5. a) 5; b) 2; c) 0; d) 11. 6. a) $\text{card } A = 10$; b) $S = 29 + 32 + \dots + 56 = 425$. 7. Dacă mulțimea A are două elemente, atunci numerele $n + 1, 2n - 3, n + 2$ nu pot fi toate diferite. Avem $n + 1 = 2n - 3 \Leftrightarrow n = 4$; $n + 1 \neq n + 2$ și $2n - 3 = n + 2 \Leftrightarrow n = 5$. Deci, avem două soluții: $n = 4$, cu $A = \{5, 6\}$, și $n = 5$, cu $A = \{6, 7\}$. 8. a) 2, 7, 12, 17, 22 $\in A$; b) Pentru orice număr par n , numărul $x = 5n + 2$ este par și aparține mulțimii A . Așadar, mulțimea A conține o infinitate de numere pare. Dacă n este număr impar, atunci $x = 5n + 2$ este impar, deci mulțimea A conține și o infinitate de numere impare; c) Cum nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $5n + 2 = 2021$, rezultă că $2021 \notin A$. Numărul 2022 aparține mulțimii A , deoarece $2022 = 5 \cdot 404 + 2$.

I.4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 5\}$, $B \setminus A = \{6, 7, 8, 9\}$. 2. a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{3, 7\}$, $A \setminus B = \{1, 8\}$, $B \setminus A = \{5, 6\}$; b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = \{1, 2, 3\} = A$, $B \setminus A = \{4, 5\} = B$. 3. a) $A \setminus B = \{b, c, d\}$, $B \setminus A = \{e, f\}$, $A \cap B = \{a\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; b) $X \cap Y = \{a, b\} = Y$, $X \cup Y = \{a, b, c\} = X$, $X \setminus Y = \{c\}$, $Y \setminus X = \emptyset$. 4. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A$, $A \cap B = \{1, 3, 5\} = B$; b) $C \cap D = \{a, 2, 3\}$, $C \cup D = \{a, b, 2, 3, 9\}$,

și 57 de fizică. **38.** Fie x numărul monedelor de 2 euro și y numărul bancnotelor de 5 euro. Avem $2x + 10x + 5y = 100$, deci $12x + 5y = 100$, de unde deducem că x se divide cu 5 și y se divide cu 4, deci $x = 5a$ și $y = 4b$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Înlocuind, obținem $3a + b = 5$, ceea ce înseamnă că $a = 1$, $b = 2$ și astfel obținem $x = 5$, $y = 8$. Elena are 50 de monede de 1 euro, 5 monede de 2 euro și 8 bancnote de 5 euro.

Recapitulare și sistematizare prin teste

Testul 1. 1. c). 2. b). 3. c). 4. $5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. 5. $n \mid (16n + 15) \Leftrightarrow n \mid 15 \Leftrightarrow n \in \{1, 3, 5, 15\}$. 6. $45 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid n$ și $9 \mid n \Leftrightarrow n \in \{180, 585\}$. 7. Numărul $72 = 2^3 \cdot 3^2$ are 12 divizori. 8. $a = 7^n(7^2 - 7 - 1) = 7^n \cdot 41 = 7^{n-1} \cdot 287 \Rightarrow 287 \mid a$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. 9. Numerele subliniate de două ori sunt multipli celui mai mic multiplu comun al numerelor 12 și 8: 24, 48, 72 și 96.

Testul 2. 1. c). 2. a). 3. d). 4. c.m.m.d.c.(60, 105) = 15, c.m.m.m.c.(60, 105) = 420. 5. $a = 14$, $b = 15$. 6. $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 2$, $a + b + c + d = 7$. 7. $46 = na + 4$, $77 = nb + 5$, $a, b \in \mathbb{N}$, $n > 5$; $42 = na$, $72 = nb \Rightarrow n \in D_{(42, 72)} = D_6 = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow n = 6$. 8. $(n + 1) \mid (2n + 17) \Leftrightarrow (n + 1) \mid (2n + 17 - 2n - 2) \Leftrightarrow (n + 1) \mid 15 \Leftrightarrow n \in \{0, 2, 4, 14\}$. 9. Fie n numărul de oi. Deoarece $n = 2a + 1 = 3b + 1 = 4c + 1 = 5d + 1$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$), rezultă că $n - 1$ este multiplu comun al numerelor 2, 3, 4 și 5, deci $n - 1 = 60k$ sau $n = 60k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Singurul număr natural de forma $60k + 1$, mai mic decât 400, care se divide cu 7, este 301. Așadar, ciobanul are 301 oi.

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORȚII

II.1. Rapoarte

1. a) $\frac{2}{6}$; b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{15}{43}$; d) $\frac{256}{32}$; e) $\frac{3^3}{3}$; f) $\frac{3,5}{0,2}$. 2. a) $\frac{a}{b} = \frac{12^{(12)}}{24} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{2a}{a+b} = \frac{24^{(12)}}{36} = \frac{2}{3}$;

c) $\frac{3b-10}{a+20} = \frac{62^{(2)}}{32} = \frac{31}{16}$. 3. a) 1,5; b) 0,25; c) 0,24; d) 5,4; e) 0,2; f) 2. 4. a) $a = 4,5$; b) $b = 3,5$; c) $c =$

$= 50$; d) $d = 21$; e) $e = 1,7$. 5. a) $\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{15x}{4y} = \frac{15}{4} \cdot \frac{x}{y} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{2} = 1,5$; b) $\frac{7y}{12x} = \frac{21}{16} \Leftrightarrow \frac{7}{12} \cdot \frac{y}{x} =$

$= \frac{21}{16}$, deci $\frac{y}{x} = \frac{21}{16} : \frac{7}{12} = \frac{21}{16} \cdot \frac{12}{7} = \frac{9}{4} = 2,25$. 6. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}$; b) Dintre rapoar-

tele scrise la subpunctul a), au loc egalitățile $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$, deci $R = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4} \right\}$,

iar $\text{card}(R) = 7$. 7. $a = \frac{11}{900}$, $b = \frac{110}{900}$, deci $\frac{a}{b} = \frac{\frac{11}{900}}{\frac{110}{900}} = \frac{11}{900} : \frac{110}{900} = \frac{11}{900} \cdot \frac{900}{110} = \frac{1}{10} = 0,1$. Valoa-

rea raportului dintre 9 și $\frac{a}{b}$ este egală cu $\frac{9}{0,1} = 90$. 8. Lățimea dreptunghiului este egală cu

latura pătratului, deci raportul cerut este egal cu $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; b) Perimetrul dreptunghiului este

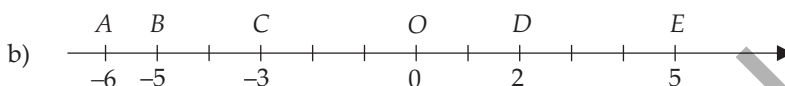
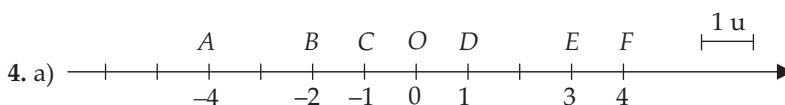
CAPITOLUL III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

III.1. Număr întreg. Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi

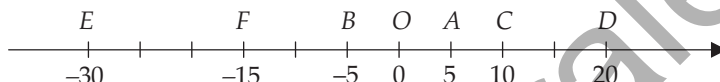
1. a) +250; b) -100; c) -20; d) +40; e) -42; f) +35.

2.	n	-3	0	-2	5	-17	8	$-(-2)$	-1
	Opusul lui n	3	0	2	-5	17	-8	-2	$-(-1)$

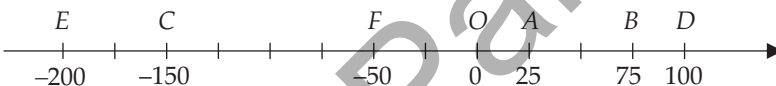
3. 73 elemente ($\pm 36, \pm 35, \dots, \pm 1, 0$).



5. a) Alegem, convenabil, punctul la $A(5)$ situat pe axa numerelor, astfel încât $OA = 1$ cm și apoi desenăm, respectând proporțiile, punctele $B(-5)$, $C(10)$, $D(20)$, $E(-30)$ și $F(-15)$.



b) Alegem, convenabil, punctul la $A(25)$ și apoi desenăm celelalte puncte prin raportare la acesta.



7. Sunt două situații posibile: (1) dacă punctul B este la dreapta punctului A pe axă, atunci $B(11)$ și $M(8)$, deci $b = 11$ și $m = 8$; (2) dacă punctul B este la stânga punctului A pe axă, atunci $b = -1$ și $m = 2$. 8. a) $A \cap \mathbb{N} = \left\{7; 0; \frac{15}{3}\right\}$; b) $A \cap \mathbb{Z} = \left\{-5; 7; 0; -4; \frac{15}{3}\right\}$; c) $A \setminus \mathbb{Z}^* =$

$= \left\{1\frac{1}{2}; 0; 2, (7)\right\}$; d) $A \cap \mathbb{Z}_- = \{-5; -4\}$. 9. a) Oricare dintre numerele $3, \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1, 2^2 = 4$;

b) Oricare dintre numerele $-3, -5, -10$; c) Oricare dintre numerele $\frac{1}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^{10}, 3, (4), 1, (7)$.

10. a) A; b) F; c) F; d) F; e) A; f) F; g) A; h) A. 11. a) A; b) F; c) A; d) F; e) F.

12.	a	-12	-6	-1	0	6	12	18
	$-a$	12	6	1	0	-6	-12	-18
	$ a $	12	6	1	0	6	12	18

CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1. Număr rațional. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale

1. a) $-\frac{5}{11}$; b) $-\frac{6}{13}$; c) $+\frac{5}{9}$; d) $+\frac{4}{19}$; e) $-\frac{2}{3}$; f) $+\frac{9}{8}$; g) $+\frac{2}{1}$; h) $-\frac{3}{1}$. 2. Frațiile considerate sunt reprezentanți ai numărului rațional $-\frac{4}{7}$. 3. $\frac{15}{a} = \frac{-18}{b} = \frac{21}{49} \Rightarrow a = 35, b = -42$. 4. $a = 6, b = -1, c = -22$. 5. a) $\frac{60}{132}; \frac{65}{143}$; b) $\frac{-77}{132}; \frac{-84}{144}$. 6. a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) F.

7.

Mulțimea \ a	-2,3	$\frac{3}{4}$	-3	$-\frac{7}{5}$	$\frac{-18}{-6}$	0,5	4
$\mathbb{N}$	F	F	F	F	A	F	A
$\mathbb{Z}$	F	F	A	F	A	F	A
$\mathbb{Q}$	A	A	A	A	A	A	A
$\mathbb{Q}_+$	F	A	F	F	A	A	A
$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	A	A	F	A	F	A	F

8. a) $\left\{-\frac{8}{2}; 1\frac{22}{22}\right\}$; b) $\left\{-10; -\frac{8}{2}; -\frac{14}{7}; 1\frac{22}{22}\right\}$; c) $\emptyset$. 9. a) $-\frac{5}{4}; -\frac{51}{25}; \frac{25}{8}; -\frac{7}{5}; -\frac{7}{50}; \frac{17}{16}$; b) $\frac{11}{3}; -\frac{5}{11}; -\frac{13}{11}; \frac{22}{3}; -\frac{34}{101}; -\frac{169}{111}$; c) $-\frac{5}{18}; \frac{17}{12}; -\frac{25}{22}; -\frac{25}{6}; \frac{73}{72}$. 10. a) -2,7; -0,27; -0,027; 6,2; -7,75; -2,875; 0,85; -1,075; b) 2,(3); -1,(2); -1,(142857); -1,(148); 3,(81); -0,(6); -0,(8); -0,(45); c) -0,8(3); 0,58(3); -0,9(3); 2,2(7); -0,291(6); -1,5(90); 2,2(4); -1,21(3).

11.

a	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{4}$ sau $-\frac{5}{4}$	-0,73	-5,12	0,3 sau -0,3
-a	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{5}{4}$ sau $\frac{5}{4}$	0,73	5,12	-0,3 sau 0,3
a	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{4}$	0,73	5,12	0,3

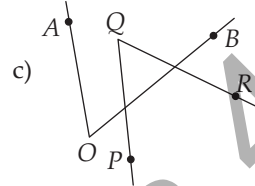
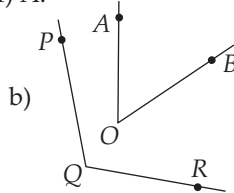
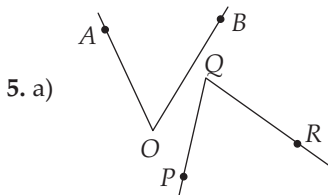
12. a) A; b) F; c) F; d) A; e) F; f) F. 13. $a = \frac{3}{4}$ sau $a = -\frac{3}{4}$. 15. Fie O originea axei numerelor; atunci $AB = OA + OB = \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$ și $BC = OC - OB = \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$. Cum A, B, C sunt coliniare, B este mijlocul segmentului AC. 16. a) $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$; b) $-\frac{7}{9} < 0,1$; c) $-2,5 > -3$; d) $\frac{5}{2} > 2$; e) $-\frac{4}{3} < -\frac{5}{4}$; f) $-7 < -\frac{31}{5}$. 17. a) F; b) F; c) A; d) A; e) A; f) A. 18. a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}$; b) $-\frac{4}{3}, \frac{5}{8}, \frac{6}{7}$; c) $-\frac{8}{3}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{11}$; d) $-\frac{5}{6}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{5}$. 19. A - 1; B - 2; C - 1; D - 3; E - 3; F - 2. 20. a) Cum $3,456 =$

GEOMETRIE

CAPITOLUL V. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1. Unghiul. Recapitulare și completări

1. b), c), e), f). 2. $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle AOD$. 3. a) A; b) A; c) F; d) A; e) A; f) F. 4. a) A; b) A; c) F; d) F; e) A; f) A.



9. Cum fețele paralelipipedului sunt dreptunghiuri, pe fiecare față putem identifica patru unghiuri drepte. Vom vedea în clasa a VIII-a că, de fapt, există și alte unghiuri drepte formate de câte două muchii ale paralelipipedului. 10. a) 720° ; 192° ; 1534° ; b) 25° ; 33° ; 300° . 11. a) 98° ; $60^\circ 47'$; $171^\circ 23'$; b) 48° ; $18^\circ 8'$; $8^\circ 33'$; $77^\circ 47'$; c) 81° ; $128^\circ 56'$; $92^\circ 40'$; d) 24° ; $6^\circ 24'$; $8^\circ 25'$.

12. Avem $15^\circ 12' = (15 \cdot 60 + 12)' = 912'$, $24^\circ = (24 \cdot 60)' = 1440'$, așadar $k = \frac{912}{1440} = \frac{19}{30}$. Cum

$\frac{15}{30} < \frac{19}{30} < \frac{20}{30}$, rezultă că $\frac{1}{2} < k < \frac{2}{3}$. 13. $\angle AOC = 65^\circ$, $\angle BOD = 71^\circ$, $\angle AOD = 113^\circ$.

14. a) $\angle AOB = 24^\circ 48'$, $\angle AOC = 49^\circ 36'$, $\angle BOE = 74^\circ 24'$, $\angle BOF = 99^\circ 12'$. 15. Se observă că $OD \subset \text{Int}(\angle BOC)$, prin urmare $\angle BOD = 180^\circ - (\angle AOC + \angle COD) = 35^\circ = \angle AOC$. 16. Dacă $OD \subset \text{Int}(\angle BOC)$, atunci $\angle BOD = 180^\circ - (\angle AOC + \angle COD) = 83^\circ$. Dacă $OD \subset \text{Int}(\angle AOC)$, atunci $\angle BOD = 180^\circ - (\angle AOC - \angle COD) = 147^\circ$. 17. a) $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 127^\circ$, $\angle BOD = 180^\circ - \angle AOC = 53^\circ$; b) $\angle COD = \angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$, deci $\angle COD$ este unghi alungit și, de aici, cerința problemei. 18. Cum $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = a^\circ + b^\circ + a' + b' = (a + b)^\circ + (a + b)'$ se exprimă, în grade, printr-un număr natural, rezultă că $a + b$ se divide cu 60. Dar $0 < a + b < 120$, deci $a + b = 60$, prin urmare $\angle AOB = 60^\circ + 60' = 61^\circ$.

V.2. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare. Unghiuri adiacente

1. Unghiurile reprezentate la c) sunt adiacente, iar cele de la a), b) și d) nu sunt adiacente.

4. a) 60° ; b) 45° ; c) 7° ; d) $77^\circ 47'$. 5. a) 150° ; b) 45° ; c) 90° ; d) $77^\circ 13'$. 6. a) $53^\circ 30'$; b) $22^\circ 30'$. 7. a) $77^\circ 30'$; b) 150° . 8. Complementul unghiului este $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, deci unghiul are măsura $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

9. Fie x măsura, în grade, a unghiului căutat. Avem $\frac{(90 - x) + (180 - x)}{2} = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 270 - 2x = 120 \Rightarrow x = 75$. 10. Fie x măsura, în grade, a unghiului căutat. Avem $2(90 - x) = \frac{2}{3}(180 - x) \Rightarrow 6(90 - x) = 2(180 - x) \Rightarrow 3(90 - x) = 180 - x \Rightarrow 270 - 3x = 180 - x \Rightarrow 270 = 180 +$

$+ 2x \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45$. 11. Fie a și b (grade) măsurile celor două unghiuri; atunci $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ și

$a + b = 180$. Obținem $a = 75$, $b = 105$, așadar $\frac{2}{3} \cdot b = 70^\circ$, iar $\frac{4}{5} \cdot a = 60^\circ$, de unde concluzia

6. $d_1 \perp OA$, $d_2 \perp OB \Rightarrow d_1 \perp AB$, $d_2 \perp AB \Rightarrow d_1 \parallel d_2$. 7. a) $O_1O_2 > R_1 + R_2 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt exterioare; b) $R_2 - R_1 < O_1O_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt secante; c) $O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior; d) $O_1O_2 < R_2 - R_1 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt interioare; e) $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt concentrice; f) $O_1O_2 = R_2 - R_1 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt tangente interior. 8. a) $O_1O_2 = R_2 - R_1 \Rightarrow 2x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$; b) $R_2 - R_1 < O_1O_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow 3 < 2x + 3 < 11 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$; c) $O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow 2x + 3 = 11 \Rightarrow x = 4$. 9. $O_1A = R_1 = O_1B = 2,7$ cm, $O_2C = R_2 = O_2D = 1,95$ cm, deci $AC = O_1O_2 - (O_1A + O_2C) = 1,35$ cm. 10. $O_1D = R_1 = O_1A = 2,8$ cm, $O_2C = R_2 = O_2B = 3,5$ cm, deci $CD = O_1D + O_2C - O_1O_2 = 1,1$ cm. 11. $\angle BAC = 90^\circ$. 12. Fie $M (\neq A)$ un punct al dreptei d . Cum $O_1A \perp d$, rezultă că $\angle O_1AM = 90^\circ$. Punctele O_1 , A și O_2 sunt coliniare, prin urmare $\angle O_2AM = 180^\circ - \angle O_1AM = 90^\circ$, așadar $O_2A \perp d$. Rezultă că dreapta d este tangentă în A la cercul $\mathcal{C}_2$. 13. a) Cum AC este tangentă cercului $\mathcal{C}_2$, rezultă că $QC \perp AC$, deci $d(Q, AC) = QC = 5$ cm; b) Cercul $\mathcal{C}_2$ are raza $QC = 5$ cm, deci diametrul OB are lungimea de 10 cm. Rezultă că $AB = 2OB = 20$ cm. 14. $\widehat{AB} = \angle AOB = \angle COD = \widehat{CD}$. 15. Avem $OA = AB = R$ și, cum O , A și B sunt coliniare, rezultă că A este mijlocul segmentului OB . Apoi, cum CD este tangentă cercului $\mathcal{C}_1$, înseamnă că $CD \perp OA$, deci $CD \perp OB$. Astfel, CD este mediatoarea segmentului OB . 16. Cum $OA = OB (= R_2)$, punctul O este situat pe mediatoarea segmentului AB . Dar AB este tangentă la $\mathcal{C}_1$, așadar $OM \perp AB$. Deducem că M este mijlocul lui AB .

Recapitulare și sistematizare prin teste

Testul 1. 2. b) $x = 40$. 3. b) Dreapta d este mediatoarea segmentului BC . Atunci punctul $A \in d$ este situat la egală distanță de punctele B și C , deci $AC = AB = 3,5$ cm. 4. a) $OB = R = \frac{1}{2} AC = 5$ cm; b) $\angle AOB = \widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. 5. Punctele aflate la distanță de 3 cm de punctul A se află pe cercul $\mathcal{C}(A, 3$ cm). Punctele aflate la distanță de 3 cm față de dreapta d se află pe două drepte d_1 și d_2 , paralele cu dreapta d , prima în semiplanul delimitat de d care conține punctul A , iar a doua în semiplanul opus. Observăm că $d_1 \cap \mathcal{C} = \{M, N\}$, $d_2 \cap \mathcal{C} = \emptyset$, deci punctele căutate sunt M și N .

Testul 2. 2. a) $x = 33$; b) $y = 57$. 3. a) $AB = 2R = 12,6$ cm; b) $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = \angle BOC = 120^\circ$. 4. a) Dreptele a și b formează cu secanta d unghiuri corespondente drepte, deci congruente. Prin urmare, $a \parallel b$. 5. Punctul căutat este intersecția dintre dreapta d și mediatoarea segmentului AB .

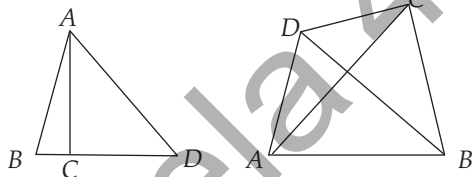
CAPITOLUL VI. TRIUNGHIUL

VI.1. Triunghiul: definiție, elemente. Perimetru. Clasificări

2. a) A; b) F; c) F; d) A; e) F; f) F. 4. a) $\angle B$; b) AB și BC , respectiv AC ; c) $\angle A$ și $\angle C$. 5. Primul este scalen, iar al doilea este isoscel. Ambele sunt triunghiuri dreptunghice. 6. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle M = \angle N = \angle P = 60^\circ$. 7. a) 22 cm; b) 14 cm; c) 15 cm. 8. 7,2 cm. 9. A treia latură poate avea lungimea 3 cm sau 4 cm. Perimetrul triunghiului este 10 cm sau 11 cm. 10. 24 cm, 36 cm și

48 cm. **11.** 13 cm, 14 cm, 15 cm. **12.** Avem $(2a - 5) + (a + 1) + \frac{5a}{4} = 13$, deci $a = 4$ (cm). Atunci

$AC = BC = 5$ cm, prin urmare triunghiul este isoscel, cu baza AB . **13.** Avem $(AB + BD + AD) + (AC + CD + AD) = 64 + 72$, deci $AB + AC + BC + 2AD = 136$, așadar $96 + 2AD = 136$. Deducem că $AD = 20$ m. **15.** a) i) <; ii) <; iii) <; iv) <; v) <; vi) <; b) i) <; ii) <; iii) <; iv) <; v) =; vi) <; c) i) <; ii) <; iii) <; iv) <; v) <; vi) >. **16.** a) Punctele A și B pot fi alese oriunde pe cerc; b) Luăm punctul A la întâmplare pe cerc, iar B va fi unul dintre punctele în care mediatoarea segmentului AO intersectează cercul. **17.** a) 6 triunghiuri: $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, $\triangle ACD$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$; b) 5 triunghiuri: $\triangle ABC$, $\triangle ADF$, $\triangle BDE$, $\triangle CEF$, $\triangle DEF$; c) 16 triunghiuri: $\triangle AFG$, $\triangle BFG$, $\triangle BDG$, $\triangle CDG$, $\triangle CEG$, $\triangle AEG$, $\triangle ABD$, $\triangle BCG$, $\triangle ACG$, $\triangle ABG$, $\triangle ACD$, $\triangle BAE$, $\triangle BCE$, $\triangle CBE$, $\triangle CAF$, $\triangle ABC$. **18.** Numărul minim este 3, atunci când trei dintre puncte sunt coliniare. În situația din prima figură alăturată, cele trei triunghiuri sunt $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ și $\triangle ABD$. Numărul maxim este 4 (a doua figură alăturată), când oricare trei puncte sunt necoliniare: $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ și $\triangle BCD$.



VI.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior

1. a) $\sphericalangle C = 50^\circ$; b) $\sphericalangle A = 106^\circ$; c) $\sphericalangle B = 47^\circ$. **2.** 60° . **3.** a) $\sphericalangle C = 90^\circ$; b) $\sphericalangle A = 90^\circ$. **4.** a) $\sphericalangle C = 180^\circ - (70^\circ + 55^\circ) = 55^\circ = \sphericalangle B \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel cu $AB = AC$; b) $\sphericalangle B = 180^\circ - (37^\circ 30' + 105^\circ) = 37^\circ 30' = \sphericalangle A \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel cu $AC = BC$. **5.** Ambele au măsura de 30° . **6.** 72° și 36° sau 54° și 54° . **7.** 45° , 60° , respectiv 75° . **8.** 24° , 60° , respectiv 96° . **9.** a) 58° , 60° , 62° ; b) 55° , 60° , 65° . **10.** Fie a , b , c măsurile unghiurilor A , B , respectiv C ale triunghiului ABC . Presupunem că $a + b = 112^\circ$ și $b + c = 85^\circ$. Atunci $(a + b + c) + b = 112^\circ + 85^\circ$, deci $b = 197^\circ - 180^\circ = 17^\circ$, iar $a = 112^\circ - 17^\circ = 95^\circ$ și $c = 85^\circ - 17^\circ = 68^\circ$. **11.** Fie a , b , c măsurile unghiurilor A , B , respectiv C ale triunghiului ABC . Presupunem că $a = b + c$. Cum $a + b + c = 180^\circ$, deducem că $2a = 180^\circ$, de unde $a = 90^\circ$, așadar ABC este un triunghi dreptunghic în A . **12.** $180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$, $180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$, respectiv $180^\circ - (55^\circ + 98^\circ) = 27^\circ$. **13.** Cum $43^\circ + 75^\circ \neq 180^\circ$, unghiul interior și cel exterior nu corespund aceluiași vârf. Unghiul interior suplementar cu cel de 75° are măsura de 105° , iar cel de-al treilea unghi al triunghiului are măsura de $180^\circ - (43^\circ + 105^\circ) = 32^\circ$. **14.** $\sphericalangle ABD$ este unghi exterior triunghiului ABC , prin urmare $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A + \sphericalangle C$. Din $4x + 25^\circ = (2x + 10^\circ) + (3x - 10^\circ)$ obținem că $x = 25^\circ$. **15.** $(2x + 8^\circ) + (3x + 4^\circ) + (2x - 2^\circ) = 360^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$. **16.** $\sphericalangle A = 180^\circ - (\sphericalangle AMP + \sphericalangle APM) = 70^\circ$; $\sphericalangle C = 180^\circ - (\sphericalangle CNP + \sphericalangle CPN) = 48^\circ$; $\sphericalangle B = 180^\circ - (\sphericalangle A + \sphericalangle C) = 62^\circ$. **17.** $\sphericalangle A = \sphericalangle CNM = 58^\circ$ (alterne interne); $\sphericalangle B = 180^\circ - (\sphericalangle A + \sphericalangle C) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. **18.** $\sphericalangle PBA = \sphericalangle A = 70^\circ$ (alterne interne) și $\sphericalangle PAB = \sphericalangle B = 45^\circ$ (alterne interne), prin urmare $\sphericalangle P = 180^\circ - (\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA) = 65^\circ$. Apoi $\sphericalangle C = 180^\circ - (\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 65^\circ$, deci $\sphericalangle CBM = \sphericalangle C = 65^\circ$ (alterne interne) și $\sphericalangle BCM = \sphericalangle B = 45^\circ$ (alterne interne), așadar $\sphericalangle M = 180^\circ - (\sphericalangle CBM + \sphericalangle BCM) = 70^\circ$. În sfârșit, $\sphericalangle N = 180^\circ - (\sphericalangle M + \sphericalangle P) = 45^\circ$. **19.** Avem $\sphericalangle DAC = \sphericalangle B + \sphericalangle C$, iar $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, deoarece sunt unghiuri de la baza triunghiului isoscel ABC . Atunci $\sphericalangle MAC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot 2\sphericalangle C = \sphericalangle C$ și, cum $\sphericalangle MAC$ și $\sphericalangle C$ sunt unghiuri alterne interne relativ la dreptele AM , BC și secanta

CUPRINS

<i>Cuvânt-înainte</i>	5
-----------------------------	---

PROBLEME RECAPITULATIVE – CLASA A V-A	7
--	---

TESTE INIȚIALE	12
-----------------------------	----

ARITMETICĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime.....	14
I.2. Relații între mulțimi	16
I.3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale	18
I.4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.....	20
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	23
I.5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	24
I.6. Cel mai mare divizor comun. Numere prime între ele.....	27
I.7. Cel mai mic multiplu comun.....	29
I.8. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$	32
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	35

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORȚII

II.1. Rapoarte	37
II.2. Procente.....	41
II.3. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor	44
II.4. Proporții derivate. Șir de rapoarte egale.....	47
II.5. Mărimi direct și invers proporționale	50
II.6. Regula de trei simplă.....	54
II.7. Elemente de organizare a datelor	55
II.8. Probabilități	61
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	65

CAPITOLUL III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

III.1. Număr întreg. Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi	67
III.2. Adunarea și scăderea numerelor întregi	71
III.3. Înmulțirea numerelor întregi	74
III.4. Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	77
III.5. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri	80
III.6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor.....	83

III.7. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor întregi.....	85
III.8. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi	87
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	89

CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1. Număr rațional. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale.....	90
IV.2. Adunarea și scăderea numerelor raționale	97
IV.3. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale	102
IV.4. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri	106
IV.5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor.....	110
IV.6. Ecuații în mulțimea numerelor raționale.....	114
IV.7. Probleme rezolvate cu ajutorul ecuațiilor.....	118
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	121

GEOMETRIE

CAPITOLUL V. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1. Unghiul. Recapitulare și completări.....	123
V.2. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare. Unghiuri adiacente	126
V.3. Bisectoarea unui unghi.....	128
V.4. Unghiuri opuse la vârf	131
V.5. Unghiuri formate în jurul unui punct.....	133
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	135
V.6. Drepte paralele.....	136
V.7. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă	140
V.8. Drepte perpendiculare în plan.....	144
V.9. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă.....	149
V.10. Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru	154
V.11. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	159
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	163

CAPITOLUL VI. TRIUNGHIUL

VI.1. Triunghiul: definiție, elemente. Perimetru. Clasificări	165
VI.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior.....	169
VI.3. Construcția triunghiurilor	172
VI.4. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi	175
VI.5. Mediatoarele laturilor unui triunghi	178
VI.6. Înălțimile unui triunghi	180
VI.7. Medianele unui triunghi.....	184
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	186

VI.8. Congruența triunghiurilor oarecare. Criteriile de congruență a triunghiurilor	187
VI.9. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice	192
VI.10. Metoda triunghiurilor congruente	196
VI.11. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment.....	200
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	203
VI.12. Proprietăți ale triunghiului isoscel.....	205
VI.13. Proprietăți ale triunghiului echilateral	212
VI.14. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic.....	217
VI.15. Teorema lui Pitagora.....	222
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	225

RECAPITULARE FINALĂ

ARITMETICĂ	227
GEOMETRIE	231

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	240
------------------------------	-----