

Gheorghe IUREA
Adrian ZANOSCHI
Gabriel POPA
Gabriela ZANOSCHI
Ioana ANTON

matematică

aritmetică

geometrie

clasa a V-a

ediția a V-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 5358/01.09.2022.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a V-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca

Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică : aritmetică, geometrie : clasa a V-a / Gheorghe Iurea,
Adrian Zanoschi, Gabriel Popa, ... – Ed. a 5-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4307-0

I. Iurea, Gheorghe

II. Zanoschi, Adrian

III. Popa, Gabriel

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

TESTE ÎNȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

- (2p) 1. Calculați: $100 + 36 : 9 \cdot 4 - 108$.
- (2p) 2. Zece caiete de același fel costă 40 de lei. Aflați câți lei costă cinci dintre aceste caiete.
- (1p) 3. Calculați perimetrul unui dreptunghi, știind că lățimea sa este de 10 cm, iar lungimea sa este de două ori mai mare decât lățimea.
- (1p) 4. Calculați suma tuturor numerelor naturale de două cifre care au cifra zecilor cu 7 mai mică decât cifra unităților.
- (1p) 5. În fiecare zi dintr-o săptămână, temperatura medie a crescut cu 2°C față de ziua precedentă, iar luni temperatura medie a fost de 6°C . Aflați temperatura medie în ziua de duminică a respectivei săptămâni.
- (1p) 6. Ioana are două cutii, fiecare cu câte 12 biscuiți. Ea împarte, în mod egal, toți biscuiții cu cele două surori ale sale. Cu câți biscuiți rămâne ea?
- (1p) 7. Un vas plin cu zahăr cântărește 450 de grame. Dacă se scoate jumătate din cantitatea de zahăr, vasul și zahărul rămas cântăresc 250 de grame. Aflați câte grame cântărește vasul gol.

TESTUL 2

- (2p) 1. Calculați: $250 - 20 : (13 \cdot 9 + 3 - 118)$.
- (2p) 2. Sfertul jumătății unui număr natural este 74. Aflați numărul.
- (1p) 3. Găsiți cel mai mic număr natural cu suma cifrelor egală cu 10.
- (1p) 4. Bunica lui Mihai a început un tratament în care trebuie să ia, în total, 18 pastile, câte una la fiecare 8 ore. Mihai a socotit că tratamentul va dura exact 6 zile. A calculat el corect durata tratamentului?
- (1p) 5. Andrei avea, la un moment dat, 100 de timbre în colecția lui. Aflați câte timbre va avea el, după ce primește de la mama sa 25 de timbre și de la tatăl său triplul numărului de timbre pe care i le-a dat mama.
- (1p) 6. Aflați câți lei costă 1 kilogram de pere, știind că 2 kilograme de mere și 1 kilogram de pere costă împreună 15 lei, iar 3 kilograme de mere și 2 kilograme de pere costă, în total, 26 de lei.

NUMERE NATURALE

CAPITOLUL I OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

I.1. SCRIEREA ȘI CITIREA NUMERELOR NATURALE



• Numerele naturale **se scriu** ca o succesiune de unul sau mai multe simboluri numite **cifre arabe**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

O cifră se poate repeta în scrierea unui număr natural, iar prima cifră a oricărui număr natural de cel puțin două cifre este întotdeauna nenulă.

• Acest mod de scriere a unui număr natural se numește **sistem zecimal** (sau **scriere în baza zece**), deoarece sunt folosite 10 cifre, iar 10 unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

• Scrierea numerelor naturale în baza zece este una pozițională, întrucât valoarea unei cifre depinde de poziția ocupată de aceasta.

• Pentru un număr de două cifre folosim notația $\overline{ab}$, unde a și b reprezintă cifre în sistem zecimal, cu $a \neq 0$. Descompunerea numărului $\overline{ab}$ în baza 10 este:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

• Pentru un număr de trei cifre folosim notația $\overline{abc}$, unde a , b și c reprezintă cifre în sistem zecimal, cu $a \neq 0$. Descompunerea numărului $\overline{abc}$ în baza 10 este:

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Similar se procedează cu numere de patru sau mai multe cifre.

• Pentru a **citi** un număr natural scris în baza zece, grupăm cifrele numărului respectiv câte trei, de la dreapta la stânga; grupele formate se numesc **clase**. Fiecare clasă este compusă din unități, zeci și sute (de la dreapta la stânga). Denumirile claselor, de la dreapta la stânga, sunt: clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanei, clasa miliardelor etc. De exemplu, numărul 257 340 198 se citește „două sute cincizeci și șapte de milioane trei sute patruzeci de mii o sută nouăzeci și opt”, iar tabelul de mai jos evidențiază poziția și denumirea fiecărei cifre.

clasa milioanei			clasa miilor			clasa unităților		
sute	zeci	unități	sute	zeci	unități	sute	zeci	unități
2	5	7	3	4	0	1	9	8

PROBLEME REZOLVATE

1. Răsturnatul numărului natural $\overline{abcd}$, cu $d \neq 0$, este numărul natural $\overline{dcba}$. Aflați toate numerele naturale de patru cifre, știind că fiecare număr este egal cu răsturnatul său și suma cifrelor sale este egală cu 6.

Soluție: Căutăm numerele naturale $\overline{abcd}$ cu $\overline{abcd} = \overline{dcba}$, de unde $a = d$ și $b = c$. În plus, numerele $\overline{abba}$ au proprietatea că $a + b + b + a = 6$, deci $a + b = 3$. Soluțiile problemei sunt: 1221, 2112 și 3003.

2. Aflați toate numerele naturale de cinci cifre, scrise în baza zece, care au:

- cifra unităților cu 3 mai mare decât cifra zecilor;
- cifra miilor egală cu cea mai mare cifră pară;
- cifra sutelor cu 2 mai mică decât cifra unităților;
- produsul cifrelor egal cu 0;
- toate cifrele diferite între ele.

Soluție: Căutăm numerele naturale de forma $\overline{a8bcd}$, cu $d = c + 3$, $b = d - 2$, și $a \cdot 8 \cdot b \cdot c \cdot d = 0$. Cum $b = c + 1$ și $d = c + 3$, deducem că $b \neq 0$ și $d \neq 0$. De asemenea, $a \neq 0$ (cifra de pe prima poziție), deci este necesar ca $c = 0$, de unde $b = 1$, $d = 3$, iar a poate lua oricare dintre valorile 2, 4, 5, 6, 7, 9. Numerele căutate sunt: 28103, 48103, 58103, 68103, 78103 și 98103.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți, în baza zece, numerele următoare:

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) douăzeci și patru; | b) nouăsprezece; |
| c) patru sute cinci; | d) opt sute șaisprezece; |
| e) trei sute treizeci și trei; | f) o mie patru; |
| g) cinci mii opt sute zece; | h) șapte mii trei sute patruzeci și opt. |

2. Scrieți, în baza zece, numerele următoare:

- a) treizeci de mii patru sute treisprezece;
- b) cincisprezece mii două sute patruzeci și trei;
- c) șase sute opt mii opt sute șase;
- d) patru milioane șase sute șapte mii;
- e) treisprezece milioane nouă sute șase mii o sută doi;
- f) nouă sute de milioane nouă sute nouă.

3. Citiți numerele naturale de mai jos:

- | | | | | | |
|-------|--------|--------|---------|---------|---------|
| a) 7; | b) 19; | c) 43; | d) 109; | e) 310; | f) 925. |
|-------|--------|--------|---------|---------|---------|

4. Citiți următoarele numere naturale:

- | | | | | | |
|----------|------------|------------|-------------|---------------|----------------|
| a) 1307; | b) 93 002; | c) 27 413; | d) 123 321; | e) 4 309 005; | f) 28 008 200. |
|----------|------------|------------|-------------|---------------|----------------|

5. Aflați toate numerele naturale de două cifre, având cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.

6. Scrieți cinci numere naturale, având suma cifrelor egală cu 2.
7. Scrieți cinci numere naturale impare, diferite de 21, având suma cifrelor egală cu 3.
8. Descompuneți, în baza 10, numerele naturale:
a) 27; b) 135; c) 9148; d) 12043.
9. Descompuneți, în baza 10, numerele naturale de mai jos și efectuați calculele, acolo unde este posibil:
a) $\overline{aa}$; b) $\overline{abab}$; c) $\overline{x0yx}$; d) $\overline{xyyx}$; e) $\overline{2a3a1}$; f) $\overline{1bb20}$.
10. Scrieți numerele naturale care au următoarea descompunere în baza 10:
a) $3 \cdot 10 + 5$; b) $4 \cdot 100 + 7$;
c) $9 \cdot 100 + 3 \cdot 10$; d) $5 \cdot 10000 + 7 \cdot 100 + 1$;
e) $4 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$; f) $17 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 9$.
11. Scrieți toate numerele naturale de două cifre, formate din cifre pare distincte.
12. a) Scrieți toate numerele naturale de două cifre, care se pot forma cu cifrele 1, 2 și 3.
b) Scrieți toate numerele naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cifrele 7, 8 și 9.
13. Scrieți toate numerele naturale de trei cifre, cu exact două cifre egale, care se pot forma cu cifrele 0, 1 și 2.
14. Determinați numerele naturale de trei cifre, formate din trei cifre distincte, având diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților egală cu 8.
15. Aflați toate numerele de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan condițiile:
a) cifra sutelor este cea mai mică cifră pară;
b) cifra unităților este cea mai mare cifră impară;
c) cifra miilor este de două ori mai mică decât cifra zecilor.
16. Determinați numerele naturale de patru cifre, care au cifra miilor egală cu 6, cifra sutelor egală cu suma dintre cifra zecilor și cifra unităților, iar cifra zecilor depășește cifra miilor.
17. Scrieți răsturnatul fiecăruia dintre numerele naturale: 12, 371, 1238, 20104, 111333, 710017.
18. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = \overline{cba}$ și $a + b + c = 4$.
19. Găsiți corespondența dintre cele două coloane de mai jos.
- | | |
|---|----------|
| 1. Număr natural cu cifra sutelor minimă, nenulă. | A. 98010 |
| 2. Număr natural cu cifra zecilor de mii egală cu cifra zecilor. | B. 98170 |
| 3. Număr natural cu suma cifrelor minimă. | C. 99018 |
| 4. Număr natural cu toate cifrele nenule. | D. 96009 |
| 5. Număr natural cu cifra miilor cu 6 mai mare decât cifra sutelor. | E. 97093 |
| 6. Număr natural cu cifra unităților maximă, pară. | F. 97217 |
20. Aflați câte numere naturale cuprinse între 432 și 531 conțin, în scrierea lor, cifra 3.

11. Rezolvați ecuațiile:

a) $53_{(x)} = 38_{(10)}$;

b) $43_{(x)} + 31_{(x)} = 39_{(10)}$.

12. Câte numere scrise în baza 2 au șase cifre?

13. Scrieți numărul 202 ca o sumă de puteri cu baza 2, având exponenți diferiți.

14. Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $2\overline{abc} + \overline{abc}7 = 10312$.

15. O bunică are doi nepoți. Vârsta bunicii este un număr de două cifre cu proprietatea că prima cifră reprezintă vârsta unui nepot, iar a doua cifră este vârsta celui alt nepot. Aflați vârsta bunicii și a nepoților săi, știind că suma vârstelor celor trei este 89.

16. Determinați toate numerele naturale de două cifre care împărțite la suma cifrelor lor dau câtul 7 și restul 6.

17. Determinați cifrele nenule a, b, x, y, z , știind că $\overline{xyz} = \overline{ab} + 22$ și $\overline{zyx} = \overline{ab} + 814$.

18. Fie cifrele nenule a, b, c, d, x, y, z, t , astfel încât $\overline{ay} + \overline{xb} = 73$ și $\overline{cd} + \overline{zt} = 37$. Calculați $\overline{abcd} + \overline{xyzt}$.

19. Stabiliți dacă există numere naturale de trei cifre $\overline{abc}$, astfel încât $\overline{abc} = a \cdot \overline{bc}$.

20. Se consideră șirul: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, ..., format din toate numerele care se pot scrie doar cu cifrele 0 și 1, ordonate crescător. Determinați termenul șirului care se află pe poziția 100.

I.12. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR CU NUMERE NATURALE.

UTILIZAREA PARANTEZELOR ROTUNDE, PĂTRATE, ACOLADE



- În rezolvarea unui exercițiu care conține mai multe operații aritmetice, precum și diferite paranteze (rotunde, pătrate, acolade), trebuie să respectăm ordinea efectuării operațiilor și ordinea efectuării parantezelor.

- **Ordinea efectuării operațiilor** este:

- 1) ridicarea la putere (operație de ordinul al treilea);
- 2) înmulțirea și împărțirea (operații de ordinul al doilea);
- 3) adunarea și scăderea (operații de ordinul întâi).

- **Ordinea efectuării parantezelor** se bazează pe faptul că întâi se rezolvă operațiile din parantezele rotunde; când acestea sunt finalizate, parantezele pătrate devin paranteze rotunde, iar acoladele devin paranteze pătrate. Acest procedeu se repetă până la eliminarea tuturor parantezelor.

PROBLEME REZOLVATE

1. Calculați $14 + 5 \cdot \{11 + 3 \cdot [2 \cdot 3^3 - (18 + 14 : 2) : 5] - 2^7\}$.

Soluție: $14 + 5 \cdot \{11 + 3 \cdot [2 \cdot 3^3 - (18 + 14 : 2) : 5] - 2^7\} = 14 + 5 \cdot \{11 + 3 \cdot [2 \cdot 3^3 - (18 + 7) : 5] - 2^7\} = 14 + 5 \cdot [11 + 3 \cdot (2 \cdot 3^3 - 25 : 5) - 2^7] = 14 + 5 \cdot [11 + 3 \cdot (2 \cdot 27 - 25 : 5) - 2^7] = 14 + 5 \cdot [11 + 3 \cdot (54 - 5) - 2^7] = 14 + 5 \cdot (11 + 3 \cdot 49 - 2^7) = 14 + 5 \cdot (11 + 3 \cdot 49 - 128) = 14 + 5 \cdot (11 + 147 - 128) = 14 + 5 \cdot (158 - 128) = 14 + 5 \cdot 30 = 14 + 150 = 164.$

2. Aflați numărul natural x din egalitatea $[2^3 \cdot (32 + 2 \cdot 3^2) : 5^2 + 2^4] : x = (2^5)^{20} : 4^{7^2}$.

Soluție: Egalitatea se rescrie, echivalent, astfel: $[2^3 \cdot (32 + 2 \cdot 9) : 25 + 2^4] : x = 2^{100} : 4^{49} \Leftrightarrow [2^3 \cdot (32 + 18) : 25 + 2^4] : x = 2^{100} : (2^2)^{49} \Leftrightarrow (2^3 \cdot 50 : 25 + 2^4) : x = 2^{100} : 2^{98} \Leftrightarrow (2^3 \cdot 2 + 2^4) : x = 2^2 \Leftrightarrow 2^5 : x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2^5 : 2^2 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8.$

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați:

- $17 \cdot 21 + 17 \cdot 25 - 17 \cdot 37;$
- $[(49 \cdot 12 + 49 \cdot 15) : 9 + 49 \cdot 7] : 10 + 49;$
- $\{[57 \cdot 28 - 57 \cdot (24 : 2 + 57 - 9 \cdot 6)] : 13 - 7\} : 2;$
- $299 : 13 - 260 : 13 + 39 \cdot (18 - 4 \cdot 2).$

2. Calculați:

- $9 - 8 + 7 \cdot [6 \cdot 5 - 4 \cdot (3 + 2) - 1] : 9;$
- $98 - 2 \cdot \{72 - 4 \cdot [48 - 6 \cdot (21 : 7 + 36 : 12)]\};$
- $121 - 21 \cdot 5 + 336 : [270 - 37 \cdot (256 : 128 + 576 : 144)];$
- $1510 - 5 \cdot (9600 : 30 - 15 \cdot 54 : 9) + 630.$

3. Calculați:

- $15 - 5 \cdot 2 + 8 : 4;$
- $[63 : (1 + 2 \cdot 2 + 4 : 2) - 4 \cdot 2] \cdot 7 - 5;$
- $9 \cdot 6 - 2 \cdot [(11 + 7 \cdot 3) : 2^3 + 3^2];$
- $\{15 \cdot 4 + 15 \cdot 16 - 20 \cdot [(5^2 - 3^2 + 2^3) : 8 - 2]\} : 10.$

4. Calculați:

- $[(1^3 + 3^2 - 2^3) \cdot 5^2 - 7^2] \cdot 8^2 - 2^6;$
- $(18^3 : 18^2 - 17^4 : 17^3 + 15 : 5) \cdot 2^2 - 3^2;$
- $\{[(2^{10} \cdot 9^7) : (2^5 \cdot 3^6)^2 + 28^0] : 5\}^5;$
- $742 - 3^2 \cdot \{446 - 2^3 \cdot [271 - 5^2 \cdot (3^7 \cdot 3^8 : 3^{10} : 3^3)]\}.$

5. Calculați:

- $10^2 - (5^2 \cdot 5 - 6 \cdot 7 + 17 \cdot 7^0) : 10 \cdot 3^2;$
- $\{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 4^5 : 2^4 - (2^2)^2]\} : 3^2 + 10^0 - 0^{10};$
- $(25^3)^4 : (3^2 + 4^2)^{10} - 0^3 \cdot 3^0 + (4 \cdot 6)^2 - 5^{2^2};$
- $81^5 : 3^{19} \cdot 3^2 - 3^2 + 27^2 \cdot 3^{27} : 81^6 : 9^3.$

6. Calculați:

- a) $(2 + 4 + 6 + \dots + 120) : (1 + 2 + 3 + \dots + 60)$;
b) $[(4 + 8 + 12 + \dots + 100) : (1 + 2 + 3 + \dots + 25) : 2^2]^{371}$.

7. Calculați:

- a) $(3x + 4x - 2x) : x$;
b) $[5 \cdot (3x + 7x) - 3 \cdot (5x + 4x)] : 23 + 2x$;
c) $21x - \{3x + [2x + (4x + 2x) \cdot 3] : 5\} : 7$.

8. Aflați numărul natural n din egalitățile de mai jos:

- a) $49 - n + 40 : 5 + 13 = 10$;
b) $[(n + 138 : 6) \cdot 9] : 6 = 102$;
c) $(540 : 6 + n) \cdot 7 - 100 = 600$.

9. Aflați valoarea naturală a numărului a din egalitățile:

- a) $100 - [36 + 6 \cdot 9 - (a : 3 + 15)] : 3 = 76$;
b) $100 \cdot 3 - [62 \cdot (8 + 17 : 17 - 23 : 23)] : 4 : a = 238$;
c) $(123 : 3 + 362 : 2 - 64 \cdot 3 + a) \cdot 7 = 448 : 8 \cdot 10$.

10. Aflați numărul natural b din egalitatea:

$$4536 - [536 + 9 \cdot 43 - (2b + 6 \cdot 8 - 5 \cdot 7)] = 1936 : 4 \cdot 8.$$

11. Aflați numărul natural nenul x din egalitatea:

$$\{[(1 \cdot 1 + 2 : 2 + 3 \cdot 3) \cdot 4 : 4 + 5 \cdot 5] : x + 7 : 7\} \cdot 8 = 9 \cdot 9 - 5 \cdot 5.$$

12. Aflați numărul natural nenul y din egalitatea:

$$2021 : \{2021 - [2021 - 22 : (20 : y + 21)]\} = 2021.$$

13. Aflați numărul natural a din egalitatea $[(2^3)^4 : (2^2)^5 + 2^2] : a + 1 = 2^3 + 2^0$.

14. Aflați cifra a , în baza 10, din egalitatea $\overline{aaa} + 2 \cdot \overline{aa} - 3 \cdot a = 910$.

15. Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\overline{ab}$ este egal cu jumătate din suma dintre răsturnatul său și numărul 80.

16. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ care verifică egalitatea $3 \cdot \overline{ab} = \overline{a1} + \overline{b7} + 17$.

17. Aflați cifrele a , b și c , în baza 10, astfel încât $\overline{abc} + \overline{abc} \cdot 9 + 2 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot c = 1046$.

18. Aflați cifrele a și b , în baza 10, care verifică egalitatea:

$$(2 \cdot \overline{ab} - 3 \cdot \overline{ba}) \cdot 11 = (\overline{aab} - b) : 50.$$

19. Monica dorește să cumpere un buchet de trandafiri. Dacă ar cumpăra cu 2 trandafiri în plus față de numărul stabilit inițial, ea ar plăti 171 lei. Dacă ar rămâne la numărul inițial de trandafiri, dar ar alege un alt magazin, unde prețul unui trandafir este de trei ori mai mare decât cel inițial, atunci suma de plată ar fi de 459 lei. Determinați cât va plăti Monica dacă revine la planul inițial.

20. Împărțind suma a trei numere consecutive la 8, obținem câtul 11 și restul 5. Aflați cele trei numere.

21. La cel mai mare cub perfect de două cifre se adaugă jumătatea celui mai mic pătrat perfect de trei cifre, iar rezultatul obținut se înmulțește cu 7. Noul rezultat se împarte exact la un număr natural nenul, câtul obținut fiind 133. Aflați împărțitorul.

22. Maria și Daniel au împreună, în prezent, 26 de ani. În urmă cu trei ani, vârsta Mariei era de trei ori mai mare decât vârsta lui Daniel. Aflați peste câți ani vârsta Mariei va fi dublul vârstei lui Daniel.

23. Patru eleve au de rezolvat 69 de exerciții. Cristina rezolvă de trei ori mai multe exerciții decât Corina, Cătălina rezolvă de trei ori mai puține exerciții decât Corina, iar Carmen rezolvă cât Cristina și Cătălina la un loc. Aflați câte exerciții a rezolvat fiecare fată.

24. Comparați numerele naturale:

$$a = 27^{40} \text{ și } b = [(3^3 + 3^4 - 6 \cdot 3) : (2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3)]^{123}.$$

25. Determinați numărul natural n din egalitatea:

$$(15 \cdot 3^{n+2} \cdot 7^n - 8 \cdot 3^n \cdot 7^{n+1}) : 79 = 441.$$

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(2p) 1. Calculați:

a) $2^3 + 4^0 - 3^2$;

b) $(8^2 + 15^2) : 17^2$;

c) $(2 \cdot 2^5 \cdot 2^{15}) : 2^{18}$;

d) $(3^7)^8 : 3^{54}$.

(2p) 2. Calculați:

a) $50 - 40 : [11 - (256 + 44) : 100]$;

b) $3 \cdot 16 + \{7 \cdot [6 - (4 + 2 \cdot 3) : 5] - 8\} : 10$.

(1p) 3. Determinați ultima cifră a numărului 2^{11} .

(1p) 4. Comparați numerele:

a) $x = 2^{60}$ și $y = 3^{61}$;

b) $x = 8^{20}$ și $y = 2^{59}$.

(1p) 5. Determinați numărul natural n , știind că $2^n + 2^n = 2^{32}$.

(1p) 6. Determinați numărul natural x , dacă $1011_{(2)} + 110111_{(2)} = x_{(10)}$.

(1p) 7. Arătați că numărul $a = 20 \cdot [441 : 21^2 + 2 \cdot (2^{60} \cdot 3^{20}) : (2^{59} \cdot 3^{20})]$ este pătrat perfect.

CAPITOLUL II

METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

II.1. METODA REDUCERII LA UNITATE



PROBLEME REZOLVATE

1. Mergând cu viteză constantă, un autoturism parcurge 300 km în 5 ore.

a) Câți kilometri va parcurge autoturismul în 3 ore?

b) Câte ore sunt necesare pentru un drum de 420 km?

Soluție: Distanța parcursă de autoturism crește/scade în același ritm cu mărirea/micșorarea timpului de deplasare: timp mai mare, distanță mai mare; timp mai mic, distanță mai mică. Distanța străbătută într-o oră (adică într-un timp ce cinci ori mai scurt) va fi, așadar, de cinci ori mai mică:

5 ore 300 km

1 oră $300 : 5 = 60$ km

a) În 3 ore, autoturismul va parcurge $60 \cdot 3 = 180$ km.

b) Pentru a acoperi un drum de 420 km, e nevoie de $420 : 60 = 7$ ore.

2. Patru tractoare termină de arat un teren în șase zile.

a) În câte zile ar ara terenul trei tractoare?

b) De câte tractoare ar fi nevoie pentru a termina treaba în patru zile?

Soluție: Timpul necesar lucrării crește/scade în același ritm cu micșorarea/mărirea numărului de tractoare: tractoare mai puține, zile mai multe; tractoare mai multe, zile mai puține. Așadar, un tractor ar ara întregul teren într-un timp de patru ori mai mare decât cele patru tractoare din problemă:

4 tractoare 6 zile

1 tractor $6 \cdot 4 = 24$ zile

a) 3 tractoare ar termina treaba în $24 : 3 = 8$ zile.

b) Pentru a termina în 4 zile, ar fi nevoie de $24 : 4 = 6$ tractoare.

3. a) O cadă de 120 de litri este alimentată de două robinete. Primul robinet poate umple cada în 20 de minute, iar al doilea robinet în 30 de minute. În cât timp ar umple cada, împreună, cele două robinete?

b) Aceeași întrebare, în cazul în care cada are 131 de litri.

Soluție: a) Într-un minut, primul robinet aduce în cadă $120 : 20 = 6$ litri de apă, iar cel de-al doilea $120 : 30 = 4$ litri. Împreună, cele două aduc în cadă $6 + 4 = 10$ litri de apă, așadar vor umple cada în $120 : 10 = 12$ minute.

b) În condițiile problemei, cada se va umple în 12 minute, indiferent ce capacitate are; raționamentul precedent conduce, însă, la calcule urâcioase. Gândim în felul următor: într-o oră (adică 60 de minute), primul robinet umple $60 : 20 = 3$ căzi, iar cel de-al doilea $60 : 30 = 2$ căzi. Împreună, în 60 de minute, vor umple 5 căzi, așadar o cadă va fi umplută în $60 : 5 = 12$ minute.

Am ales ca unitate o perioadă de timp care se împarte atât într-un număr întreg de intervale de 30 de minute, cât și într-un număr întreg de intervale de 20 de minute. În acest caz, „reducere” e doar un fel de-a spune!

PROBLEME PROPUSE

- Pentru a confecționa 4 bluze este nevoie de 8 metri de pânză.
 - Câți metri de pânză trebuie pentru a face 5 bluze?
 - Câte bluze se vor confecționa din 12 metri de pânză?
- Ioana rezolvă 42 de probleme în 7 zile.
 - Câte probleme va rezolva Ioana în 10 zile?
 - De câte zile are nevoie pentru a rezolva 30 de probleme?
- Din 75 de litri de lapte se obțin 3 kg de unt.
 - Câți litri de lapte trebuie pentru 5 kg de unt?
 - Câte kilograme de unt se obțin din 200 de litri de lapte?
- Bunica fierbe prune într-o oală pentru a face magiun. În tabelul de mai jos este descrisă corespondența dintre cantitatea de prune și numărul borcanelor de magiun obținute. Completați spațiile libere din tabel.

	A	B	C	D	E
Cantitate de prune (kg)			6	12	15
Număr borcane de magiun	2	6	4		

- Bunicul dorește să pună murături; el merge la piață, pentru a cumpăra 20 kg de gogonele. La o tarabă vede un carton care arată prețul, ca în desenul alăturat. Câți lei va cheltui bunicul pe gogonele?

GOGONELE 1 kg → 5 lei 5 kg → 20 lei
--

- Tata vrea să taie un trunchi de copac în butuci, pentru a putea depozita mai ușor lemnul de foc pentru iarnă. El observă că, dacă face cinci tăieturi, obține 6 butuci. Câți butuci va obține dacă face zece tăieturi?
- Zece muncitori termină o lucrare în 12 zile.
 - În câte zile vor termina lucrarea șase muncitori?
 - De câți muncitori ar fi nevoie dacă lucrarea trebuie terminată în 3 zile?
- Un bazin poate fi umplut de mai multe robinete având același debit. În tabelul de mai jos este descrisă corespondența dintre numărul de robinete și timpul de umplere a bazinului. Completați spațiile libere din tabel.

	A	B	C	D	E
Număr robinete			24	36	48
Timpul de umplere (ore)	16	12		4	

9. Șase copii mănâncă toate prăjiturile de pe un platou în șase minute. În câte minute ar termina prăjiturile nouă copii?

10. Un cor format din 60 de cântăreți interpretează un imn în 5 minute. În cât timp va interpreta același imn un cor format din 100 de cântăreți?

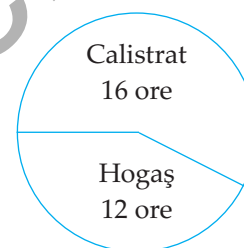
11. Doi cai termină tot fânul din iesle într-o oră. În cât timp ar termina fânul trei cai?

12. Un cal termină fânul din iesle în două ore, iar un mânz în cinci ore. În cât timp ar termina fânul din iesle doi cai și un mânz?

13. Pentru a ara un teren având forma unui pătrat cu latura de 200 de metri, un tractorist primește 1800 de lei. Ce sumă va primi atunci când va ara un teren având forma unui pătrat cu latura de 300 de metri?

14. Pentru a însămânța un teren cu suprafața de 18 hectare, 9 utilaje lucrează timp de 4 zile. De câte utilaje e nevoie pentru a însămânța o suprafață de 28 de hectare în 7 zile?

15. Calistrat și Hogaș, doi meșteri la fel de harnici și de pricepuți, termină împreună o lucrare. În diagrama alăturată se vede cât timp a muncit fiecare. Cei doi primesc, pentru toată treaba, 875 de lei. Cum vor împărți între ei această sumă?



II.2. METODA COMPARAȚIEI

PROBLEME REZOLVATE



1. Dorind să cumpere un buchet de flori, Bianca observă că pentru 3 lalele și 6 narcise ar plăti 39 lei, iar pentru 6 lalele și 6 narcise ar plăti 54 lei.

a) Aflați prețul unei lalele și prețul unei narcise.

b) Calculați câți lei trebuie să plătească Bianca pentru 7 lalele și 4 narcise.

Soluție: 3 lalele 6 narcise 39 lei

6 lalele 6 narcise 54 lei

a) Observăm că diferența de $54 - 39 = 15$ lei se datorează diferenței dintre numerele lalelelor. Așadar, $6 - 3 = 3$ lalele costă 15 lei, așadar prețul unei lalele este de $15 : 3 = 5$ lei. Raportându-ne la prima situație, obținem că 6 narcise costă $39 - 15 = 24$ lei, deci prețul unei narcise este de $24 : 6 = 4$ lei.

b) Suma necesară pentru a cumpăra 7 lalele și 4 narcise este de $7 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 51$ lei.

CAPITOLUL III

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

III.1. DIVIZOR. MULTIPLU. DIVIZORI COMUNI. MULTIPLI COMUNI



1. Fie a și b două numere naturale. Spunem că a este divizibil cu b sau că b îl divide pe a dacă există un număr natural c , astfel încât $a = b \cdot c$. În acest caz, notăm $b \mid a$ (b divide pe a) sau $a : b$ (a este divizibil cu b).

Dacă a este divizibil cu b , spunem că a este un **multiplu** al lui b , iar b este un **divizor** al lui a .

Dacă b este diferit de 0, atunci a este divizibil cu b dacă și numai dacă restul împărțirii lui a la b este 0 (a se împarte exact la b).

Dacă a nu este divizibil cu b , notăm $b \nmid a$ sau $a \nmid b$.

Exemple: $2 \mid 12$, $3 \mid 63$, $13 \mid 39$, $29 \mid 0$, $0 \nmid 14$, $15 \nmid 35$.

2. Singurul număr natural care are o infinitate de divizori este 0 și singurul număr natural care are un singur divizor este 1.

3. Orice număr natural diferit de 1 are cel puțin doi divizori: 1 și numărul însuși. Aceștia se numesc **divizorii improprii** ai numărului, iar ceilalți divizori, dacă există, se numesc **divizori proprii**.

Exemple: 1 și 18 sunt divizorii improprii, iar 2, 3, 6 și 9 sunt divizorii proprii ai numărului 18.

4. Considerăm numerele naturale 12 și 18.

Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12, iar divizorii lui 18 sunt: 1, 2, 3, 6, 9 și 18.

Divizorii comuni ai numerelor 12 și 18 sunt: 1, 2, 3 și 6. Observăm că toți acești divizori comuni sunt divizorii celui mai mare dintre ei, adică ai lui 6.

Multiplii lui 12 sunt: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ..., iar multiplii lui 18 sunt: 0, 18, 36, 54, 72, 90, ...

Multiplii comuni ai numerelor 12 și 18 sunt: 0, 36, 72, 108, 144, ... Există o infinitate de multipli comuni, dar toți sunt multiplii celui mai mic dintre ei care este diferit de 0, adică ai lui 36.



PROBLEME REZOLVATE

1. Arătați că, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$, numărul $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n-3} \cdot 5^4$ este divizibil cu 313.

Soluție: Deoarece $a = 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+5} + 5^{n+1} = 5^{n+1}(2 + 3 \cdot 5^4 + 1) = 5^{n+1} \cdot 1878 = 5^{n+1} \cdot 313 \cdot 6$, rezultă că a este divizibil cu 313.

2. Trei autobuze pleacă la ora 7 din garaj și se întorc astfel: primul peste 2 ore și 10 minute și pleacă din nou pe traseu peste 20 de minute, al doilea se întoarce după 1 oră și 48 de minute și pleacă din nou peste 12 minute, iar al treilea vine peste 1 oră și 36 de minute și pleacă din nou peste 4 minute. Care este următoarea oră la care cele trei autobuze vor pleca din nou în același timp din garaj?

Soluție: Cele trei autobuze pleacă din garaj astfel: primul din 150 în 150 de minute, al doilea din 120 în 120 de minute, iar al treilea din 100 în 100 de minute. Dacă cele trei autobuze pleacă din nou împreună din garaj după x minute (de la ora 7), atunci x este un multiplu comun al numerelor 150, 120 și 100, deci x poate fi 600, 1200 etc. Deci, următoarea oră la care cele trei autobuze vor pleca din nou în același timp este ora 17 (7 + 10).

PROBLEME PROPUSE

1. Arătați că:
 - a) 46 se divide cu 2;
 - b) 1659 se divide cu 7;
 - c) 5151 se divide cu 17;
 - d) 1991 se divide cu 11;
 - e) 95 nu se divide cu 3;
 - f) 2297 nu se divide cu 28.
2. Arătați că:
 - a) 54 este un divizor al numărului 1566;
 - b) 1692 este un multiplu al numărului 47;
 - c) 31 nu este un divizor al numărului 962;
 - d) 245 nu este un multiplu al numărului 15.
3. Arătați că:
 - a) $18 \mid 3060$;
 - b) $308 : 77$;
 - c) 35 divide pe 630;
 - d) 2285 se divide cu 457;
 - e) 97 este un divizor al numărului 4656;
 - f) 140 este un multiplu al numărului 28.
4. Scrieți toți divizorii următoarelor numere naturale:
 - a) 13;
 - b) 18;
 - c) 24;
 - d) 36.
5. Scrieți toate numerele naturale nenule mai mici decât 100 care îndeplinesc proprietatea:
 - a) se divid cu 12;
 - b) se divid cu 18;
 - c) se divid cu 18, dar nu se divid cu 12;
 - d) se divid cu 12, dar nu se divid cu 18;
 - e) se divid cu 12 sau se divid cu 18;
 - f) se divid cu 12 și cu 18.
6. Determinați toate numerele naturale divizibile cu 53, cuprinse între 300 și 500.
7. Câte numere de două cifre sunt divizibile cu 12? Calculați suma acestor numere.
8. a) Scrieți toți multiplii numărului 13 care sunt mai mici decât 65.
b) Scrieți toți multiplii numărului 17 care sunt cel puțin egali cu 85 și cel mult egali cu 170.

9. a) Aflați cel mai mare multiplu al numărului 9 care este mai mic decât 89.
b) Determinați cel mai mic multiplu al numărului 16 care este mai mare decât 272.
10. a) Determinați cel mai mare număr natural de trei cifre care este divizibil cu 34.
b) Determinați cel mai mic număr natural de patru cifre care este un multiplu al numărului 29.
11. Determinați toate numerele naturale de patru cifre, $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab}$ ($a \neq 0$) este un multiplu al lui 34, iar $\overline{cd}$ ($c \neq 0$) se divide cu 43.
12. Demonstrați că, pentru orice număr natural n , numărul $a = 121n + 132$ este divizibil cu 11.
13. Arătați că numărul $a = 52n + 26m + 39$ se divide cu 13, oricare ar fi numerele naturale m și n .
14. Determinați toate numerele de două cifre care împărțite la 23 dau restul egal cu 12.
15. Câte numere de trei cifre au proprietatea că împărțite la 47 dau câtul egal cu restul?
16. Arătați că nu există niciun număr natural n , astfel încât numărul $2n + 6$ să dividă numărul 71.
17. Arătați că nu există niciun număr natural n , astfel încât numărul $2n + 1$ să se dividă cu 18.
18. Determinați patru numere naturale impare consecutive, știind că suma lor este mai mică decât 100 și se divide cu 11.
19. Demonstrați că suma oricăror șapte numere naturale consecutive se divide cu 7.
20. Demonstrați că numărul $a = 2^{25} - 5 \cdot 2^{20} - 2^{22}$ se divide cu 23.
21. Arătați că, pentru orice număr natural n , numărul $a = 2^{2n+3} \cdot 25^n - 4^n \cdot 5^{2n}$ este divizibil cu 7.
22. Fie n un număr natural nenul. Demonstrați că numărul $a = 3^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 17 \cdot 15^n$ se divide cu 2, 3, 4, 5, 6 și 7.
23. Demonstrați că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 7.
24. Demonstrați că, dacă $4 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$, atunci numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 13.
25. Demonstrați că toate numerele de forma $\overline{abcabc}$ se divid cu 7, cu 11 și cu 13.
26. Demonstrați că, dacă 4 divide suma $a + c$, atunci 4 divide și suma $\overline{abc} + \overline{cba}$.
27. Demonstrați că:
a) 8 divide numărul $a = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{21}$;
b) 7 divide numărul $b = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{32}$;
c) 40 divide numărul $c = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{43}$.

28. Scrieți toți divizorii comuni pentru fiecare dintre următoarele perechi de numere naturale:

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) 8 și 12; | b) 15 și 24; | c) 16 și 27; |
| d) 13 și 72; | e) 30 și 45; | f) 24 și 36. |

29. Determinați cel mai mare dintre divizorii comuni pentru fiecare dintre următoarele perechi de numere naturale:

- | | | |
|--------------|--------------|---------------|
| a) 8 și 20; | b) 12 și 18; | c) 9 și 32; |
| d) 19 și 20; | e) 30 și 75; | f) 72 și 144. |

30. Andrei a primit cadou de ziua lui un clasor pentru timbre. El a observat că în clasor ar putea așeza 150 de timbre, punând număr egal de timbre pe fiecare pagină, dar ar putea pune chiar și 200 de timbre, tot cu număr egal de timbre pe fiecare pagină. Aflați numărul maxim de pagini pe care le poate avea clasorul lui Andrei.

31. Într-o zi, toți nepoții bunicii s-au adunat în grădina ei. Bunica a cules 24 de mere și 40 de caise, pe care le-a împărțit în mod egal nepoților săi (fiecare dintre ei a primit același număr de mere și același număr de caise).

- a) Este posibil ca bunica să aibă șase nepoți?
- b) Aflați numărul maxim de nepoți pe care îl poate avea bunica.

32. Dana împarte 75 de creioane, 50 de pixuri și 125 de bomboane în mai multe pachete identice (fiecare pachet are același număr de creioane, același număr de pixuri și același număr de bomboane). Determinați numărul maxim de astfel de pachete și conținutul unui pachet în acest caz.

33. Determinați toți multiplii comuni mai mici decât 100 pentru fiecare dintre următoarele numere naturale:

- | | | |
|--------------|---------------|---------------|
| a) 6 și 12; | b) 4 și 9; | c) 10 și 15; |
| d) 12 și 18; | e) 2, 3 și 5; | f) 2, 4 și 5. |

34. Fie m un multiplu comun al numerelor naturale a și b . Determinați m în fiecare dintre următoarele cazuri:

- a) $a = 6, b = 15, 0 < m < 100$;
- b) $a = 20, b = 70, m \neq 0, m \leq 280$;
- c) $a = 28, b = 14, m \neq 0, m$ este minim;
- d) $a = 75, b = 50, m \neq 0, m$ este minim.

35. Membrii unui club sportiv își fac exercițiile zilnice de gimnastică așezați într-o formație cu mai multe rânduri egale. Niciunul dintre membri nu lipsește niciodată de la antrenamente. În unele zile, rândurile au câte 9 sportivi, iar în alte zile rândurile sunt formate din câte 12 sportivi. Aflați numărul minim de sportivi înscriși în acest club.

FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

CAPITOLUL IV FRACȚII ORDINARE

IV.1. FRACȚII ORDINARE. FRACȚII SUBUNITARE, ECHIUNITARE, SUPRAUNITARE. PROCENTE



- Se numește **unitate fracționară** o parte dintr-un întreg care a fost împărțit în părți de mărimi egale.

- Se numește **fracție** sau **raport** una sau mai multe unități fracționare.

- Notăm fracția:

$\frac{a}{b}$ → **numărător** (indică numărul de unități fracționare)
→ **linie de fracție**
→ **numitor** (indică în câte părți de mărimi egale a fost divizat întregul)

- Se numește **raport procentual** sau **procent** fracția $\frac{p}{100}$, care se scrie și sub forma $p\%$ (p la sută).

- Clasificarea fracțiilor:

- fracție subunitară (numărător < numitor); exemple: $\frac{2}{3}, \frac{7}{9}$;

- fracție echiunitară (numărător = numitor); exemple: $\frac{4}{4}, \frac{8}{8}$;

- fracție supraunitară (numărător > numitor); exemple: $\frac{11}{5}, \frac{29}{6}$.



PROBLEME REZOLVATE

1. Scrieți fracțiile de forma $\frac{\overline{a1}}{b7}$, unde $\overline{a1}$ este un număr natural pătrat perfect, iar $\overline{b7}$ este un număr prim de două cifre.

Soluție: $\overline{a1} = 81$, $\overline{b7}$ poate lua valorile 17, 37, 47, 67, 97.

Sunt cinci fracții: $\frac{81}{17}, \frac{81}{37}, \frac{81}{47}, \frac{81}{67}, \frac{81}{97}$.

2. Fie șirul de fracții $\frac{1}{999}, \frac{2}{998}, \frac{3}{997}, \dots, \frac{999}{1}$.

a) Câte fracții sunt în șir?

b) Care este numărul fracțiilor subunitare?

c) Conține acest șir fracții echiunitare?

d) Câte fracții supraunitare sunt?

Soluție: a) 999 de fracții (regula este ca suma dintre numărător și numitor să fie 1000).

b) Sunt 499 de fracții subunitare: $\frac{1}{999}, \frac{2}{998}, \dots, \frac{499}{501}$.

c) Da, $\frac{500}{500}$.

d) $499 = 999 - (499 + 1)$ fracții supraunitare.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră fracțiile $\frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{6}{14}, \frac{12}{8}, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{14}{14}, \frac{11}{15}$.

a) Scrieți fracțiile cu numitorul 8.

b) Scrieți fracțiile care au numărătorul un multiplu al lui 3.

c) Scrieți fracțiile care au numărătorul și numitorul prime între ele.

2. Considerăm fracțiile $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{6}{6}$.

a) Precizați numărătorul și numitorul fiecărei fracții.

b) Reprezentați fracțiile, considerând întregul un segment cu lungimea de 6 cm.

3. Considerăm un pătrat cu latura de 4 cm. Colorați cu albastru $\frac{5}{16}$ din el și cu gri $\frac{4}{16}$ din el. Ce fracție reprezintă suprafața necolorată?

4. a) Scrieți trei fracții care au numărătorul egal cu 5.

b) Scrieți trei fracții care au numitorul egal cu 8.

c) Scrieți trei fracții care au numărătorul un divizor al lui 18, iar numitorul un multiplu de 5.

5. Câte doimi au:

a) un întreg;

b) doi întregi;

c) o sută de întregi?

6. a) Câte optimi au 8 întregi?

b) Câte treimi au 5 întregi?

c) Câte cincimi au 3 întregi?

7. Câți întregi sunt în:

a) 50 doimi;

b) 35 șeptimi;

c) 40 cincimi;

d) 100 zecimi;

e) 12 treimi;

f) 1000 sferturi?

8. Scrieți ca procente următoarele fracții:

a) $\frac{8}{100}$;

b) $\frac{23}{100}$;

c) $\frac{11}{100}$;

d) $\frac{143}{100}$;

e) $\frac{180}{100}$;

f) $\frac{200}{100}$.

9. Scrieți ca fracții următoarele procente:

a) 2%;

b) 50%;

c) 10%;

d) 20%;

e) 100%;

f) 150%.

10. Se consideră fracțiile: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{6}{7}$.

- a) Scrieți fracțiile subunitare din șir. b) Scrieți fracțiile echiunitare din șir.
c) Câte fracții supraunitare sunt?

11. Se consideră șirul de fracții: $\frac{11}{72}, \frac{12}{3}, \frac{15}{18}, \frac{8}{6}, \frac{9}{12}, \frac{10}{25}, \frac{15}{15}, \frac{18}{7}$. La întrebarea: „Câte fracții subunitare sunt?”, patru elevi au dat răspunsurile:

Ana	5
Bianca	7
Cosmin	8
Dana	4

Răspunsul corect este dat de:

- a) Ana; b) Bianca; c) Cosmin; d) Dana.

12. a) Scrieți fracțiile subunitare care au numărătorul cifră pară nenulă și numitorul cifră impară.

b) Scrieți fracțiile echiunitare care au numărătorul și numitorul cifre impare.

c) Scrieți fracțiile supraunitare care au numărătorul și numitorul cifre pare nenule.

13. Determinați numărul natural n , astfel încât următoarele fracții sunt echiunitare:

- a) $\frac{8}{n+3}$; b) $\frac{12}{n-5}$; c) $\frac{4}{3n+1}$; d) $\frac{7n+2}{16}$; e) $\frac{5n-1}{24}$; f) $\frac{19n+5}{100}$.

14. Determinați numărul natural n pentru care următoarele fracții sunt subunitare:

- a) $\frac{n}{3}$; b) $\frac{n+1}{5}$; c) $\frac{3n+2}{10}$; d) $\frac{5n-1}{18}$; e) $\frac{7}{n+3}$; f) $\frac{11}{2n+1}$.

15. Determinați valorile numărului natural nenul n , astfel încât următoarele fracții să fie supraunitare:

- a) $\frac{8}{3n+1}$; b) $\frac{7}{3n-2}$; c) $\frac{11}{5n+3}$; d) $\frac{2n+1}{7}$; e) $\frac{7n-4}{25}$; f) $\frac{4n-2}{1001}$.

16. Scrieți toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{a^6}{b^3}$, astfel încât numărătorul este un număr natural pătrat perfect, iar numitorul un număr prim.

17. Determinați numărul $\overline{xy}$, astfel încât fracția $\frac{4}{x+y}$ este supraunitară.

18. Determinați fracțiile $\frac{a}{b}$, a, b numerele naturale nenule, dacă:

- a) sunt subunitare și $a + b = 15$; b) sunt supraunitare și $a \cdot b = 36$.

19. Determinați numărul fracțiilor care îndeplinesc următoarele condiții:

a) sunt supraunitare, au numărătorul un divizor al lui 18, iar numitorul un divizor al lui 35;

b) sunt subunitare, au numărătorul un multiplu nenul al lui 22, iar numitorul un multiplu, de două cifre, al lui 33.

20. Determinați numărul fracțiilor care îndeplinesc următoarele condiții:

a) au numărătorul un număr natural nenul de o cifră, iar numitorul un număr natural de două cifre;

b) au numărătorul o cifră nenulă pară, iar numitorul un număr natural impar de două cifre.

IV.2. FRAȚII ECHIVALENTE. COMPARAREA FRAȚIILOR CU ACELAȘI NUMITOR SAU ACELAȘI NUMĂRĂTOR. REPREZENTAREA PE AXĂ A UNEI FRAȚII ORDINARE. INTRODUCEREA ȘI SCOATEREA ÎNTREGILOR DINTR-O FRAȚIE

- Se numesc **fracții echivalente** fracțiile care reprezintă aceeași parte din întreg.

Notăm: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Citim: fracția $\frac{a}{b}$ este echivalentă (egală) cu fracția $\frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$



Observație: Orice număr natural n se poate scrie ca fracția ordinară $\frac{n}{1}$.

- Pentru a **scoate întregii dintr-o fracție supraunitară**, împărțim numărătorul la numitor. Numărul întregilor este câtul împărțirii, numărătorul este restul, iar numitorul nu se schimbă.

$$a = b \cdot c + r \Rightarrow \frac{a}{b} = c \frac{r}{b}.$$



Exemplu: $\frac{15}{7} = 2 \frac{1}{7}$.

- Pentru a **introduce întregii într-o fracție**, înmulțim numărul întregilor cu numitorul, la care se adaugă numărătorul, pentru a obține noul numărător, în timp ce numitorul rămâne neschimbat.

$$c \frac{r}{b} = \frac{c \cdot b + r}{b}.$$

Exemplu: $5 \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$.

- Dintre două fracții ordinare cu același numitor, este mai mare fracția care are numărătorul mai mare.

Exemple: $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$; $\frac{18}{73} < \frac{23}{73}$.

CAPITOLUL V Fracții zecimale

V.1. Fracții zecimale finite



I. Pentru fracțiile ordinare de forma $\frac{1}{10^n}$, $n \geq 1$, se folosește în mod uzual **scrierea pozițională cu virgulă**. Astfel:

- $\frac{1}{10}$, o zecime, se scrie sub forma 0,1;
- $\frac{1}{100}$, o sutime, se scrie sub forma 0,01;
- $\frac{1}{1000}$, o miime, se scrie sub forma 0,001 etc.

În general, $\frac{1}{10^n} = 0, \underbrace{000 \dots 0}_{n-1 \text{ zerouri}} 1$.

II. Orice fracție ordinară care are drept numitor o putere a lui 10 se poate scrie ca **fracție zecimală (număr zecimal)** folosind scrierea pozițională cu virgulă:

$$\frac{321}{100} = \frac{300}{100} + \frac{20}{100} + \frac{1}{100} = 3 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} = 3,21$$

cifra unităților
cifra zecimilor
cifra sutimilor

$$\frac{101}{1000} = \frac{100}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} = 0,101$$

cifra zecimilor
cifra sutimilor
cifra miimilor

III. Dacă $\overline{n,abc}$ este o fracție zecimală, unde n este un număr natural, iar a, b, c sunt cifre, atunci n se numește **partea întreagă**, iar $\overline{0,abc}$ se numește **partea zecimală**.

Vom lua în considerare, deocamdată, doar **fracțiile zecimale finite**, adică cele care au un număr finit de zecimale nenule. Zecimalele, începând de după virgulă și până la ultima nenulă, se numesc **zecimale semnificative**. După acestea, fracției i se pot adăuga oricâte zerouri ne semnificative.

IV. Orice fracție ordinară care, în formă ireductibilă, are numitorul divizibil doar cu 2 sau cu 5 (și nedivizibil cu alt număr prim) se poate scrie sub formă de fracție zecimală finită:

$$\frac{3}{40} \stackrel{5^2)}{=} \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{1000} = 0,075;$$

$$\frac{7}{175} \stackrel{7)}{=} \frac{1}{25} \stackrel{2^2)}{=} \frac{1}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{4}{100} = 0,04.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Scrieți următoarele fracții zecimale sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 0,16;

b) 1,75;

c) 20,002.

Soluție: a) $0,16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$;

b) $1,75 = 1\frac{75}{100} = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$;

c) $20,002 = 20\frac{2}{1000} = 20\frac{1}{500} = \frac{10001}{500}$.

2. Determinați numărul natural n , știind că:

a) $\frac{n}{35} = 2,8$;

b) $\frac{34}{n} = 0,85$.

Soluție: a) Cum $2,8 = 2\frac{8}{10} = 2\frac{4}{5} = \frac{14}{5} = \frac{98}{35}$, rezultă că $n = 98$.

b) Deoarece $0,85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} = \frac{34}{40}$, deducem că $n = 40$.

3. Determinați ultima zecimală semnificativă a fracției zecimale care se obține din

fracția ordinară $\frac{1}{5^{55}}$.

Soluție: Avem $\frac{1}{5^{55}} = \frac{2^{55}}{2^{55} \cdot 5^{55}} = \frac{2^{55}}{10^{55}}$. Ultima zecimală semnificativă (ultima zecimală nenulă) din scrierea zecimală a acestei fracții este ultima cifră a lui 2^{55} . Ne amintim că ultima cifră a puterilor lui 2 se repetă din patru în patru, în succesiunea 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6 etc. Cum 55 dă restul 3 la împărțirea prin 4, rezultă că $u(2^{55}) = u(2^3) = 8$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți ca fracții zecimale următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{117}{10}$; $5\frac{3}{10}$;

b) $\frac{7}{100}$; $\frac{17}{100}$; $\frac{117}{100}$; $\frac{2117}{100}$; $5\frac{3}{100}$; $25\frac{29}{100}$;

c) $\frac{3}{1000}$; $\frac{23}{1000}$; $\frac{123}{1000}$; $\frac{3123}{1000}$; $\frac{10023}{1000}$; $3\frac{33}{1000}$.

2. Citiți următoarele fracții zecimale:

a) 0,7; 1,3; 21,5; 2,1;

b) 0,13; 0,03; 2,51; 21,02;

c) 0,121; 0,017; 0,007; 2,012;

d) 0,2157; 2,0123; 3,10125.

3. Scrieți cu cifre următoarele fracții zecimale:
- a) șaptesprezece sutimi; b) o sută douăsprezece miimi;
c) două sute treizeci și cinci de sutimi; d) paisprezece întregi și paisprezece miimi;
e) cinci virgulă cinci mii cinci.
4. Identificați partea întreagă și partea zecimală pentru fiecare dintre următoarele fracții zecimale:
- a) 0,123; b) 2,7; c) 31,02; d) 1001,3003.
5. Rescrieți următoarele numere, astfel încât partea lor zecimală să conțină trei cifre:
- a) 2,17; b) 3,01; c) 2,7; d) 27.
6. Completați tabelul de mai jos, având ca model prima coloană:

	A	B	C	D
Fracția zecimală	20,17	0,203	2,1	100,01
Cifra unităților	0			
Numărul unităților	20			
Cifra zecimilor	1			
Numărul zecimilor	201			
Cifra sutimilor	7			
Numărul sutimilor	2017			
Cifra miimilor	0			
Numărul miimilor	20170			

7. După modelul: $3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} = 3,257$, scrieți următoarele sume sub formă de fracții zecimale:

- a) $\frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$; b) $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100}$;
c) $2 \cdot 10 + \frac{2}{10} + \frac{2}{1000}$; d) $a \cdot 10 + b + \frac{c}{10} + \frac{d}{100}$.

8. După modelul: $112,103 = 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^3}$, scrieți următoarele fracții zecimale ca sume de puteri ale lui 10 și fracții ordinare având ca numitori puteri ale lui 10:

- a) 2,45; b) 22,202; c) 4,004; d) $\overline{abc,def}$.

9. Determinați cifrele a , b , c și d în fiecare dintre următoarele situații:

- a) $\overline{2a,3bc} = \overline{27,d09}$;
b) $\overline{2ab,c3} = d \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2}$;
c) $\frac{\overline{3abc}}{1000} = \overline{d,103}$.

10. Determinați numărul natural x , știind că:

a) $2,24 = \frac{x}{10^2}$;

b) $2,7 = \frac{2700}{x}$;

c) $x = \frac{14000}{10^4}$.

11. Scrieți următoarele fracții zecimale sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 0,5; 2,5; 0,2; 3,6; 10,8; 1,7;

b) 0,25; 1,75; 0,12; 3,48; 5,55; 1,14;

c) 0,125; 1,825; 2,375; 1,104; 2,328; 0,756.

12. Scrieți următoarele fracții ordinare sub formă de fracții zecimale finite:

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{8}{5}$; $7\frac{4}{5}$;

b) $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$; $3\frac{3}{4}$; $\frac{18}{25}$; $5\frac{4}{25}$;

c) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $2\frac{7}{8}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{137}{125}$;

d) $\frac{1}{20}$; $\frac{13}{40}$; $2\frac{17}{50}$; $\frac{1001}{250}$; $\frac{7}{80}$.

13. Scrieți următoarele fracții ordinare sub formă de fracții zecimale finite:

a) $\frac{21}{140}$; $\frac{27}{75}$; $\frac{33}{176}$; $\frac{51}{120}$; $\frac{49}{875}$;

b) $\frac{36}{15^2}$; $\frac{2 \cdot 3^3 \cdot 7^5}{5 \cdot 21^3}$; $\frac{11 \cdot 4^5 \cdot 25^4}{10^{10}}$.

14. Determinați ultimele două zecimale semnificative ale fracției zecimale care se obține din:

a) $\frac{1}{5^8}$;

b) $\frac{3}{2^4}$;

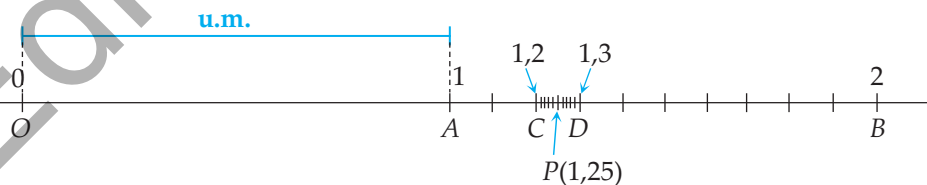
c) $\frac{130}{2^{100}}$.

15*. Fie $N = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{4 \text{ factori}} + \underbrace{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}_{5 \text{ factori}} + \underbrace{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}_{6 \text{ factori}} + \dots + \underbrace{73 \cdot 74 \cdot \dots \cdot 85}_{13 \text{ factori}}$. Determinați partea zecimală a numărului $\frac{N}{100}$.

V.2. REPREZENTAREA PE AXĂ, COMPARAREA ȘI ORDONAREA FRAȚIILOR ZECIMALE FINITE. APROXIMĂRI

I. Reprezentarea fracțiilor zecimale finite pe axa numerelor se realizează la fel ca reprezentarea fracțiilor ordinare: pentru a reprezenta zecimile, împărțim întregul în 10 părți egale, pentru a reprezenta sutimile, împărțim întregul în 100 de părți egale (sau împărțim doar zecimea de care avem nevoie în 10 părți egale) etc.

Exemplu. Dorim să reprezentăm fracția zecimală 1,25 pe axa numerelor.



Alegem o unitate de măsură mai mare, fixăm originea O și identificăm punctele A, B ce corespund numerelor 1, respectiv 2. Împărțim segmentul AB în zece părți egale și găsim punctele C, D , care corespund numerelor 1,2 respectiv 1,3. Apoi

ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

CAPITOLUL VI PUNCTE. DREPTE. PLANE

VI.1. PUNCT. DREAPTĂ. PLAN



I. Punctul ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată pe o foaie de hârtie de un creion bine ascuțit. Punctul nu are dimensiuni.

În figura 1 sunt reprezentate punctele A și B ; nu vom confunda punctul B cu bulina prin care este reprezentat. De obicei, notăm punctele folosind litere mari.

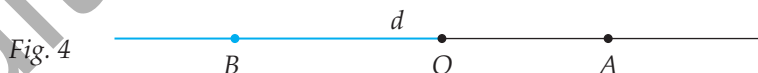
În figura 2, punctele M și N sunt situate în același loc; scriem $M = N$ și spunem că cele două puncte sunt **identice/confundate/coincide**. Punctele M și P nu sunt în același loc; scriem $M \neq P$ și spunem că cele două puncte sunt **distincte/diferite**. De cele mai multe ori, când spunem „punctele M și P ”, subînțelegem că ele sunt distincte.

II. Dreapta este comparabilă cu un fir de ață bine întins, nesfârșit de lung și fără grosime. Dreapta este formată din puncte.

În figura 3 sunt reprezentate două drepte: dreapta d (notată folosind o literă mică) și dreapta AB (notată folosind două litere mari care desemnează două puncte distincte ale sale).

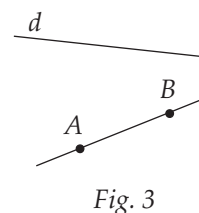
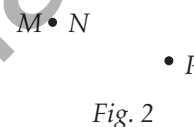
Instrumentul geometric care ajută la trasarea dreptelor este rigla. Date fiind două puncte distincte A și B , constatăm că există o dreaptă și numai una care să treacă prin aceste două puncte; spunem că o dreaptă este determinată de (oricare) două puncte distincte ale sale.

Semidreapta este o parte a unei drepte formată din toate punctele acesteia aflate de aceeași parte față de un punct fixat de pe dreaptă. Punctul „de start” al unei semidrepte este numit **originea semidreptei**.



În figura 4 este desenată o dreaptă d , pe care s-a fixat un punct O . Am reprezentat cu negru punctele dreptei care se află de aceeași parte a lui O ca punctul A și cu albastru punctele dreptei care se află de aceeași parte a lui O ca punctul B . Partea cu negru este semidreapta OA , iar cea cu albastru semidreapta OB .

Când vorbim despre „semidreapta MN ”, înțelegem că originea sa este în primul punct numit, adică în M . Semidreptele MN și NM sunt distincte (în timp ce dreptele MN și NM sunt una și aceeași).



Segmentul este acea parte a unei drepte formată din toate punctele sale situate între două puncte fixate de pe dreaptă. Punctele „frontieră” ale unui segment se numesc **capetele** (**extremitățile**) **segmentului**.

În figura 5, partea drepte d colorată cu albastru reprezintă segmentul AB .



Fig. 5

III. Planul este comparabil cu suprafața unei mese nemărginită în toate direcțiile. Planul nu are grosime, conține drepte și este format din puncte.

Deși este nemărginit, vom reprezenta planul printr-o porțiune dreptunghiulară a sa, care, în perspectivă, va apărea ca un paralelogram (figura 6). Pentru a nota planele, folosim litere mici din alfabetul grec sau trei litere mari care desemnează trei puncte ale sale.

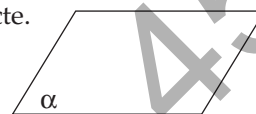


Fig. 6

Semiplanul este o parte a unui plan formată din toate punctele acestuia aflate de aceeași parte față de o dreaptă fixată.

În figura 7, dreapta d separă planul α în două semiplane, unul colorat cu albastru, al doilea cu gri. Dreapta d se numește **frontieră** a celor două semiplane.



Fig. 7

PROBLEME REZOLVATE

1. În figura 8 este reprezentată piramida $ABCD$. Identificați în figură cât mai multe:

- a) puncte; b) drepte; c) plane.

Soluție: a) În figură sunt reprezentate și numite 4 puncte: A , B , C și D . (Putem, însă, identifica în figură multe alte puncte (o infinitate): de exemplu, oricare dintre segmentele AB sau CD conține oricât de multe puncte.)

b) În figură sunt reprezentate 6 segmente: AB , BC , AC , AD , BD și CD . (Unind, însă, un punct oarecare al lui AB cu un punct oarecare al lui CD (de exemplu), putem obține noi segmente.)

c) În figură sunt reprezentate 4 plane: (ABC) , (ABD) , (ACD) și (BCD) .

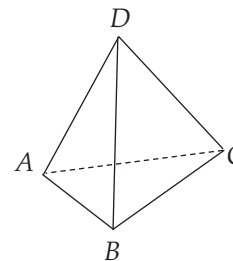


Fig. 8

2. Pe dreapta d_1 considerăm punctele A , B și C , iar pe dreapta d_2 considerăm punctele M și N (figura 9).

a) Câte segmente au drept capete două dintre cele cinci puncte?

b) Câte drepte determină aceste puncte, luate două câte două?

Soluție: a) 10 segmente: AB , AC , BC , MN , AM , AN , BM , BN , CM și CN .

b) 8 drepte: d_1 , d_2 , AM , AN , BM , BN , CM și CN .

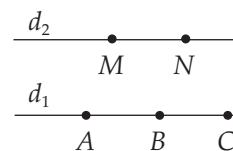


Fig. 9

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră punctele A , B și C . Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

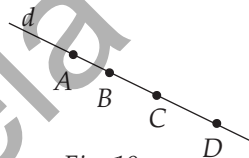
- Dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$.
- Dacă $A = B$ și $B \neq C$, atunci $A \neq C$.
- Dacă $A \neq B$ și $B \neq C$, atunci $A \neq C$.

2. Desenați un punct A și patru drepte d_1 , d_2 , d_3 și d_4 care trec prin punctul A . Câte drepte care trec prin A se pot desena?

3. a) Desenați două puncte distincte A și B , apoi trasați dreapta care trece prin aceste două puncte. Denumiți și notați această dreaptă.

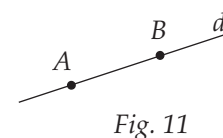
b) Câte puncte conține această dreaptă? Marcați și notați cinci dintre aceste puncte.

4. Denumiți și notați în cel puțin cinci moduri dreapta d din figura 10.



5. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false (figura 11):

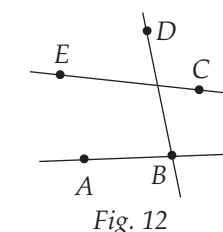
- Dreapta d este formată din punctele A și B .
- Dreapta d este determinată de punctele A și B .
- Dreptele AB și d coincid.



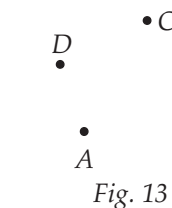
6. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false (figura 11):

- Dreapta AB coincide cu dreapta BA .
- Semidreapta AB coincide cu semidreapta BA .

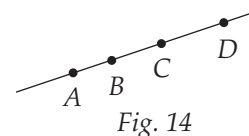
7. În figura 12 sunt reprezentate cinci puncte A , B , C , D , E și trei dintre dreptele pe care aceste puncte le determină, luate două câte două (anume dreptele AB , BD și CE). Desenați și notați celelalte drepte pe care le determină punctele A , B , C , D și E , luate două câte două. Câte drepte determină, în total, aceste puncte?



8. Câte semidrepte au originea în unul dintre punctele A , B , C sau D din figura 13 și trec printr-unul dintre punctele rămase? Denumiți și notați aceste semidrepte.



9. Câte semidrepte au originea în unul dintre punctele A , B , C sau D din figura 14 și trec printr-unul dintre punctele rămase? Denumiți și notați aceste semidrepte.



10. Considerăm un punct O în planul caietului.

a) Câte semidrepte cu originea în O există? Desenați și notați trei astfel de semidrepte.

b) Câte semidrepte trec prin punctul O și au originea într-un alt punct al planului caietului? Desenați și notați trei astfel de semidrepte.

11. În figura 15 este reprezentat pătratul $ABCD$. Identificați segmentele AB , BC , CD , DA , AC și BD . Care dintre aceste segmente sunt laturi ale pătratului și care sunt diagonale?

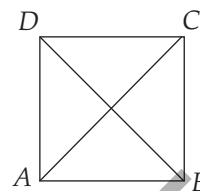


Fig. 15

12. Denumiți și notați segmentele care formează liniile frânte din figura 16. Care dintre acestea sunt linii frânte închise / linii frânte deschise?

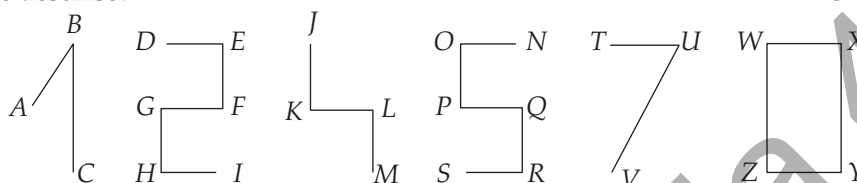


Fig. 16

13. În figura 17, identificați și numiți:

- trei drepte;
- șase semidrepte;
- trei segmente.

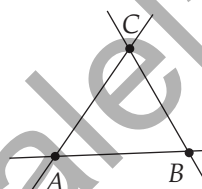


Fig. 17

14. În figura 18, identificați și numiți:

- segmentele care conțin toate punctele situate între B și C ;
- semidreptele care conțin toate punctele segmentului BC .

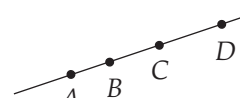


Fig. 18

15. Se consideră punctele A , B , C și D din figura 19.

a) Câte drepte determină cele patru puncte, luate două câte două?

b) Câte segmente au drept capete două dintre cele patru puncte?

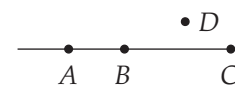


Fig. 19

16*. Se consideră o sută de puncte (distincte) $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

- Câte segmente au drept capete două dintre aceste puncte?
- Ce puteți afirma despre numărul dreptelor pe care le determină aceste puncte, luate două câte două?

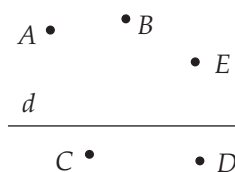


Fig. 20

17. În figura 20, identificați:

- perechi de puncte aflate de aceeași parte a dreptei d ;
- perechi de puncte situate de o parte și de alta a dreptei d .

18. În figura 21, identificați:

a) semidreptele situate în semiplanul delimitat de dreapta AB care conține punctul P ;

b) semidreptele situate în semiplanul delimitat de dreapta CD care nu conține punctul P .

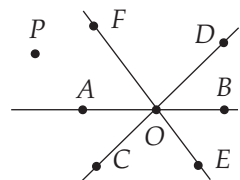


Fig. 21

CAPITOLUL VII UNGHURI

VII.1. UNGHI: DEFINIȚIE, NOTAȚII, ELEMENTE



- Se numește **unghi** figura geometrică formată din două semidrepte cu aceeași origine (figura 1).
- Elementele unghiului sunt:
 - laturile unghiului (cele două semidrepte cu aceeași origine);
 - vârful unghiului (originea semidreptelor).

Notație: $\widehat{AOB}$ sau $\sphericalangle AOB$ sau $\hat{O}$ sau $\sphericalangle O$ (figura 2).

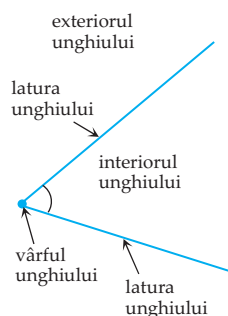


Fig. 1

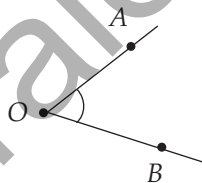


Fig. 2

PROBLEME REZOLVATE

1. În figura 3 este desenat un unghi $\sphericalangle XOY$ și punctele A, B, C, D, E, F .

- Cum mai poate fi denumit unghiul $\sphericalangle XOY$?
- Care sunt laturile unghiului?
- Care este vârful unghiului?
- Care puncte sunt în interiorul unghiului?
- Care puncte sunt în exteriorul unghiului?
- Care puncte sunt pe laturile unghiului?

Soluție: a) $\sphericalangle XOF$ sau $\sphericalangle EOY$ sau $\sphericalangle EOF$.

b) Laturile unghiului sunt semidreptele $[OX]$ și $[OY]$.

c) Vârful unghiului este O .

d) A, B sunt în $\text{Int}(\sphericalangle XOY)$.

e) C, D sunt în $\text{Ext}(\sphericalangle XOY)$.

f) Punctele E și F se află pe laturile OX , respectiv OY .

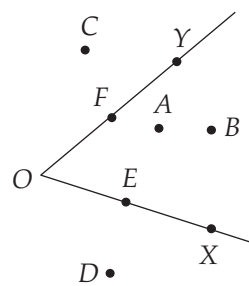
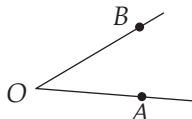
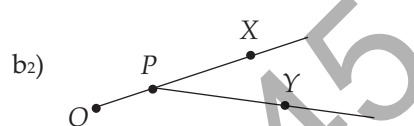
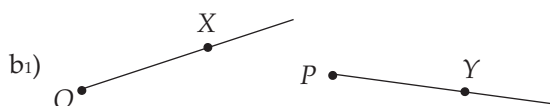


Fig. 3

2. a) Desenați o pereche de semidrepte care să formeze un unghi. Notați-l.
 b) Desenați o pereche de semidrepte care să nu determine un unghi. Observați diferențele dintre cele două figuri.

Soluție: a)  $\angle AOB$ este format din semidreptele OA și OB .



PROBLEME PROPUSE

1. Observați figura 4 și precizați vârful și laturile unghiurilor ABC , BAC și CAB .

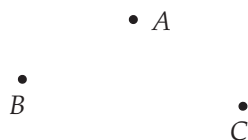


Fig. 4

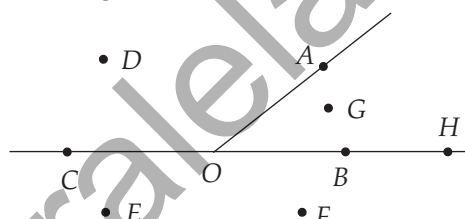


Fig. 5

2. Studiați figura 5 și stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții.

- G este interior unghiului AOB .
- Punctele D, E, F sunt exterioare unghiului AOB .
- Punctul H este pe latura OB a unghiului AOB .
- Punctul C este pe latura OB a unghiului AOB .

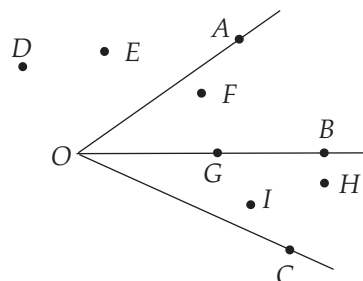


Fig. 6

3. Observați figura 6. Precizați care dintre punctele $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ sunt:

- interioare unghiului AOB ;
- interioare unghiului AOC ;
- exterioare unghiului BOC .

4. În figura 7 sunt desenate mai multe unghiuri.
- Numiți patru dintre unghiurile din figură.
 - Desenați punctele M și N care să fie în interiorul unghiului AOD , dar în exteriorul unghiului BOC .
 - Desenați punctul P care să fie în exteriorul unghiului AOD .

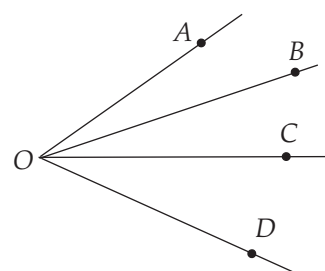


Fig. 7

5. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții referitoare la figura 8:

- Punctul D este interior unghiului AOB .
- Semidreapta deschisă OF este exterioară unghiului AOB .
- Punctul F nu se află în interiorul unghiului AOB .
- Segmentul DF este interior unghiului AOB .
- Dreapta DE este interioară unghiului AOB .

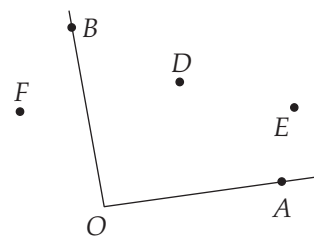


Fig. 8

6. În figura 9 sunt reprezentate dreptele AB , AC , AD , astfel încât punctele B , C , D să fie coliniare.

- Scrieți unghiurile care au o latură semidreapta AB , de origine A .
- Scrieți unghiurile care au o latură semidreapta BA , de origine B .
- Scrieți unghiurile cu vârful în punctul D .

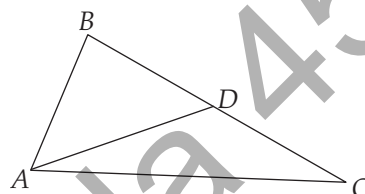


Fig. 9

7. Fie unghiul XOY din figura 10. Desenați trei puncte A , B , C , astfel încât segmentul AB nu intersectează laturile unghiului, iar segmentul AC intersectează latura OY a unghiului dat.

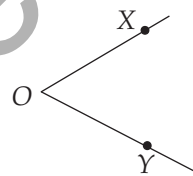


Fig. 10

8. În figura 11, A , E , C și B , D , C sunt puncte coliniare.

- Scrieți un unghi cu vârful în D .
- Scrieți un unghi care are o latură semidreapta EC , de origine E .
- Câte unghiuri din figură au vârful B ?
- Scrieți un unghi care conține punctul D în interior.
- Scrieți un unghi care are semidreapta deschisă EB , de origine E , în interior.

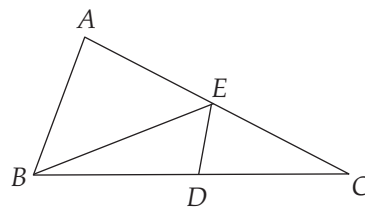


Fig. 11

CAPITOLUL VIII

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

VIII.1. UNITĂȚI DE MĂSURĂ PENTRU LUNGIME. PERIMETRE



1. Metrul este o unitate de măsură pentru lungime, una dintre cele șapte unități fundamentale ale Sistemului Internațional.

Prin adăugarea de prefixe, se obțin alte unități de măsură, multipli și submultipli metrului, necesare în diferite domenii de activitate.

2. Kilometrul (km), hectometrul (hm), decimetrul (dam) sunt multipli ai metrului, iar decimetrul (dm), centimetrul (cm), milimetrul (mm) sunt submultipli ai metrului.

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ hm} = 100 \text{ m}$$

$$1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$$

$$1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$$

$$1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$$

3. Perimetrul unui triunghi având lungimile laturilor a, b, c este egal cu $a + b + c$.

Perimetrul unui pătrat cu lungimea laturii l este egal cu $4l$.

Perimetrul unui dreptunghi cu lățimea l și lungimea L este egal cu $2(l + L)$. (Presupunem toate laturile și perimetrul măsurate cu aceeași unitate de lungime.)

PROBLEME REZOLVATE

1. Un teren are forma unui dreptunghi cu lățimea de 0,1 km și lungimea de 2,3 hm. Calculați câți metri de sârmă sunt necesari pentru a construi un gard în jurul terenului, știind că lungimea totală a sârmei folosite trebuie să fie de cinci ori mai mare decât perimetrul dreptunghiului.

Soluție: Deoarece $0,1 \text{ km} = 100 \text{ m}$ și $2,3 \text{ hm} = 230 \text{ m}$, perimetrul terenului este egal cu $2(100 \text{ m} + 230 \text{ m}) = 660 \text{ m}$. Prin urmare, pentru construirea gardului sunt necesari $5 \cdot 660 \text{ m} = 3300 \text{ m}$ de sârmă.

2. Pe fiecare dintre laturile unui triunghi ABC cu $AB = BC = CA = 9 \text{ cm}$ se construiește câte un triunghi echilateral (toate laturile egale) cu latura de 3 cm. Apoi, pe fiecare dintre cele douăsprezece laturi ale figurii obținute se construiește din nou câte un triunghi echilateral, dar, de data aceasta, cu latură de 1 cm (figura 1). Calculați perimetrul figurii finale.

Soluție: Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 27 cm. După construirea celor trei triunghiuri echilaterale cu latura de 3 cm, perimetrul crește cu $3 \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$, devenind

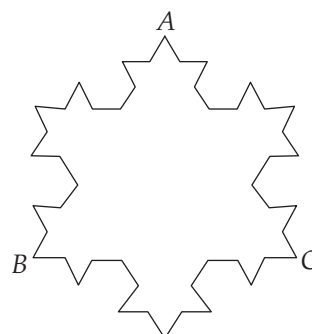


Fig. 1

astfel egal cu $27 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$. Perimetrul figurii finalei este cu $12 \cdot 1 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$ mai mare decât perimetrul figurii anterioare, adică este egal cu 48 cm .

PROBLEME PROPUSE

- Transformați în metri:

a) 3 dam;	b) 0,4 hm;	c) 0,1 km;
d) 25 dm;	e) 300 cm;	f) $1,2 \cdot 10^3 \text{ mm}$.
- Transformați în centimetri:

a) 250 mm;	b) 7 dm;	c) 0,02 m;
d) 10^3 mm ;	e) 5 dam;	f) 0,0003 hm.
- Comparați lungimile următoarelor segmente:

a) $AB = 32 \text{ dam}$, $CD = 3,2 \text{ hm}$;	b) $AB = 7,3 \text{ km}$, $CD = 690 \text{ dam}$;
c) $AB = 14990 \text{ m}$, $CD = 15 \text{ km}$;	d) $AB = 10^3 \text{ cm}$, $CD = 10 \text{ m}$;
e) $AB = 0,1 \text{ m}$, $CD = 200 \text{ mm}$;	f) $AB = 131 \text{ dm}$, $CD = 1,28 \text{ dam}$.
- Determinați numărul x în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $0,1 \text{ dam} + 2 \text{ m} = x \text{ m}$;	b) $2 \text{ hm} + 3 \text{ dam} = x \text{ m}$;
c) $2 \cdot 10^3 \text{ mm} + 5 \cdot 10^2 \text{ cm} = x \text{ m}$;	d) $0,4 \text{ dam} + 30 \text{ dm} = x \text{ m}$;
e) $0,12 \text{ hm} + 5600 \text{ cm} = x \text{ m}$;	f) $0,25 \text{ dam} + 1500 \text{ mm} = x \text{ m}$.
- Determinați numărul x în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $0,2 \text{ km} + 340 \text{ dam} = x \text{ hm}$;	b) $0,08 \text{ km} + 240 \text{ dm} = x \text{ m}$;
c) $6,25 \text{ hm} - 0,2 \text{ km} + 45 \text{ m} = x \text{ dam}$;	d) $400 \text{ mm} + 0,1 \text{ m} - 20 \text{ cm} = x \text{ dm}$;
e) $2 \cdot 10^5 \text{ mm} + 0,3 \cdot 10^5 \text{ cm} + 4 \cdot 10^2 \text{ dm} = x \text{ dam}$;	
f) $0,005 \text{ km} + 0,7 \text{ hm} - 120 \text{ dm} = x \text{ m}$.	
- Calculați diferența dintre perimetrele a două pătrate, știind că latura primului pătrat este cu 4 cm mai mare decât latura celui de-al doilea pătrat.
- Un dreptunghi, cu perimetrul de 120 m , are lățimea egală cu un sfert din lungime. Determinați lățimea și lungimea dreptunghiului.
- Perimetrul unui triunghi este egal cu 42 cm , iar lungimile laturilor sale, măsurate tot în centimetri, sunt trei numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor triunghiului considerat.
- O curte în formă de dreptunghi, cu lungimea de 80 m și lățimea de 30 m , este împrejmuită cu un gard format din patru rânduri de sârmă (figura 2). Calculați câți metri de sârmă sunt necesari pentru construirea gardului.

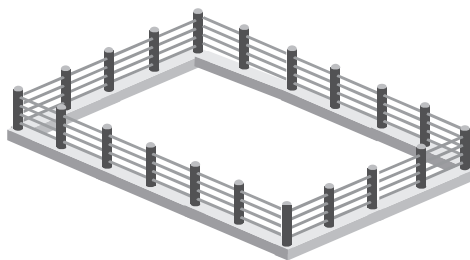


Fig. 2

10. Din cele patru colțuri ale unui pătrat cu latura de 18 cm se decupează câte un pătrat cu latura de 3 cm (figura 3). Determinați perimetrul figurii astfel obținute.

11. În figura 4 sunt desenate trei triunghiuri echilaterale: ABC , CDE și EFG . Punctele D și F sunt mijloacele laturilor AC , respectiv CE , iar $AB = 16$ cm. Calculați perimetrul figurii $ABCFGED$.

12. În figura 5 este desenat un teren format din două dreptunghiuri $ABCD$ și $BEFG$, cu $DC = 80$ m, $CG = 30$ m, $GF = 50$ m și $FE = 70$ m. Calculați perimetrul terenului.

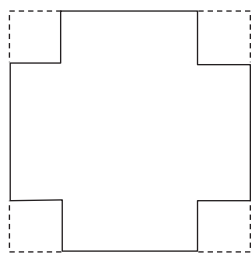


Fig. 3

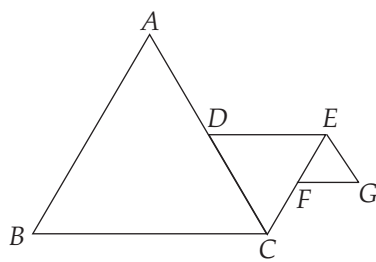


Fig. 4

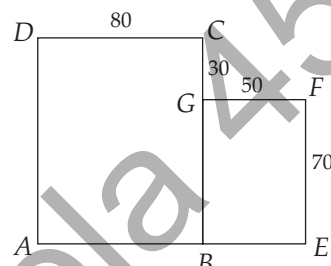


Fig. 5

13. Toate unghiurile din figura 6 au măsura de 90° (sunt unghiuri drepte), iar lungimile segmentelor indicate în figură sunt exprimate în metri. Aflați câți metri are segmentul marcat cu x și apoi calculați perimetrul figurii.

14. Litera T din figura 7 este formată din două dreptunghiuri având fiecare lungimea de 9 cm și lățimea de 3 cm. Aflați perimetrul figurii $ABCDEFGH$.

15. Pe fiecare latură a unui pătrat cu latura de 27 cm se construiește câte un pătrat cu latura de 9 cm.

a) Calculați perimetrul figurii rezultate (figura 8).

b) Dacă pe fiecare dintre cele 20 de laturi ale ultimei figuri se construiește câte un pătrat cu latura de 1 cm, care va fi perimetrul figurii astfel obținute?

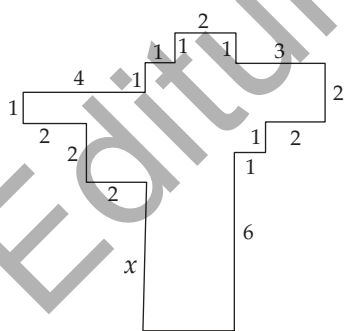


Fig. 6

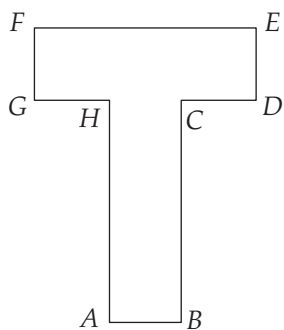


Fig. 7

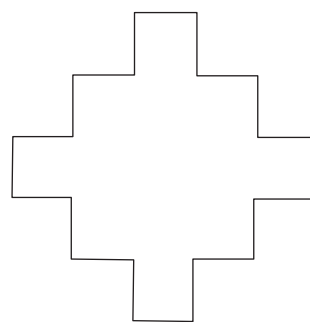


Fig. 8

RECAPITULARE FINALĂ

TESTE DE EVALUARE

TESTUL 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- (1p) 1. Dintre numerele 1, 2, 4 și 15, numărul prim este:
a) 1; b) 2; c) 4; d) 15.
- (1p) 2. Câtul împărțirii numărului 62 la 12 este egal cu:
a) 4; b) 6; c) 2; d) 5.
- (1p) 3. Rezultatul calculului $44 - 4 \cdot 4$ este egal cu:
a) 28; b) 38; c) 40; d) 160.
- (1p) 4. Patru elevi au efectuat calculul $(2^{10} + 2^{10} + 2^{11})^2 : 2^{24}$ și au obținut rezultatele din tabelul de mai jos:

Irina	Florian	Emilia	Ecaterina
2	4	8	1

Răspunsul corect este dat de:

- a) Irina; b) Florian; c) Emilia; d) Ecaterina.
- (1p) 5. Media aritmetică a două numere este 64. Dacă unul dintre numere este de 3 ori mai mare decât celălalt, produsul numerelor este:
a) 3072; b) 512; c) 128; d) 486.

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră numărul natural $A = \overline{ab} + \overline{ba}$, unde a și b sunt cifre diferite.
- (1p) a) Este posibil ca numărul A să fie egal cu 198? Justificați răspunsul.
- (1p) b) Determinați $\overline{ab}$, știind că A este pătrat perfect, iar $\overline{ab}$ este divizibil cu 8.
2. Un test are 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 4 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scade câte 1 punct.
- (1p) a) Este posibil ca Dana, care a răspuns la toate întrebările, să aibă 76 de puncte? Justificați răspunsul.
- (1p) b) Darius a răspuns la toate întrebările și are punctajul final 50. La câte întrebări a răspuns corect Darius?

1. Calculati:

a) $120 - 40 : 8;$

b) $7 \cdot 11 \cdot 13 - 1$;

c) $28 \cdot 73 + 27 \cdot 28$;

d) $31 + 144 : (39 - 9 : 3)$.

2. a) Scrieti patru numere naturale pare cu suma cifrelor 3.

b) Scrieti toate numerele naturale de trei cifre cu produsul cifrelor 8.

3. Care este cel mai mic număr natural par format din patru cifre distincte? Dar cel mai mare?

4. Câte numere de două cifre se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4? Câte dintre aceste numere sunt impare?

5. Care este al treisprezecelea termen al șirului 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...?

6. Calculati $A = (2 + 4 + 6 + \dots + 20) - (1 + 3 + 5 + \dots + 19)$.

7. Produsul a două numere naturale este 420. Dacă un factor se mărește cu 5, produsul devine 480. Aflați cele două numere.

8. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea că $a + \overline{ab} = b + \overline{ba} + 20$.

9. Determinați numerele naturale care, împărțite la un număr de forma $\overline{abc}$, dau câtul 10 și restul 997.

10. Câte numere naturale de trei cifre, împărțite la 17, dau câtul egal cu restul?

11. Calculați suma numerelor naturale de două cifre care, prin împărțire la 5, dau restul 3.

12. a) Împărțind numărul natural n la 10, obținem restul 1. Ce rest se obține când împărțim numărul n la 5?

b) Împărțind numărul natural n la 5, obținem restul 1. Ce rest se obține când împărțim numărul n la 10?

13. Fie a, b și c trei numere naturale, astfel încât $ab - ac + 7a = 80$ și $b - c = 3$. Calculați $a - b + c$.

14. Fie a , b și c trei numere naturale, astfel încât $a + b + c = 31$ și $2a + 3b + 4c = 105$. Calculați $(2a + b)(b + 2c)(c - a)$.

15. Notăm cu S suma primilor 100 de termeni ai șirului $1, 2 \cdot 3, 4 \cdot 5 \cdot 6, 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10, \dots$.

a) Care este ultima cifră a numărului S ?

b) Determinati restul împărțirii lui S la 8.

16. Calculati:

a) $3^0 + 0^3 + 2^3$;

b) $3^5 \cdot 3^8 : 3^{11}$;

c) $36 : (2^2 \cdot 3) + 72 : (2 \cdot 3^2);$

d) $(2^{18} + 4^8) : 8^5$.

73. Se consideră numerele $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{9}{10}$ și $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{10}{11}$.

- a) Comparați numerele A și B .
- b) Calculați produsul $A \cdot B$.

74. Fie $S = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 100}$. Demonstrați că $3S < 1$.

75. Determinați numărul rațional x din egalitatea:

- a) $6x - 3,56 = 7,44$;
- b) $3 : x + 2,43 = 5,73$;
- c) $\frac{3x+1}{2} + \frac{2x-1}{3} = \frac{5}{6}$;
- d) $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{3} : \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{5} - 1 \right) \right] \right\} = 6$.

76. Determinați cifra x din egalitatea:

- a) $\overline{0,(x)+1,(x)+2,(x)} = 3,(6)$;
- b) $\overline{0,(x)+0,(x)} = \frac{11}{30}$.

77. La dublul unui număr rațional se adaugă $2\frac{2}{5}$. Suma obținută se împarte la $\frac{43}{15}$, obținând rezultatul 2. Aflați numărul inițial.

78. Se dau patru numere naturale. Primul reprezintă 66,(6)% din al doilea, al doilea reprezintă 75% din al treilea, iar al treilea reprezintă 80% din al patrulea.

- a) Ce procent din al patrulea număr reprezintă primul număr?
- b) Aflați cele patru numere, știind că suma lor este 140.

79. Determinați patru numere raționale, știind că media lor aritmetică este 9,075, al treilea este media aritmetică a primelor două, iar ultimul este egal cu 150% din primul.

80*. Determinați patru numere raționale, știind că media lor aritmetică este 1,23 și fiecare dintre ele este media aritmetică a celorlalte trei.

81. Desenați patru puncte A, B, C și D , astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele, iar punctele B și C să se afle într-unul dintre semiplanele delimitate de dreapta AD .

82. Desenați trei puncte A, B și C , astfel încât $AB = 5$ cm, $BC = 11$ cm și $AC = 6$ cm. Demonstrați că cele trei puncte sunt coliniare.

83. Pe axa numerelor se consideră punctele A, B, C, D și E care corespund numerelor 2, 4, 6, 9, respectiv 12.

- a) Realizați o figură, alegând unitatea de măsură de 1 cm.
- b) Calculați $AD + BC - 2AB$ și $2BC + 3AE - AD$.

84. Pe dreapta d se consideră punctele A, B și C , în această ordine, astfel încât $AB = 2BC$ și $AC = 12$ cm. Calculați distanța dintre mijloacele segmentelor AB și AC .

85. Fie A, B, C și D puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = CD$. Fie M mijlocul segmentului AB , P mijlocul lui BC , iar Q este simetricul punctului M față de punctul P . Arătați că Q este mijlocul segmentului CD .

TESTE RECAPITULATIVE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- (1p) 1. Soluția ecuației $x + 3 = 4$ este numărul natural:
a) 1; b) 2; c) 0; d) 4.
- (1p) 2. Suma primelor patru cele mai mici numere prime este egală cu:
a) 11; b) 16; c) 17; d) 24.
- (1p) 3. Calculând $\frac{2}{7}$ din 42 kg, rezultatul este:
a) 14 kg; b) 16 kg; c) 24 kg; d) 12 kg.
- (1p) 4. Scrierea sub formă zecimală a fracției $\frac{5981}{1000}$ este:
a) 59,81; b) 5,981; c) 598,1; d) 5981.
- (1p) 5. Lungimea segmentului AB este 8 cm, iar M este mijlocul segmentului. Lungimea segmentului BM este:
a) 6 cm; b) 2 cm; c) 4 cm; d) 8 cm.

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete.

1. Fie numerele naturale $a = (3^3 \cdot 81^2 \cdot 3 \cdot 3^3) : 3^{15}$ și $b = [(2^6 \cdot 2^2)^4 : 2^2 : 2^{15}]^3$.
- (1p) a) Demonstrați că $a = 3^{30}$.
- (1p) b) Comparați numerele a și b .
2. Maia a cumpărat o carte ale cărei pagini au fost numerotate în mod ciudat: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, ..., 484, 486, 487.
- (1p) a) Are această carte o pagină numerotată cu 100?
- (1p) b) Câte file are cartea cumpărată de Maia?

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

TESTE INIȚIALE

Testul 1. 1. 8. 2. 20 lei. 3. 60 cm. 4. $18 + 29 = 47$. 5. 18°C . 6. 8 biscuiți. 7. 50 g.

Testul 2. 1. 240. 2. 592. 3. 19. 4. Da, Mihai a calculat corect durata tratamentului. 5. 200 de timbre. 6. 7 lei. 7. 20 de lalele, 18 garoafe și 15 trandafiri.

Testul 3. 1. $x = 5$. 2. 30. 3. 72 m. 4. 41. 5. $114 + 141 + 411 + 122 + 212 + 221 = 1221$. 6. 30 caise. 7. 13 nuci și 21 de nuci.

NUMERE NATURALE

CAPITOLUL I. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

I.1. Scrierea și citirea numerelor naturale

1. a) 24; b) 19; c) 405; d) 816; e) 333; f) 1004; g) 5810; h) 7348. 2. a) 30413; b) 15243; c) 608806; d) 4607000; e) 13906102; f) 900000909. 3. a) șapte; b) nouăsprezece; c) patruzeci și trei; d) o sută nouă; e) trei sute zece; f) nouă sute douăzeci și cinci. 4. a) o mie trei sute șapte; b) nouăzeci și trei de mii doi; c) douăzeci și șapte de mii patru sute treisprezece; d) o sută douăzeci și trei de mii trei sute douăzeci și unu; e) patru milioane trei sute nouă mii cinci; f) douăzeci și opt de milioane opt mii două sute. 5. Numerele căutate sunt de forma $\overline{ab}$ cu $b = 2 \cdot a$, iar soluțiile problemei sunt 12, 24, 36 și 48. 6. De exemplu, 11, 20, 200, 1001, 10001. 7. De exemplu, 111, 201, 1011, 1101, 2001. 8. a) $27 = 2 \cdot 10 + 7$; b) $135 = 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$; c) $9148 = 9 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8$; d) $12043 = 1 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 10 + 3$. 9. a) $\overline{aa} = 10 \cdot a + a = 11a$; b) $\overline{abab} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + a \cdot 10 + b = 1010 \cdot a + 101 \cdot b$; c) $\overline{x0yx} = x \cdot 1000 + y \cdot 10 + x = 1001 \cdot x + 10 \cdot y$; d) $\overline{xyyx} = x \cdot 1000 + y \cdot 100 + y \cdot 10 + x = 1001 \cdot x + 110 \cdot y$; e) $\overline{2a3a1} = 2 \cdot 10000 + a \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + a \cdot 10 + 1 = 20301 + 1010 \cdot a$; f) $\overline{1bb20} = 1 \cdot 10000 + b \cdot 1000 + b \cdot 100 + 2 \cdot 10 = 10020 + 1100 \cdot b$. 10. a) 35; b) 407; c) 930; d) 50701; e) 45323; f) 17709. 11. 20, 24, 26, 28, 40, 42, 46, 48, 60, 62, 64, 68, 80, 82, 84 și 86. 12. a) 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33; b) 78, 79, 87, 89, 97 și 98. 13. 100, 101, 110, 112, 121, 122, 200, 202, 211, 212, 220, 221. 14. Numerele căutate sunt de forma $\overline{8x0}$ cu $x \neq 0$ și $x \neq 8$ sau $\overline{9y1}$ cu $y \neq 1$ și $y \neq 9$. Astfel, am obținut soluțiile: 810, 820, 830, 840, 850, 860, 870, 890, 901, 921, 931, 941, 951, 961, 971 și 981. 15. Numerele căutate sunt de forma $\overline{a0c9}$ cu $c = 2 \cdot a$. Obținem soluțiile: 1029, 2049, 3069 și 4089. 16. Numerele sunt de forma $\overline{6abc}$ cu $a = b + c$ și $b > 6$. Dacă $b = 7$, atunci c este cel mult 2, deoarece $b + c \leq 9$. Dacă $b = 8$, atunci $c = 0$ sau $c = 1$, iar dacă $b = 9$, atunci $c = 0$. Numerele obținute sunt: 6770, 6871, 6972, 6880, 6981, 6990. 17. 21, 173, 8321, 40102, 333111, 710017. 18. Numerele căutate sunt de forma $\overline{aba}$ cu $a + b + a = 4$ și $a \neq 0$, de unde $2a + b = 4$. Este necesar ca b să fie cifră pară; atunci $b = 0$, $a = 2$ sau $b = 2$, $a = 1$, iar soluțiile problemei sunt numerele 202 și 121. 19. 1B, 2E, 3A, 4F, 5D, 6C. 20. Numerele naturale cuprinse între 432 și 531 au cifra sutelor 4 sau 5, deci cifra 3 nu se va regăsi pe poziția

exerciții, iar Carmen a rezolvat 30 de exerciții. **24.** $a = (3^3)^{40} = 3^{120}$, iar $b = (90 : 30)^{123} = 3^{123}$, de unde $a < b$. **25.** $3^n \cdot 7^n \cdot (15 \cdot 3^2 - 8 \cdot 7) : 79 = 441$, de unde $3^n \cdot 7^n = 21^2$, deci $n = 2$.

Recapitulare și sistematizare prin teste

Testul 1. 1. a) 0; b) 1; c) 8; d) 9. 2. a) 45; b) 50. 3. 8. 4. a) $x < y$; b) $x > y$. 5. $n = 31$. 6. $x = 66$. 7. $a = 100 = 10^2$.

Testul 2. 1. a) 15; b) 4; c) 2; d) 5. 2. $x = 9$. 3. $a = 2 \cdot 3^3 \cdot (2^5 \cdot 3^5) = 2^6 \cdot 3^8 = (2^3 \cdot 3^4)^2$, deci a este pătrat perfect. 4. a) $x = 3^{20} = 9^{10} > 8^{10} = 2^{30} = y$; b) $x = 3^{120} = y$. 5. $39_{(10)} = 100111_{(2)}$. 6. $a = 2 \underbrace{00\dots0}_{20 \text{ de zerouri}} - 1 = \underbrace{199\dots9}_{20 \text{ de cifre}}$, deci suma cifrelor lui a este egală cu $1 + 20 \cdot 9 = 181$. 7. $a = 2^{2n+3} + 3 \cdot 2^{2n} - 2^{2n+1} = 2^{2n}(2^3 + 3 - 2) = 9 \cdot 2^{2n}$; restul împărțirii lui a la 9 este egal cu 0.

CAPITOLUL II. METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

II.1. Metoda reducerii la unitate

1. a) 10 metri; b) 6 bluze. 2. a) 60 probleme; b) 5 zile. 3. a) 125 litri; b) 8 kg. 4. A – 3; B – 9; D – 8; E – 10. 5. 80 lei. 6. 11 butuci. 7. a) 20 zile; b) 40 muncitori. 8. A – 9; B – 12; C – 6; E – 3. 9. 4 minute. 10. 5 minute. 11. 40 minute. 12. În 10 ore, adică 600 minute, un cal termină fânul din 5 iesle, iar un mânz pe cel din 2 iesle, deci doi cai și un mânz vor termina 12 iesle. Pentru o iesle, vor avea nevoie de $600 : 12 = 50$ minute. 13. Un pătrat cu latura de 200 m este format din patru pătrate cu latura de 100 m, în timp ce unul cu latura de 300 m este format din 9 asemenea pătrate. Tractoristul va primi $(1800 : 4) \cdot 9 = 4050$ lei. 14. Pentru a însămânța 18 hectare, un utilaj ar avea nevoie de 36 de zile, așadar un utilaj însămânțează 1 hectar în 2 zile. Pentru 28 de hectare, un utilaj ar avea nevoie de 56 de zile, deci treaba poate fi făcută în 7 zile de 8 utilaje. 15. Calistrat lucrează 4 intervale de câte 4 ore, iar Hogaș 3 astfel de intervale. Fiecare asemenea interval este plătit cu $875 : 7 = 125$ lei. Calistrat va primi 500 lei, iar Hogaș 375 lei.

II.2. Metoda comparației

1. 5 lei un caiet și 3 lei un pix. 2. 95 kg. 3. Cu 20 kg. 4. 9 lei, respectiv 6 lei. 5. 97 lei. 6. O prăjitură costă 8 lei, o înghețată 5 lei, iar Maria are de plătit 34 lei. 7. 15 m. 8. 391 lei. 9. 12 nuci. 10. 180 lei. 11. O carte costă 48 lei, un caiet costă 32 lei, iar Daria are de plătit 336 lei. 12. Porția zilnică a unei țestoase adult este de 30 de creveți, iar a unui pui este de 10 creveți. Într-o săptămână, porția adultului depășește cu 140 de creveți porția unui pui. 13. Un bilet la operă costă 61 lei, iar un bilet la cinema costă 27 lei. 14. 69 minute. 15. 1680 kg.

II.3. Metoda figurativă

1. Radu a colecționat 32 de timbre, iar Simona 96 de timbre. 2. 8 grile și 40 de exerciții cu răspuns așteptat. 3. Fiul are 25 de ani, mama are 53 de ani. 4. Ioana are 54 lei, iar Daniel are 162 lei. 5. 25. 6. 296. 7. 36 de pagini în prima zi, 72 de pagini a doua zi, 216 pagini a treia zi. 8. În prima sală sunt 270 de locuri, în a doua sală sunt 90 de locuri, iar în a treia sală sunt

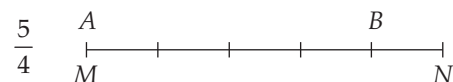
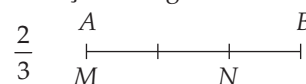
Testul 2. 1. a) 18 și 36; b) 18, 36, 45, 51 și 75; c) 45 și 75; d) 18, 36 și 45. 2. a) 1; b) 0, 13, 26 și 39; c) 1, 2, 3, 4, 6 și 12; d) 72, 81 și 90. 3. $a = 3^5(3^2 + 5) = 3^5 \cdot 2 \cdot 7$; trei numere prime diferite care divid pe a sunt 2, 3 și 7. 4. $x = 1$ sau $x = 7$. 5. $n = 270$ sau $n = 225$. 6. 120, 122, 124, 126, 128 sunt compuse, pentru că îl au ca divizor propriu pe 2; $121 : 11$, $123 : 3$, $125 : 5$ și $129 : 3$. 7. Dacă n este numărul elevilor din clasă, atunci n este multiplu comun al numerelor 4, 6 și 8. Multiplii lui 4 sunt: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ..., multiplii lui 6 sunt: 0, 6, 12, 18, 24, ..., iar multiplii lui 8 sunt: 0, 8, 16, 24, Deci, numărul minim de elevi din clasă este 24.

FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

CAPITOLUL IV. FRACȚII ORDINARE

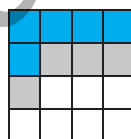
IV.1. Frații ordinare. Frații subunitare, echiunitare, supraunitare. Procente

1. a) $\frac{1}{8}, \frac{12}{8}$; b) $\frac{6}{14}, \frac{12}{8}, \frac{9}{7}, \frac{3}{5}$; c) $\frac{1}{8}, \frac{2}{15}, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{11}{15}$. 2. b) Notăm AB segmentul de lungime 6 cm și MN segmentul care reprezintă fracția indicată.



3. Împărțim pătratul în 16 pătrate cu latura de 1 cm.

Rămâne necolorată $\frac{7}{16}$ din suprafața pătratului.



4. a) De exemplu: $\frac{5}{7}, \frac{5}{15}, \frac{5}{3}$; b) De exemplu: $\frac{3}{8}, \frac{11}{8}, \frac{17}{8}$; c) De exemplu: $\frac{6}{5}, \frac{18}{15}, \frac{9}{25}$. 5. a) 2;

b) 4; c) 200. 6. a) 64; b) 15; c) 15. 7. a) 25; b) 5; c) 8; d) 10; e) 4; f) 250. 8. a) 8%; b) 23%; c) 11%;

d) 143%; e) 180%; f) 200%. 9. a) $\frac{2}{100}$; b) $\frac{50}{100}$; c) $\frac{10}{100}$; d) $\frac{20}{100}$; e) $\frac{100}{100}$; f) $\frac{150}{100}$. 10. a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$,

$\frac{3}{5}, \frac{6}{7}$; b) $\frac{3}{3}$; c) Sunt două fracții supraunitare. 11. d). 12. a) $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \frac{6}{7}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}$;

b) $\frac{1}{1}, \frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{7}{7}, \frac{9}{9}$; c) $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{6}{4}, \frac{8}{2}, \frac{8}{4}, \frac{8}{6}$. 13. a) 5; b) 17; c) 1; d) 2; e) 5; f) 5. 14. a) 0, 1, 2; b) 0,

1, 2, 3; c) 0, 1, 2; d) 1, 2, 3; e) 5, 6, 7, ...; f) 6, 7, 8, 15. a) 1, 2; b) 1, 2; c) 1; d) 4, 5, 6, ...; e) 5,

6, 7, ...; f) 251, 252, 16. $\frac{16}{13}, \frac{36}{13}, \frac{16}{23}, \frac{36}{23}, \frac{16}{43}, \frac{36}{43}, \frac{16}{53}, \frac{36}{53}, \frac{16}{73}, \frac{36}{73}, \frac{16}{83}, \frac{36}{83}$. 17. Frația

$\frac{4}{x+y}$ este supraunitară dacă $x + y = 1$, $x + y = 2$ sau $x + y = 3$; $\overline{xy}$ poate fi 10, 20, 11, 30, 21,

12. 18. a) $\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{3}{12}, \frac{4}{11}, \frac{5}{10}, \frac{6}{9}, \frac{7}{8}$; b) $\frac{36}{1}, \frac{18}{2}, \frac{12}{3}, \frac{9}{4}$. 19. a) Divizorii numărului 18 sunt:

1, 2, 3, 6, 9 și 18, iar divizorii numărului 35 sunt: 1, 5, 7 și 35. Frațiile căutate sunt:

ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

CAPITOLUL VI. PUNCTE. DREPTE. PLANE

VI.1. Punct. Dreaptă. Plan

1. a) A; b) A; c) F. 2. Prin punctul A trec o infinitate de drepte. 4. AB, AC, AD, BC, BD, CD . 5. a) F; b) A; c) A. 6. a) A; b) F. 7. În total, există 10 drepte. 8. Există 12 semidrepte. 9. Există 6 semidrepte: AB, BA, BC, CB, CD și DA . 10. a) o infinitate; b) o infinitate. 11. AB, BC, CD și DA sunt laturi; AC și BD sunt diagonale. 12. Primele cinci „cifre” sunt linii frânte deschise, iar ultima este linie frântă închisă. 13. a) dreptele AB, BC, AC ; b) semidreptele AB, BA, BC, CB, AC, CA ; c) segmentele AB, BC, AC . 14. a) segmentele BC, AC, BD și AD ; b) semidreptele AB, BC, CB și DC . 15. a) 4 drepte; b) 6 segmente. 16. a) Există $99 + 98 + \dots + 2 + 1 = 4950$ segmente; b) Există cel mult 4950 de drepte determinate de cele 100 de puncte. 17. a) A și B, A și E, B și E, C și D; b) A și C, A și D, B și C, B și D, E și C, E și D. 18. a) OD și OF ; dacă vom considera dreapta-frontieră ca făcând parte din semiplan, se adaugă OA și OB ; b) OB și OE ; dacă vom considera dreapta-frontieră ca făcând parte din semiplan, se adaugă OC și OD . 19. În figură sunt reprezentate 8 puncte, 12 segmente și 6 plane. Evident, putem identifica și alte puncte, segmente sau plane: de exemplu, segmentul AC nu este reprezentat în figură, dar el are capetele în două dintre punctele care apar în figură. 20. În figură sunt reprezentate 5 puncte, 8 segmente și 5 plane.

VI.2. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Pozițiile relative a două drepte

1. a) A, B și E; b) B, D și E; c) A, B, E, respectiv B, C, D. 3. a) E este punctul comun al dreptelor AC și BD ; problema are soluție unică; b) F poate fi oricare punct al dreptei AC , diferit de punctul E; problema are o infinitate de soluții. 4. a) $a \parallel b$ și $c \parallel d$; b) a și c sunt concurente în M; b și c sunt concurente în N; b și d sunt concurente în P; a și d sunt concurente în Q. 5. a) De exemplu, CD și EF , respectiv AE și BF ; b) De exemplu, AE, AD și BC , respectiv AD, CD și GH . 8. a) A; b) F. 9. Numărul minim de drepte se obține când nouă dintre puncte sunt coliniare (să presupunem că acestea sunt B, C, ..., J), iar al zecelea (A) nu se află pe dreapta BC. În acest caz, cele zece puncte determină zece drepte: $AB, AC, \dots, AJ$ și BC . 10. Numărul maxim de drepte determinate de cele zece puncte se obține atunci când ele sunt, oricare trei, necoliniare și este egal cu $9 + 8 + \dots + 2 + 1 = 45$. Dacă înlocuim trei puncte necoliniare (care determină trei drepte) cu trei puncte coliniare, numărul dreptelor scade cu $3 - 1 = 2$ și, de aici, rezultă concluzia problemei.

VI.3. Lungimea unui segment. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de alt punct

1. $AC < BC < AB$. 3. $AB > AD, CD < AC, DO = OC, AD = BC, AC = BD$. 5. Putem găsi o infinitate de puncte, care formează un cerc. 6. Două puncte O (pe care le vom determina folosind compasul), un singur punct M și niciun punct N. 7. Instrumentul potrivit pentru realizarea acestor desene este compasul. Observăm că: a) A, B, C sunt vârfuri ale unui triunghi; b) A, B, C sunt coliniare, cu C între A și B; c) A, B, C sunt coliniare, cu A între B și C; d) nu există puncte A, B, C cu proprietățile date. 8. Cele două triunghiuri pot fi suprapuse perfect (sunt congruente). 9. Cele patru puncte sunt situate ca în figura 1. Lungimea segmentului AC este aproximativ egală cu 8,7 cm. 10. Cum $AB + BD = AD$ și $BD + DC = BC$, înseamnă că cele patru puncte sunt coliniare, în ordinea

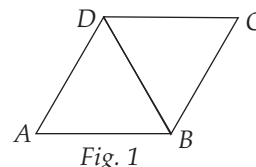


Fig. 1

CUPRINS

<i>Cuvânt-înainte</i>	5
TESTE ÎNIȚIALE	7
NUMERE NATURALE	
CAPITOLUL I. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE	
I.1. Scrierea și citirea numerelor naturale.....	9
I.2. Reprezentarea pe axă a numerelor naturale. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximări. Estimări.....	12
I.3. Adunarea numerelor naturale. Proprietăți	15
I.4. Scăderea numerelor naturale	17
I.5. Înmulțirea numerelor naturale. Proprietățile înmulțirii. Factor comun.....	19
I.6. Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale.....	21
I.7. Împărțirea cu rest a numerelor naturale	23
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	27
I.8. Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural.....	28
I.9. Reguli de calcul cu puteri.....	30
I.10. Compararea puterilor	35
I.11. Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2.....	38
I.12. Ordinea efectuării operațiilor cu numere naturale. Utilizarea parantezelor rotunde, pătrate, acolade.....	41
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	44
CAPITOLUL II. METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR	
II.1. Metoda reducerii la unitate.....	46
II.2. Metoda comparației	48
II.3. Metoda figurativă.....	51
II.4. Metoda mersului invers.....	54
II.5. Metoda falsei ipoteze	56
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	58
CAPITOLUL III. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE	
III.1. Divizor. Multiplu. Divizori comuni. Multipli comuni.....	60
III.2. Criteriul de divizibilitate cu 2. Criteriul de divizibilitate cu 5. Criteriul de divizibilitate cu 10^n	64
III.3. Criteriul de divizibilitate cu 3. Criteriul de divizibilitate cu 9	66
III.4. Numere prime. Numere compuse	68
III.5. Aplicații ale divizibilității numerelor naturale.....	71
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	74

FRACȚII ORDINARE. FRACȚII ZECIMALE

CAPITOLUL IV. FRACȚII ORDINARE

IV.1. Frații ordinare. Frații subunitare, echiunitare, supraunitare. Procente.....	76
IV.2. Frații echivalente. Compararea fracțiilor cu același numitor sau același numărător. Reprezentarea pe axă a unei fracții ordinare. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție	79
IV.3. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Frații ireductibile. Frații reductibile. Șir de fracții egale	84
IV.4. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun.....	87
Recapitulare și sistematizare prin teste	90
IV.5. Adunarea și scăderea fracțiilor ordinare	92
IV.6. Înmulțirea fracțiilor ordinare. Puteri.....	95
IV.7. Împărțirea fracțiilor ordinare	97
IV.8. Frații sau procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară	100
IV.9. Ordinea efectuării operațiilor.....	104
IV.10. Probleme recapitulative	106
Recapitulare și sistematizare prin teste	110

CAPITOLUL V. FRACȚII ZECIMALE

V.1. Frații zecimale finite.....	113
V.2. Reprezentarea pe axă, compararea și ordonarea fracțiilor zecimale finite. Aproximări.....	116
V.3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale finite	120
V.4. Înmulțirea fracțiilor zecimale finite	124
V.5. Împărțirea fracțiilor zecimale finite. Media aritmetică.....	127
Recapitulare și sistematizare prin teste	131
V.6. Frații zecimale periodice.....	132
V.7. Număr rațional pozitiv. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale	137
V.8. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții	139
V.9. Elemente de organizare a datelor.....	144
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	149

ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

CAPITOLUL VI. PUNCTE. DREPTE. PLANE

VI.1. Punct. Dreaptă. Plan	151
VI.2. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Pozițiile relative a două drepte	155
VI.3. Lungimea unui segment. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de alt punct	158
Recapitulare și sistematizare prin teste	163

CAPITOLUL VII. UNGHIURI

VII.1. Unghi: definiție, notații, elemente	165
VII.2. Măsura unui unghi. Unghiuri congruente. Clasificarea unghiurilor	168
VII.3. Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale	171
VII.4. Figuri congruente. Axă de simetrie.....	172
Recapitulare și sistematizare prin teste	174

CAPITOLUL VIII. UNITĂȚI DE MĂSURĂ

VIII.1. Unități de măsură pentru lungime. Perimetre	177
VIII.2. Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului și aria dreptunghiului.....	180
VIII.3. Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și volumul paralelipipedului dreptunghic.....	183
Recapitulare și sistematizare prin teste	185

RECAPITULARE FINALĂ

TESTE DE EVALUARE.....	187
PROBLEME RECAPITULATIVE.....	193
TESTE RECAPITULATIVE.....	201

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	204
------------------------------	-----