Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

8

Ediţia a IX-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică : [clasa] 8 : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru / Ion Tudor. – Ed. a 9-a. – Pitești : Paralela 45, 2025 –
2 vol.
ISBN 978-973-47-4302-5
Partea 1. – 2025. – ISBN 978-973-47-4303-2

51

Teste de evaluare iniţială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii este adevărată:
A. $-\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; B. $-\sqrt{25} \in \mathbb{Z}$; C. $-\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}$; D. $-\sqrt{25} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Opusul numărului raţional $\frac{8}{5}$ este numărul raţional:
A. $-\frac{8}{5}$; B. $\frac{5}{8}$; C. $\frac{8}{5}$; D. $-\frac{5}{8}$.

(0,5p) **3.** Media aritmetică a numerelor naturale 3 şi 6 este egală cu:
A. 5; B. 2,5; C. 4,5; D. 7.

(0,5p) **4.** Soluţia ecuaţiei $x^2 = 8$, $x \in \mathbb{R}$, este:
A. $\{-2, 4\}$; B. $\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$; C. $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$; D. $\{-4, 2\}$.

(0,5p) **5.** Dintre numerele raţionale pozitive 0,(32), 0,33, 0,3(2) şi 0,32, cel mai mare este:
A. 0,3(2); B. 0,32; C. 0,33; D. 0,(32).

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului $(2\sqrt{5}):\sqrt{10}-\sqrt{2}$ este egal cu:
A. 0; B. $\sqrt{2}$; C. $\sqrt{5}$; D. 3.

(0,5p) **7.** În triunghiul ABC notăm cu M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Dacă $MN = 7$ cm, atunci BC este egală cu:
A. 21 cm; B. 3,5 cm; C. 5,5 cm; D. 14 cm.

(0,5p) **8.** Într-o urnă sunt 6 bile albe şi 9 bile negre. Extrăgând o bilă, probabilitatea ca aceasta să fie albă este egală cu:
A. $\frac{1}{6}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{1}{9}$.

(0,5p) **9.** Distanţa dintre punctele $A(3;\ 0)$ şi $B(1;\ 2\sqrt{3})$ exprimată în centimetri este:
A. $\sqrt{2}$ cm; B. 6 cm; C. 4 cm; D. $\sqrt{3}$ cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x-y=10 \end{cases}$, unde x şi y sunt numere reale.

2. Se consideră numărul real $x = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) : 2,(6) - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(0,7p) a) Arătaţi că $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. *(0,8p)* b) Calculaţi $m_a(x;\ x^{-1})$.

ALGEBRĂ

Capitolul I

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

Citesc și rețin

În clasa a VI-a, la capitolul „Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale” am învățat că o mulțime poate fi definită printr-o proprietate a elementelor acesteia.

Exemplu: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 5\}$. Citim „Mulțimea A este formată din numerele naturale nenule n cu proprietatea $n < 5$”.

Cum se aplică?

1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 35 \,\vdots\, x\}$ și precizați cardinalul acesteia.

Soluție:

Divizorii întregi ai lui 35 sunt ±1, ±5, ±7, ±35, prin urmare $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$ și card $A = 8$.

2. Scrieți mulțimea $P = \{2, 3, 5, 7\}$, folosind o proprietate a elementelor acesteia.

Soluție:

Observăm că elementele mulțimii P sunt numerele naturale prime de o cifră, prin urmare mulțimea P se scrie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ este număr prim de o cifră$\}$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 5^2\}$ și $F = \{a \mid \overline{6a2} \,\vdots\, 3\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Soluție:

Mai întâi enumerăm elementele mulțimilor E și F. Elementele mulțimii E îndeplinesc condiția $2^n < 5^2$ sau $2^n < 25$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulțimii F îndeplinesc condiția $\overline{6a2} \,\vdots\, 3$, deci $3 \mid 6 + a + 2$ sau $3 \mid 8 + a$, de unde rezultă că $F = \{1, 4, 7\}$; a) $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; b) $E \cap F = \{1, 4\}$; c) $E \setminus F = \{0, 2, 3\}$; d) $F \setminus E = \{7\}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} =$ ....; b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 7\} =$ ....;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < 3\} =$ ....; d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 5\} =$ ....

2. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „geometria”$\}$ = ...;

b) $B = \{y \mid y$ este cifră a numărului „701233048”$\}$ = ...

3. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} =$ ....;

b) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 4\} =$ ....

4. Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:

a) $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{5} \text{ este fracţie subunitară} \right\} =$ ....;

b) $B = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{5}{n} \text{ este fracţie supraunitară} \right\} =$ ....

5. Se consideră mulţimile $E = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „tetraedru”$\}$ şi $F = \{y \mid y$ este literă a cuvântului „cilindru”$\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Efectuaţi $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$ în următoarele cazuri:

a) $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 5\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 3\}$;

b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$ şi $D = \{m \in \mathbb{Z}^* \mid |m| \leq 3\}$.

7. Ştiind că $\mathcal{D}_n$ este mulţimea divizorilor naturali ai lui n, efectuaţi:

a) $\mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_9$; b) $\mathcal{D}_6 \cap \mathcal{D}_9$; c) $\mathcal{D}_6 \setminus \mathcal{D}_9$; d) $\mathcal{D}_9 \setminus \mathcal{D}_6$.

8. Se consideră mulţimile $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m < 4\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 3\}$. Efectuaţi:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$; e) $A \times B$; f) $B \times A$.

9. Arătaţi că $A = B$ în următoarele cazuri:

a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq 7\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 7 - m, m \in A\}$;

b) $A = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m < 6\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 6 - m, m \in A\}$.

10. Se consideră mulţimile $E = \{\overline{ab}, a \neq 0 \mid \overline{ab} \vdots 15\}$ şi $F = \{\overline{cd}, c \neq 0 \mid \overline{cd} \vdots 25\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

11. Se consideră mulţimile $A = \left\{x \mid \overline{173x8} < \overline{17xx8}\right\}$ şi $B = \left\{y \mid \overline{51yy3} > \overline{51y63}\right\}$. Arătaţi că $B \subset A$.

12. Scrieţi submulţimile următoarelor mulţimi:

a) $E = \left\{x \mid \overline{807x} \vdots 4\right\}$; b) $F = \left\{y \mid \overline{14y5} \vdots 3\right\}$.

13. Se consideră mulţimile $E = \{x \mid \overline{120x} \vdots 5\}$ şi $F = \{y \mid \overline{62y1} \vdots 9\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$; e) $E \times F$; f) $F \times E$.

14. Se consideră mulţimea $A = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = 10n + 9, n \in \mathbb{N}, x \neq 0\}$. Determinaţi:

a) cel mai mic element al mulţimii A; b) cel mai mare element al mulţimii A.

15. Se consideră mulţimile $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = b^2, a \neq 0\}$ şi $F = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = z^3, x \neq 0\}$. Efectuaţi $E \times F$ şi $F \times E$.

16. Se dau mulţimile $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{n+4} < 8^3\}$ şi $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 3^{n+1} < 9^3\}$. Arătaţi că $C = D$.

17. Se consideră mulţimile $E = \{\overline{ab}, a \neq 0 \mid (\overline{ab}; 60) = 15\}$ şi $F = \{\overline{cd}, c \neq 0 \mid (75; \overline{cd}) = 15\}$. Efectuaţi:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

18. Se consideră mulţimile $A = \{\overline{xy}, x \neq 0 \mid [\overline{xy}; 48] = 144\}$ şi $B = \{\overline{zt}, z \neq 0 \mid [60; \overline{zt}] = 180\}$. Efectuaţi:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

19. Se dau mulţimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 2^{n+3}\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 3^{n+1}\}$. Arătaţi că $A = B$.

20. Se dă mulţimea $A = \left\{\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}}, a \neq 0, b \neq 0 \;\middle|\; \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \dfrac{4}{7}\right\}$. Câte submulţimi are mulţimea A?

21. Se consideră mulţimile $A = \{3x - 2, x + 5, 5x + 4\}$ şi $B = \{3x - 1, x + 4, 4x + 7\}$. Determinaţi numărul natural x, $x \geq 1$, pentru care $A = B$.

22. Se consideră mulţimea $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab}$ este număr prim şi $\overline{ab} + \overline{ab}^3 \vdots 10, a \neq 0\}$. Determinaţi card E.

23. Efectuaţi $A \cap B$, ştiind că $A = \{a \mid a = 2^n + 3^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \mid b = 2^{n+2} + 3^n, n \in \mathbb{N}\}$.

24. Se consideră mulţimile $E = \{a \mid a = 5n - 1, n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $F = \{b \mid b = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$. Arătaţi că $E \cap F = \varnothing$.

25. Arătaţi că $A = B$, ştiind că $A = \{a, b, c\}$ şi $B = \{x, y, z\}$, iar a, b, c, x, y, z sunt numere prime care verifică condiţiile: $a + x = b + y = c + z$ şi $a + b + c + x + y + z = \overline{a0}$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

26. Se consideră mulţimile $A = \{a \mid a = 3p + 2, p \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \mid b = 5q + 1, q \in \mathbb{N}\}$ şi $C = \{c \mid c = 15t + 11, t \in \mathbb{N}\}$. Efectuaţi $C \setminus (A \cap B)$.

27. Determinaţi mulţimea $A = \left\{\overline{abcd} \;\middle|\; \sqrt{\overline{abcd}} + \sqrt{\overline{bcd}} + \sqrt{\overline{cd}} = 105, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0\right\}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 7/2007)

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Enumeraţi elementele următoarelor mulţimi şi precizaţi cardinalul acestora:
a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m < 6\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{Z}^* \mid |n| \leq 4\}$.

(3p) **2.** Se consideră mulţimile $E = \left\{x \mid \overline{71x} \,\vdots\, 5\right\}$ şi $F = \left\{y \mid \overline{8y5} \,\vdots\, 3\right\}$. Efectuaţi:
a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$; e) $E \times F$; f) $F \times E$.

(3p) **3.** Se consideră mulţimea $A = \{n \mid 3^n < 2^{n+2}\}$. Câte submulţimi are mulţimea A?

Lecţia 2. Intervale numerice şi reprezentarea lor pe axa numerelor

Citesc şi reţin

Definiţii:

Fie a şi b două numere reale, cu $a < b$. Definim:

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (**interval închis** de extremităţi a şi b);
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (**interval deschis** de extremităţi a şi b);
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (**interval deschis la stânga şi închis la dreapta** de extremităţi a şi b);
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (**interval închis la stânga şi deschis la dreapta** de extremităţi a şi b).

Intervalele de tipul: $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ se numesc intervale **mărginite** şi au ca reprezentare geometrică pe axa numerelor un segment, ca în figurile următoare:

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VIII-a
Capitolul: Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$ (Lecţiile 1 – 4)
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Scriind mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 6\}$ sub formă de interval de numere reale obţinem $A = [0; 6]$. A F

(7p) **2.** Cel mai mare număr natural care nu aparţine intervalului de numere reale $(4; +\infty)$ este 3. A F

(7p) **3.** Enumerând elementele mulţimii $E = \{a \mid \overline{7a2} \vdots 4\}$ obţinem mulţimea $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Scriind reuniunea $(-3; 0] \cup \{-3, 0\}$ sub formă de interval de numere reale obţinem ....

(7p) **2.** Produsul numerelor întregi din intervalul de numere reale $[-9; 1)$ este egal cu ....

(7p) **3.** Soluţia inecuaţiei $4x + 5 \leq 1$, unde $x \in \mathbb{R}$, este intervalul de numere reale ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Cel mai mic număr întreg care verifică inecuaţia $6\sqrt{3} - 4x < 2\sqrt{3}(2\sqrt{3} - x)$ este:

A. 2; B. –6; C. –5; D. 3.

(8p) **2.** Se consideră mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \sqrt{2}\}$ şi $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in A \cap B\}$. Cardinalul mulţimii E este egal cu:

A. 6; B. 5; C. 8; D. 7.

(8p) **3.** Soluţia inecuaţiei $0{,}3x \geq 1{,}2 \cdot [0{,}2(7)x + 0{,}(3)]$, unde $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:

A. $[-10; +\infty)$; B. $(-\infty; 6)$; C. $(8; +\infty)$; D. $(-\infty; -12]$.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. Se consideră intervalele de numere reale $E = \left(-\sqrt{2}; \frac{7}{4}\right)$ și $F = \left[-\frac{3}{2}; \sqrt{3}\right]$.

(8p) Efectuați $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ și $F \setminus E$.

V. Se consideră mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |65 - x| \leq 33\}$ și $B = \{\overline{ab}, a \neq 0, b \neq 0 \mid \overline{ab} - \overline{ba} = ab + 3\}$.

(8p) a) Scrieți mulțimea A sub formă de interval de numere reale.

(8p) b) Arătați că mulțimea B este o submulțime a mulțimii A.

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Citesc şi reţin

Numere reale reprezentate prin litere

Spunem despre o expresie de forma ax^n, unde $a, x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, că este un număr real **reprezentat prin litere**.

Numărul real a se numeşte **coeficient**, iar x^n se numeşte **parte literală**. Partea literală este formată din una sau mai multe litere care înlocuiesc numere reale neprecizate.

Exemple: $\frac{1}{2}x^5; -3x^2; 4\sqrt{5}xy^3; \frac{7}{\sqrt{3}}a^2bc^7$.

Definiţie: Un ansamblu de numere reale reprezentate prin litere legate între ele prin operaţii aritmetice (adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere) se numeşte **expresie algebrică**.

Exemplu: $E(x) = (x^3 + 2x^3)^2 : (9x^4) - 5x$.

Definiţie: Două sau mai multe numere reale reprezentate prin litere se numesc **termeni asemenea** dacă părţile lor literale sunt identice.

Exemple: $-4x^3$ şi $\sqrt{6}x^3$; $2,(3)x^4y^3$ şi $-\frac{1}{\sqrt{2}}x^4y^3$.

Definiţie: O sumă de numere reale în care cel puţin un termen este număr real reprezentat prin litere se numeşte **sumă algebrică**.

Definiţie: O sumă algebrică este scrisă sub **formă canonică** dacă nu conţine termeni asemenea.

Exemplu: $x^2 - \sqrt{2}x + 3$.

Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Prin adunare şi scădere, termenii asemenea se reduc. De aceea, operaţiile de adunare şi scădere a numerelor reale reprezentate prin litere se numesc operaţii de reducere a termenilor asemenea.

Reguli de calcul

- $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $ax^n - bx^n = (a-b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $a_1x^n + a_2x^n + a_3x^n + \ldots + a_mx^n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)x^n$, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Cum se aplică?

1. Reduceţi termenii asemenea:

a) $4x + 3x$; b) $5x^2 - 2x^2$.

Soluţie:

a) $4x+3x=x(4+3)=7x$; b) $5x^2-2x^2=x^2(5-2)=3x^2$.

2. Reduceţi termenii asemenea:

a) $31x - 29 - 27x + 16$; b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3$.

Soluţie:

a) $31x - 29 - 27x + 16 = x(31 - 27) - 29 + 16 = 4x - 13$;

b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3 = x^3(4 - 1 - 4) + x(-1 + 7) = -x^3 + 6x$.

3. Reduceţi termenii asemenea:

a) $\frac{1}{4}a^3-\frac{2}{5}a^2+\frac{7}{4}a^3+\frac{3}{2}a^2$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2-\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{3}{2\sqrt{2}}a-\frac{8}{\sqrt{3}}a^2$.

Soluţie:

a) $\frac{1}{4}a^3-\frac{2}{5}a^2+\frac{7}{4}a^3+\frac{3}{2}a^2=a^3\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)+a^2\left(-\frac{^{2)}2}{5}+\frac{^{5)}3}{2}\right)=\frac{8}{4}a^3+a^2\left(-\frac{4}{10}+\frac{15}{10}\right)=$

$=2a^3+\frac{11}{10}a^2$;

b) $\frac{^{\sqrt{3})}2}{\sqrt{3}}a^2-\frac{^{\sqrt{2})}1}{\sqrt{2}}a+\frac{^{\sqrt{2})}3}{2\sqrt{2}}a-\frac{^{\sqrt{3})}8}{\sqrt{3}}a^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{3\sqrt{2}}{4}a-\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2=$

$=a^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)+a\left(-\frac{^{2)}\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{6\sqrt{3}}{3}a^2+a\left(-\frac{2\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=-2\sqrt{3}a^2+$

$+\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Pentru următoarele numere reale reprezentate prin litere numiţi coeficienţii şi părţile lor literale:

a) $38x^5$; b) $-\frac{7}{8}y^3$; c) $\frac{11}{15}t^4$; d) $-\sqrt{6}x^8$;

e) $-\frac{7}{5}xy^3$; f) $-11a^2b^3$; g) $3\sqrt{2}z^5t^2$; h) $\frac{27}{31}z^4t$.

2. Completaţi spaţiile punctate cu forma canonică a următoarelor sume algebrice:

a) $29 + 3x^2 - 8x =$ ....; b) $35x - 7 - 4x^2 =$ ....;

c) $4y + 2y^4 - 21 - \sqrt{2}\,y^3 =$ ....;

d) $-y^2 + \sqrt{5}\,y^3 - 16 - 9y^5 =$ ....

3. Completaţi fiecare spaţiu punctat cu un termen asemenea cu numărul real reprezentat prin litere în următoarele cazuri:

a) $17x^5$; .... b) $-8x^2$; .... c) $-2z^3$; .... d) $56z$; ....

e) $\sqrt{6}y^4$; .... f) $-\frac{9}{2}y$; .... g) $-\frac{3}{5}t$; .... h) $\sqrt{7}t^5$. ....

4. Reduceţi termenii asemenea:

a) $5x + 2x =$ ....; b) $7x - 2x =$ ....; c) $8x - 5x =$ ....;
d) $2x^2 + 9x^2 =$ ....; e) $7x^2 + 4x^2 =$ ....; f) $6x^2 - 4x^2 =$ ....;
g) $9x^2 - 17x^2 =$ ....; h) $23x^2 + 5x^2 =$ ....; i) $10x^3 - 4x^3 =$ ....

5. Reduceţi termenii asemenea:

a) $5a - 2a + 6a =$ ....; b) $7a + 4a - 6a =$ ....;
c) $3a^2 - 27a^2 + a^2 =$ ....; d) $8a^2 + 3a^2 - 9a^2 =$ ....;
e) $10a^3 - 5a^3 - 8a^3 =$ ....; f) $8a^3 - 19a^3 + 15a^3 =$ ....

6. Reduceţi termenii asemenea:

a) $5x - 6 - 3x + 7$; b) $2x + 5 - 8x - 9$; c) $13 - 7x - 2x - 6$;
d) $15x - 8 - 5x - 1$; e) $11 + 3x - 9 - 9x$; f) $10 + 6x - 4 - 8x$;
g) $3x^2 - 6x - 7x^2 + 2x$; h) $4x - 9x^2 - 5x^2 - 7x$; i) $11x - x^2 + 17x^2 - 5x$.

c)

f)

i)

7. Scrieţi sub formă canonică următoarele sume algebrice:

a) $10x^2 - 4x - 9x - 5x^2 + 7x$; b) $16x - 8x - 2x^2 - 9x + 6x^2$;
c) $2x^3 - 5x^3 + x + 28x^3 - 9x$; d) $7x^3 + 2x^3 - x - 30x^3 + 7x$;
e) $x^4 - 3x^2 - 8x^2 - 13x^4 + 12x^2$; f) $x^2 - 9x^2 - 17x^4 + 12x^2 + 5x^4$.

d)

f)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

8. Reduceţi termenii asemenea:

a) $7y^3 - 8y + 9y - 4y^3 - 11y - 6y^3$; b) $8y - 17y^4 + 5y^4 - 6y + 4y^4 - 5y$;
c) $5y - 4y^5 + 6y - 2y^5 - 17y + 9y^5$; d) $5y^3 - 3y - 9y - 5y^3 + 16y - 8y^3$;
e) $21y^2 - y^4 - 7y^4 - 18y^2 + 4y^4 - 6y^2$; f) $12y^3 - 8y^3 + y^5 - 29y^5 - 7y^3 + 5y^5$.

18. Se consideră sumele algebrice:

$$A(t) = 4t - 7,\ B(t) = -8t^2 + 3t - 1,\ C(t) = t^3 - 6t^2 - 5t + 2.$$

Efectuaţi:

a) $A(t) + B(t)$; b) $B(t) + C(t)$; c) $C(t) - A(t)$; d) $B(t) - C(t)$.

19. Se consideră sumele algebrice:

$$A(x) = 5x - 3,\ B(x) = 1 - 3x,\ C(x) = 3x^2 - 2x + 6,\ D(x) = -2x^2 - x + 5.$$

Calculaţi:

a) $A(x) + C(x)$, $D(x) + B(x)$, $D(x) - C(x)$; b) $A(x) + B(x) - C(x)$, $B(x) - C(x) - D(x)$.

20. Se consideră sumele algebrice:

$$S_1(z) = -z^2 - 3z + 9z^2 + 7z,\ S_2(z) = 4z^3 - 5z^2 - 8z^3 - z^2 + 9z^3,$$
$$S_3(z) = -z + 4z^2 - 5z^3 + 6z - z^3 + 7z^2.$$

Efectuaţi:

a) $S_1(z) + S_2(z)$, $S_1(z) - S_3(z)$, $S_3(z) - S_2(z)$;

b) $S_1(z) + S_2(z) + S_3(z)$, $S_2(z) - S_1(z) - S_3(z)$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

21. Scrieţi sub formă canonică suma algebrică:

$$S = 99x - 100x^2 + 101x - 102x^2 + \ldots - 198x^2 + 199x.$$

22. Se consideră sumele algebrice:

$$S_1(x) = 10x - 9x^2 + 8x^3 - \ldots - x^{10},\ S_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \ldots + \frac{1}{11}x^{10},$$
$$S_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \ldots + \frac{10}{11}x^{10}.$$

Scrieţi sub formă canonică suma $S_1(x) - S_2(x) - S_3(x)$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Reduceţi termenii asemenea:

a) $14x - 21x^2 - 8x^2 - 9x + 7x^2$; b) $2x - 16x^2 - 8 + 6x + 5 - x^2$.

(3p) **2.** Scrieţi sub formă canonică următoarele sume algebrice:

a) $\frac{3}{4} + \frac{6}{7}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{12}{5}x + \frac{8}{7}x^2 - \frac{7}{6}$; b) $\frac{5}{2\sqrt{2}}x^3 - \frac{4}{3\sqrt{2}}x - \frac{5}{6\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}x$.

(3p) **3.** Se consideră sumele algebrice:

$$A(y) = y^2 - 8y + 1,\ B(y) = -2y^3 + 5y^2 + 6y,\ C(y) = 4y^3 - 9y - 3.$$

Efectuaţi:

a) $A(y) + B(y) + C(y)$; b) $B(y) - A(y) - C(y)$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. În perioada 15–30 iulie, temperatura măsurată în °C la ora 13 a fost exprimată printr-un număr natural situat în intervalul [29; 37). Precizaţi temperatura minimă şi temperatura maximă înregistrate la ora 13 în perioada respectivă.

2. În perioada 1–13 martie, temperatura măsurată în °C la ora 9 a fost exprimată printr-un număr întreg situat în intervalul (–5; 1]. Arătaţi că în perioada respectivă au fost cel puţin trei zile în care s-a înregistrat aceeaşi temperatură la ora 9.

3. Pe teritoriul României, în lunile decembrie, respectiv ianuarie temperatura înregistrată la ora 7 (măsurată în °C) a fost un număr natural situat în intervalul [–21; –11), respectiv (–22; –13]. Comparaţi temperaturile minime pe ţară înregistrate la ora 7 în lunile decembrie şi ianuarie.

4. Tatăl lui Mihai are salariul de 3500 lei pe lună. Mihai a observat că, dacă salariul mamei sale ar creşte cu 12%, ar fi cel mult egal cu salariul tatălui său. Calculaţi salariul mamei lui Mihai.

5. Vârstele a doi fraţi, exprimate în ani, sunt două numere naturale pare şi consecutive. Ştiind că suma vârstelor celor doi fraţi este situată în intervalul (8; 16), determinaţi vârstele acestora.

6. Într-o localitate, valorile temperaturii (exprimate în °C) înregistrate la ora 11 timp de şase zile au fost numerele naturale din intervalul [13; 18). Ştiind că media acestor valori a fost egală cu 15°C, precizaţi valorile temperaturii în săptămâna respectivă.

7. O piaţă pentru produse agricole, în formă de triunghi cu perimetrul de 30 dam, are lungimile laturilor egale cu $(x + 7)$ dam, $(2x + 4)$ dam, respectiv $(3x + 1)$ dam. Calculaţi aria pieţei.

8. Un teren de tenis de câmp cu dimensiunile L şi l are aria egală cu 160 m^2. Ştiind că $L = (x + 6)$ m şi $l = (x – 6)$ m, $x > 6$, calculaţi perimetrul terenului de tenis.

9. O parcare în formă de dreptunghi are lungimea $L = (x + 2)$ dam, lăţimea $l = (x – 2)$ dam, $x > 2$, iar diagonala $d = 20$ dam. Calculaţi aria parcării.

10. O piscină în formă de romb cu diagonalele $d_1 = (7\sqrt{2} + x)$ m şi $d_2 = (7\sqrt{2} - x)$ m, $x < 7\sqrt{2}$, are aria egală cu 48 m^2. Calculaţi perimetrul piscinei.

11. Un fermier a cultivat cu cartofi două parcele în formă de pătrat cu laturile de $(2\sqrt{6} - 1)$ dam, respectiv $(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ dam. Ştiind că producţia medie a fost de 5 kg pe metrul pătrat, calculaţi cantitatea de cartofi recoltată de pe întreaga suprafaţă, exprimată în tone.

12. Într-o zi din luna noiembrie, temperatura înregistrată la ora 7 a avut valoarea de x°C şi în următoarele două ore a crescut cu x^{-1}°C, ajungând astfel la valoarea de 2°C. Aflaţi valoarea temperaturii înregistrate la ora 7.

Lecţia 11. Fracţii algebrice

Citesc şi reţin

Un **raport** în care termenii sunt numere reale reprezentate prin litere se numeşte **fracţie algebrică**.

Observaţie: O fracţie algebrică ce depinde de variabila x se notează $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, $B(x) \neq 0$.

Exemple: $\dfrac{x}{7-x}$; $\dfrac{x^3+1}{2x}$; $\dfrac{(x-1)^2+5}{x-\sqrt{3}}$.

Definiţie: Se consideră fracţia algebrică $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$. Mulţimea $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid B(x) = 0\}$ se numeşte **domeniul de definiţie** al fracţiei algebrice $F(x)$.

Definiţie: Fie D domeniul de definiţie al fracţiei algebrice $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$. Pentru orice element $a \in D$, numărul $F(a) = \dfrac{A(a)}{B(a)}$ se numeşte **valoarea** fracţiei F în punctul a.

Cum se aplică?

1. Determinaţi valorile lui x pentru care fracţia algebrică $E(x)$ nu este definită, în următoarele cazuri:

a) $E(x) = \dfrac{7x+1}{3x-6}$;   b) $E(x) = \dfrac{5-x^2}{x^2+6x}$.

Soluţie:

a) $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$, prin urmare fracţia algebrică $E(x)$ nu este definită pentru $x = 2$;

b) $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$, prin urmare fracţia algebrică $E(x)$ nu este definită pentru $x \in \{-6, 0\}$.

2. Determinaţi domeniul de definiţie pentru fracţia algebrică $F(x)$, în următoarele cazuri:

a) $F(x) = \dfrac{x^3}{4x+8}$;   b) $F(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$.

Soluţie:

a) $4x + 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -\dfrac{8}{4} \Leftrightarrow x = -2$, deci $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;

b) $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$, prin urmare $x - 3 = 0$ sau $x + 3 = 0$. $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, deci $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

3. Se consideră fracţia algebrică $E(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, cu domeniul de definiţie $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Calculaţi:

a) $E(2)$; b) $E(-3)$.

Soluţie:

a) $E(2) = \dfrac{2^3}{2^2 - 1} = \dfrac{8}{3}$; b) $E(-3) = \dfrac{(-3)^3}{(-3)^2 - 1} = -\dfrac{27}{8}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect. Domeniul de definiţie al fracţiei algebrice $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ este mulţimea:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid B(x) \neq 0\}$; B. $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid B(x) = 0\}$.

2. Dacă notăm cu D domeniul de definiţie al fracţiei algebrice $F(x) = \dfrac{x - \sqrt{2}}{x}$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $D = \mathbb{R}$; ☐ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; ☐ c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; ☐ d) $D = \mathbb{R}^*$. ☐

3. Determinaţi valorile lui x pentru care fracţia algebrică $F(x)$ nu este definită, dacă:

a) $F(x) = \dfrac{x+2}{x-5}$; b) $F(x) = \dfrac{x}{x+3}$; c) $F(x) = \dfrac{x^2}{x-7}$; d) $F(x) = \dfrac{1-x^3}{x+4}$.

d)

4. Se consideră fracţia algebrică $F(x) = \dfrac{x+9}{x}$, definită pe $\mathbb{R}^*$. Calculaţi:

a) $F(3)$; b) $F(5)$; c) $F(-2)$; d) $F(-8)$.

c)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

5. Determinaţi domeniul de definiţie pentru următoarele fracţii algebrice:

a) $E(x)=\dfrac{7}{3x-5}$; b) $F(x)=\dfrac{x^3}{4x+6}$; c) $G(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$; d) $H(x)=\dfrac{1-x^3}{9x+6}$.

6. Se consideră fracţia algebrică $E(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$, definită pe $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Calculaţi:

a) $E(0)$; b) $E(-4)$; c) $E(6)$; d) $E(3)$.

7. Determinaţi mulţimea pe care este definită fracţia algebrică $E(x)$, în următoarele cazuri:

a) $E(x)=\dfrac{x}{x^2-16}$; b) $E(x)=\dfrac{x^2}{x^2-25}$; c) $E(x)=\dfrac{4x}{4x^2-1}$.

8. Determinaţi valorile lui x pentru care nu este definită următoarea fracţie algebrică:

a) $E(x)=\dfrac{x^3+5}{x^2-12}$; b) $F(x)=\dfrac{7x+3}{x^2-18}$; c) $G(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3-8x}$.

9. Se consideră fracţia algebrică $A(x)=\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}x-8}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\sqrt{2}\}$. Determinaţi valoarea fracţiei $A(x)$ în punctele:

a) $2\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $-\sqrt{2}$; d) $-4\sqrt{2}$.

10. Determinaţi domeniul de definiţie pentru următoarele fracţii algebrice:

a) $E(x)=\dfrac{x^4}{x^2+8x+16}$; b) $F(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$; c) $G(x)=\dfrac{x^2}{9x^2-6x+1}$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

11. Determinaţi mulţimea pe care este definită fracţia algebrică $E(x)$, în următoarele cazuri:

a) $E(x)=\dfrac{5-x}{x^2-x-2}$; b) $E(x)=\dfrac{x^7}{x^2-4x-5}$; c) $E(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$.

12. Determinaţi mulţimea pe care este definită fracţia algebrică $F(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+10}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Determinaţi valorile lui x pentru care fracţia algebrică $F(x)$ nu este definită, în următoarele cazuri:

a) $F(x)=\dfrac{x^5+3}{2x-6}$; b) $F(x)=\dfrac{1-8x}{x^3-x}$.

GEOMETRIE

Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei

Citesc și rețin

Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: **punctul**, **dreapta**, **planul**.

Punctul este descris ca fiind urma lăsată de vârful unui creion ascuțit pe o coală de hârtie. Punctul se notează cu una dintre literele mari ale alfabetului: A, B, C, ...

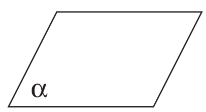
Dreapta este descrisă ca fiind un fir de ață bine întins și nesfârșit la ambele capete. Dreapta se notează cu una dintre literele mici ale alfabetului: a, b, c, ...

Planul este descris ca fiind suprafața unei ape liniștite. Planul se notează cu una dintre literele grecești: α (alfa), β (beta), γ (gama), ...

În continuare vom reprezenta, vom nota și vom citi un punct, o dreaptă și un plan.

Punctul A

Dreapta d

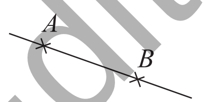


Planul α

Observație: Punctul, dreapta și planul sunt mulțimi de puncte.

Considerăm adevărate, de la început, următoarele **propoziții**:

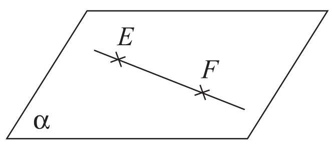
1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una (două puncte distincte determină o dreaptă).



Dreapta determinată de punctele A și B se notează AB sau BA.

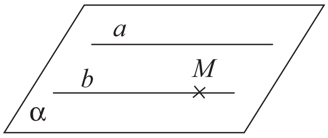
2. Dreapta d este inclusă în planul α dacă orice punct al dreptei d aparține planului α. Notăm $d \subset \alpha$.

3. Dacă două puncte distincte ale dreptei d aparțin planului α, atunci dreapta d este inclusă în planul α.



$$\left.\begin{array}{l} E \in \alpha \\ F \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow EF \subset \alpha$$

4. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o paralelă şi numai una la dreapta respectivă.

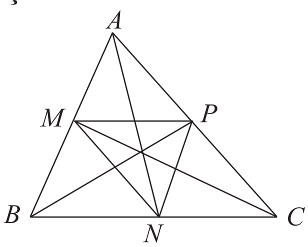


$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ M \in \alpha \\ b \parallel a \end{array}\right\} \Rightarrow b \subset \alpha$$

Cum se aplică?

1. Dacă punctele A, B şi C sunt vârfurile unui triunghi, iar M, N şi P sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA, aflaţi numărul dreptelor determinate de cele şase puncte.

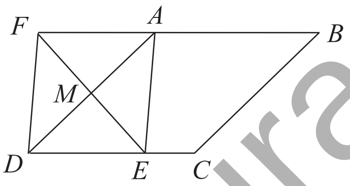
Soluţie:



Cele 6 puncte determină 9 drepte: AB, BC, CA, MN, NP, PM, AN, BP, CM.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctul E situat pe latura CD. Dacă notăm cu M mijlocul laturii AD şi cu F simetricul punctului E faţă de M, arătaţi că punctele F, A şi B sunt coliniare.

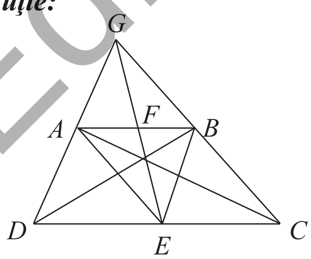
Soluţie:



Deoarece $AM \equiv MD$ şi $EM \equiv MF$, rezultă că patrulaterul $AEDF$ este paralelogram, deci $AF \parallel CD$, prin urmare dreptele AF şi AB sunt identice, de unde rezultă că punctele F, A şi B sunt coliniare.

3. În trapezul $ABCD$, notăm cu E şi F mijloacele bazelor CD, respectiv AB. Dacă $AD \cap BC = \{G\}$, precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D, E, F şi G.

Soluţie:



Arătăm că punctele G, F şi E sunt coliniare. Presupunem că $GF \cap CD = \{E_1\}$. Deoarece $AB \parallel CD$, aplicând teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\frac{GF}{GE_1} = \frac{AF}{DE_1}$ şi $\frac{GF}{GE_1} = \frac{BF}{CE_1}$, deci $\frac{AF}{DE_1} = \frac{BF}{CE_1}$, de unde deducem că $DE_1 \equiv CE_1$, prin urmare $E_1 = E$, deci punctele G, F şi E sunt coliniare. Punctele A, B, C, D, E, F şi G determină 11 drepte: AB, BC, CD, DA, AC, BD, EF, AE, BE, CF şi DF.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În planul α reprezentat în figura alăturată construiţi punctele distincte E şi F şi dreapta determinată de acestea.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii: Dreapta determinată de punctele E şi F de la problema precedentă se notează:

a) EF; ☐ b) FE. ☐

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

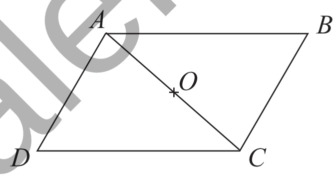
a) Printr-un punct trece o infinitate de drepte. ☐

b) Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. ☐

4. În paralelogramul $ABCD$ reprezentat în figura alăturată am notat cu O mijlocul diagonalei AC. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Dreptele BO şi DO sunt distincte. ☐

b) Dreptele BO şi DO sunt identice. ☐



5. În planul β reprezentat în figura alăturată desenaţi punctele distincte şi necoliniare A, B şi C şi dreptele determinate de acestea.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Desenaţi triunghiul DEF şi punctul G situat pe latura EF. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele D, E, F şi G.

7. Desenaţi triunghiul MNP şi punctul Q situat în interiorul acestuia. Precizaţi numărul dreptelor determinate de punctele M, N, P şi Q.

8. Dacă punctele A, B şi C, respectiv B, C şi D sunt coliniare, arătaţi că A, B, C şi D sunt patru puncte coliniare.

9. Dacă punctele A, B, C şi D sunt vârfurile unui patrulater convex, stabiliţi numărul dreptelor determinate de acestea.

10. Se consideră triunghiul MNP şi punctele E şi F situate pe laturile MN, respectiv NP. Numiţi dreptele determinate de punctele M, N, P, E şi F.

11. În paralelogramul $ABCD$, notăm cu M mijlocul laturii CD şi cu N simetricul punctului A faţă de M. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D şi N.

12. Într-un plan se consideră cinci puncte, oricare trei dintre acestea fiind necoliniare. Stabiliţi numărul dreptelor determinate de cele cinci puncte.

13. Într-un plan se consideră cinci puncte distincte.

a) Aflaţi numărul minim de drepte determinate de cele cinci puncte.

b) Aflaţi numărul maxim de drepte determinate de cele cinci puncte.

14. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Dacă notăm cu E şi F simetricele punctului A faţă de dreptele BC, respectiv CD, arătaţi că punctele E, C şi F sunt coliniare.

15. În triunghiul ABC notăm cu M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Dacă E este simetricul punctului C faţă de M, iar F este simetricul punctului B faţă de N, stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, E şi F.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ şi punctul D situat pe latura BC. Dacă notăm cu E şi F simetricele punctului D faţă de dreptele AB, respectiv AC, stabiliţi numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D, E şi F.

17. Aflaţi numărul dreptelor determinate de n puncte distincte, $n \geq 3$, oricare trei dintre acestea fiind necoliniare.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Dacă punctele M, N şi P sunt coliniare, iar punctele M, P şi Q sunt necoliniare, arătaţi că punctele M, N şi Q sunt necoliniare.

(3p) **2.** Într-un plan se consideră patru puncte distincte.

a) Aflaţi numărul minim de drepte determinate de cele patru puncte.

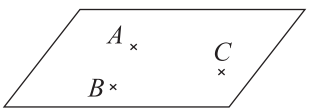
b) Aflaţi numărul maxim de drepte determinate de cele patru puncte.

(3p) **3.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Dacă notăm cu E şi F simetricele punctului A faţă de punctele B, respectiv D, arătaţi că punctele E, C şi F sunt coliniare.

Lecţia 2. Determinarea planului. Relaţii între puncte, drepte şi plane

Citesc şi reţin

1. Trei puncte distincte şi necoliniare determină un plan.



Planul determinat de punctele A, B şi C se notează (ABC).

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

21. Se consideră o piramidă patrulateră regulată. Arătaţi că:

a) $a_p^2 = \dfrac{m^2 + h^2}{2}$; b) $a_p > \dfrac{m+h}{2}$.

22. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful în V şi muchia bazei de lungime a, în care notăm cu M mijlocul muchiei VB. Dacă $\sphericalangle MCB = 30°$, aflaţi distanţa de la punctul A la dreapta CM.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 3/2009)

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are diagonala bazei de 8 cm şi muchia laterală de $2\sqrt{7}$ cm. Calculaţi:

a) h; b) a_p.

(3p) **2.** Calculaţi suma lungimilor muchiilor tetraedrului regulat $MNPQ$, ştiind că are înălţimea de $2\sqrt{6}$ cm.

(3p) **3.** În piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V, construim apotema VM, $M \in BC$. Ştiind că $l = 6$ cm şi $\sphericalangle(VM, AC) = 60°$, calculaţi:

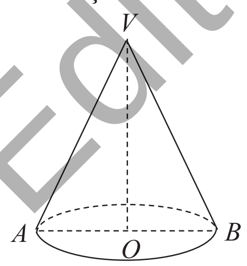
a) h; b) $d(A, VM)$.

Lecţia 11. Înălţimea conului circular drept

Citesc şi reţin

Definiţie: Segmentul determinat de vârful conului şi de piciorul perpendicularei construite din vârful conului pe planul bazei se numeşte **înălţimea conului**.

Observaţie: Înălţimea conului circular drept este segmentul determinat de vârful conului şi de centrul bazei acestuia.



Segmentul VO este înălţimea conului circular drept din figura alăturată.

Notaţie utilizată:

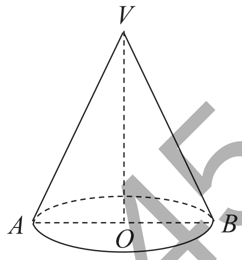
h – lungimea înălţimii conului circular drept.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul VOA din figura anterioară şi ţinând seama de notaţiile făcute, obţinem $G^2 = h^2 + R^2$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „Înălţimea VO a conului circular drept reprezentat în figura alăturată este înălţime a oricărei secţiuni axiale a acestuia.” $\square$

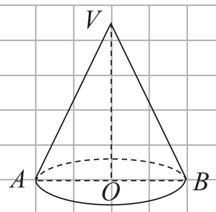


2. Calculaţi înălţimea unui con circular drept, în următoarele cazuri:

a) $R = 6$ cm şi $G = 10$ cm;

b) $R = 9$ cm şi $G = 15$ cm.

b)

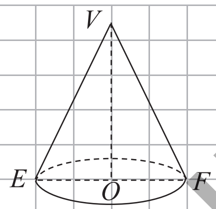


3. Calculaţi aria bazei unui con circular drept, ştiind că:

a) $G = 13$ cm şi $h = 12$ cm;

b) $G = 25$ cm şi $h = 24$ cm.

b)

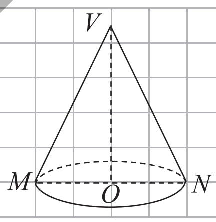


4. Calculaţi înălţimea unui con circular drept, ştiind că secţiunea axială a acestuia este un triunghi echilateral cu aria de:

a) $4\sqrt{3}$ cm^2;

b) $9\sqrt{3}$ cm^2.

b)



14. În conul circular drept cu vârful în punctul V notăm cu M mijlocul razei OA. Un plan ce conţine dreapta VM intersectează baza conului în punctele E şi F astfel încât $EF \perp OA$. Ştiind că înălţimea conului are lungimea de $8\sqrt{2}$ cm şi $EF = 4\sqrt{3}$ cm, determinaţi u.

15. Se consideră un con circular drept cu raza de 12 cm şi înălţimea de 18 cm. Arătaţi că pe înălţimea conului există un punct situat la aceeaşi distanţă faţă de vârful conului şi faţă de punctele situate pe baza conului şi precizaţi această distanţă.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Triunghiul VAB este secţiunea axială a unui con circular drept cu vârful în V, iar punctul M este mijlocul generatoarei VB. Ştiind că $\sphericalangle VAM = 30°$, determinaţi u.

17. Triunghiul VAB este secţiunea axială a unui con circular drept cu vârful în V, punctul O este centrul bazei, iar D este proiecţia punctului B pe generatoarea VA, $D \in VA$, $VO \cap BD = \{H\}$. Ştiind că $AB = \sqrt{3}VH$, determinaţi u.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Un con circular drept are generatoarea de $2\sqrt{7}$ cm şi înălţimea de $2\sqrt{3}$ cm. Calculaţi aria bazei.

(3p) **2.** Un con circular drept are raza de 7 cm. Ştiind că există un punct pe înălţimea conului situat la distanţa de 25 cm faţă de vârful conului şi faţă de punctele situate pe cercul care reprezintă baza conului, arătaţi că $\mathcal{P}_a < 119$ cm.

(3p) **3.** Triunghiul VAB este secţiunea axială a unui con circular drept cu vârful în V, punctul O este centrul bazei, iar D este proiecţia punctului O pe generatoarea VB. Notăm cu x lungimea celui mai scurt drum dintre punctele A şi D pe suprafaţa laterală a conului. Ştiind că $R = 4$ cm şi $h = 4\sqrt{3}$ cm, calculaţi:

a) u; b) x.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Dreapta MN este paralelă cu dreapta:

A. MM'; B. $P'Q'$; C. $N'P'$.

(1p) **2.** Calculaţi aria bazei conului circular drept care are generatoarea de 6 cm şi înălţimea de $4\sqrt{2}$ cm.

(1p) **3.** În prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$, notăm cu P şi Q proiecţiile punctului E pe diagonalele DE', respectiv FE'. Arătaţi că $PQ \parallel (D'DF)$.

(1p) **4.** Calculaţi înălţimea piramidei patrulatere regulate care are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm şi apotema de $2\sqrt{5}$ cm.

(2p) **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC cu latura de 6 cm şi punctul D situat pe latura AC, astfel încât $AB = 3AD$. Pe perpendiculara construită în D pe planul (ABC) se consideră punctul E, astfel încât $DE = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Calculaţi EA. b) Calculaţi EB.

(3p) **6.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 7 cm, notăm cu O' centrul feţei $A'B'C'D'$.

a) Calculaţi $\mathcal{A}_{ABC'D'}$. b) Aflaţi $\sphericalangle(AD', A'C')$. c) Aflaţi $\sphericalangle(B'C, O'D)$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră prisma patrulateră regulată $DEFGD'E'F'G'$. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Dreapta EF este concurentă cu dreapta:

A. $E'F'$; B. GG'; C. FF'.

(1p) **2.** Calculaţi lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic de dimensiuni $L = 3$ cm, $l = 2$ cm şi $h = 6$ cm.

(1p) **3.** În prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$, bisectoarele unghiurilor $DD'E'$ şi $FF'E'$ intersectează diagonalele DE' şi FE' în punctele P, respectiv Q. Arătaţi că $PQ \parallel (DEF)$.

(1p) **4.** Calculaţi suma lungimilor muchiilor tetraedrului regulat cu înălţimea de 6 cm.

(2p) **5.** În tetraedrul regulat $ABCD$, notăm cu M şi N mijloacele muchiilor BC, respectiv CD, iar cu G_1 şi G_2 centrele de greutate ale feţelor ABC, respectiv BCD.

a) Aflaţi $\sphericalangle(G_1G_2, MN)$. b) Aflaţi $\sphericalangle(G_1G_2, AN)$.

(3p) **6.** Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de 20 cm şi punctele E şi F situate pe laturile BC, respectiv CD, astfel încât $EC = FD = 15$ cm, iar $AF \cap DE = \{P\}$. Pe perpendiculara construită în punctul P pe planul pătratului se consideră punctul Q, astfel încât $PQ = 9$ cm.

a) Arătaţi că $AF \perp DE$. b) Calculaţi QF. c) Calculaţi QE.

Testul 3

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Dreapta $D'E'$ este necoplanară cu dreapta:

A. DE; B. EE'; C. FF'.

(1p) **2.** Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei de 4 cm. Ştiind că $\sphericalangle(AD', B'C) = 60°$, calculaţi aria secţiunii diagonale.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu muchia bazei de 6 cm şi înălţimea de 9 cm este secţionată cu un plan paralel cu planul bazei $ABCD$, care intersectează muchiile laterale şi înălţimea în punctele M, N, P, Q, respectiv O_1. Ştiind că $VO_1 = 3$ cm, calculaţi $\mathcal{A}_{MNPQ}$.

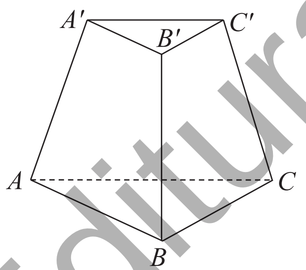
(3p) **2.** Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V şi muchia bazei de 8 cm este secţionată cu un plan paralel cu planul bazei, care intersectează muchiile laterale în punctele D, E şi F. Ştiind că $\mathcal{P}_{DEF} = 6$ cm şi d[(DEF), (ABC)] = = 12 cm, calculaţi d[V, (DEF)].

(3p) **3.** Un con circular drept cu vârful în V este secţionat cu planul α paralel cu planul bazei, obţinându-se astfel un cerc a cărui arie reprezintă 16% din aria bazei. Ştiind că d(V, α) = 6 cm, calculaţi înălţimea conului circular drept.

Lecţia 15. Trunchiul de piramidă regulată

Citesc şi reţin

Definiţie: Corpul geometric obţinut prin secţionarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu planul bazei, după înlăturarea piramidei mici care se formează, se numeşte **trunchi de piramidă regulată**.



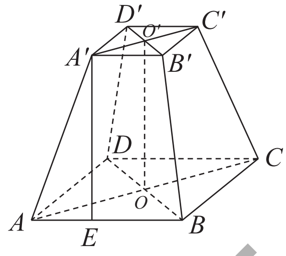
Triunghiurile echilaterale ABC şi $A'B'C'$ se numesc **baza mare**, respectiv **baza mică** a trunchiului de piramidă.
Segmentele congruente $A'A$, $B'B$ şi $C'C$ se numesc **muchiile laterale** ale trunchiului de piramidă.
Trapezele isoscele congruente $A'ABB'$, $B'BCC'$ şi $C'CAA'$ se numesc **feţele laterale** ale trunchiului de piramidă.

Definiţie: Segmentul cu extremităţile în punctele de intersecţie dintre planele bazelor unui trunchi de piramidă şi o perpendiculară comună a acestora se numeşte **înălţimea trunchiului de piramidă**.
Observaţie: Segmentul cu extremităţile în centrele bazelor unui trunchi de piramidă regulată este înălţimea acestuia.

Definiţie: Înălţimea unei feţe laterale a unui trunchi de piramidă regulată se numeşte **apotema trunchiului de piramidă**.

Segmentul $O'O$ este înălţimea trunchiului de piramidă patrulateră regulată din figura alăturată, iar segmentul $A'E$ este apotema corespunzătoare feţei laterale $A'ABB'$.

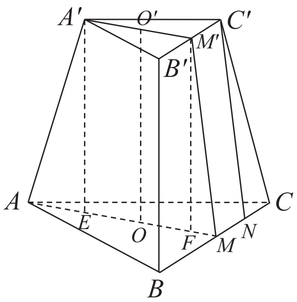
Trapezele isoscele $ACC'A'$ şi $BDD'B'$ sunt secţiunile diagonale ale trunchiului de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.



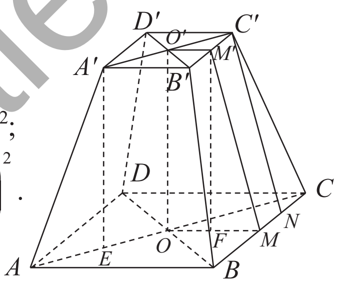
Notaţii utilizate:

l – lungimea muchiei bazei mici, L – lungimea muchiei bazei mari, r – raza bazei mici, R – raza bazei mari, a_b – apotema bazei mici, a_B – apotema bazei mari, m – lungimea muchiei laterale, i – lungimea înălţimii, h – lungimea înălţimii piramidei din care provine trunchiul de piramidă, a_t – lungimea apotemei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei mici, $\mathcal{P}_B$ – perimetrul bazei mari, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari, $\mathcal{P}_f$ – perimetrul feţei laterale, $\mathcal{A}_f$ – aria feţei laterale, $\mathcal{P}_d$ – perimetrul secţiunii diagonale, $\mathcal{A}_d$ – aria secţiunii diagonale.

Într-un trunchi de piramidă regulată, aplicând teorema lui Pitagora şi ţinând seama de notaţiile făcute, obţinem:



- în $\Delta A'EA$: $m^2 = i^2 + (R - r)^2$;
- în $\Delta M'FM$: $a_t^2 = i^2 + (a_B - a_b)^2$;
- în $\Delta C'NC$: $m^2 = a_t^2 + \left(\dfrac{L-l}{2}\right)^2$.

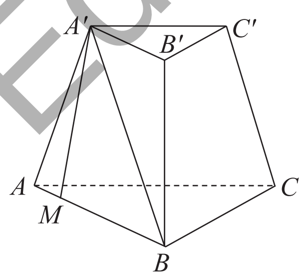


Cum se aplică?

1. Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei mari de 6 cm, muchia bazei mici de 2 cm şi diagonala unei feţe laterale de 5 cm. Aflaţi:

a) $\mathcal{P}_b$; b) $\mathcal{A}_b$; c) $\mathcal{P}_B$; d) $\mathcal{A}_B$;
e) a_t; f) $\mathcal{A}_f$; g) m; h) $\mathcal{P}_f$.

Soluţie:



a) $\mathcal{P}_b = 3l = 6$ cm; b) $\mathcal{A}_b = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ cm^2;

c) $\mathcal{P}_B = 3L = 18$ cm; d) $\mathcal{A}_B = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2;

e) Construim $A'M \perp AB$, $M \in AB$ şi observăm că $MB = 4$ cm. Din $\Delta A'MB$ cu $\measuredangle M = 90°$, aplicând teorema lui Pitagora, obţinem $A'M = 3$ cm $= a_t$;

f) $\mathcal{A}_f = \dfrac{(L + l)\cdot a_t}{2} = \dfrac{(6+2)\cdot 3}{2}$ cm^2 $= 12$ cm^2;

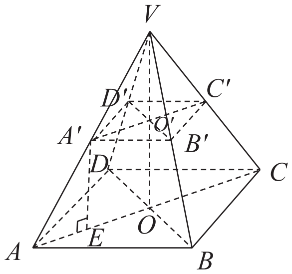
g) În $\Delta A'AM$ cu $\sphericalangle M = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$, de unde obţinem $m = \sqrt{13}$ cm;

h) $\mathscr{P}_f = L + l + 2m = 8 \text{ cm} + 2\sqrt{13} \text{ cm} = 2(4 + \sqrt{13})$ cm.

2. Se consideră trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, care are muchia bazei mici de $2\sqrt{6}$ cm, muchia bazei mari de $6\sqrt{6}$ cm şi muchia laterală de 7 cm. Aflaţi:

a) r; b) R; c) i; d) h.

Soluţie:



a) $r = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{12}}{2} \text{ cm} = \sqrt{12} \text{ cm} = 2\sqrt{3}$ cm;

b) $R = \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{12}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm;

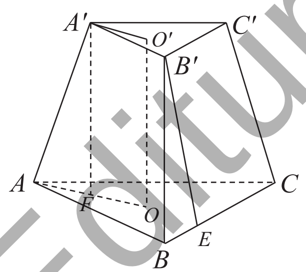
c) $AC \cap BD = \{O\}$, $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ şi construim $A'E \perp AC$, deci $A'E = i$; $AE = R - r = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm. În $\Delta A'AE$ cu $\sphericalangle E = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obţinem $i = 1$ cm;

d) Notăm cu V vârful piramidei. Deoarece $(A'B'C') \parallel (ABC)$, rezultă că $\frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO}$ sau $\frac{1}{3} = \frac{h-i}{h}$, aşadar $\frac{1}{3} = \frac{h - 1 \text{ cm}}{h}$, de unde obţinem $h = 1{,}5$ cm.

3. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei mici de 3 cm, muchia laterală de 6 cm şi apotema de $3\sqrt{3}$ cm. Calculaţi:

a) L; b) A_f; c) i; d) h.

Soluţie:



a) Construim $B'E \perp BC$, $E \in BC$, deci $BE = \frac{L-3}{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\Delta B'EB$ cu $\sphericalangle E = 90°$, obţinem: $m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-3}{2}\right)^2$, de unde rezultă că $\frac{L-3}{2} = 3$ şi după efectuarea calculelor obţinem $L = 9$ cm;

b) $A_f = \frac{(L+l)\cdot a_t}{2} = \frac{(9+3)\cdot 3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$;

c) Construim $A'F \perp AO$, $F \in AO$, deci $AF = R - r = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în $\Delta A'FA$ cu $\sphericalangle F = 90°$, obţinem $m^2 = i^2 + (R - r)^2$ sau $36 = i^2 + 12$, de unde rezultă că $i = 2\sqrt{6}$ cm;

d) Dacă notăm cu V vârful piramidei din care provine trunchiul de piramidă şi aplicăm teorema piramidelor asemenea, rezultă că $\frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO}$ sau $\frac{l}{L} = \frac{h-i}{h}$, deci $\frac{1}{3} = \frac{h - 2\sqrt{6}}{h}$, de unde obţinem $h = 3h - 6\sqrt{6}$, deci $h = 3\sqrt{6}$ cm.

Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

(*Capitolele: Intervale de numere reale. Inecuaţii în* $\mathbb{R}$*, Calcul algebric în* $\mathbb{R}$*, Elemente ale geometriei în spaţiu*)

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Numărul întreg –4 aparţine intervalului:
A. (–4; 1); B. [–3; 4); C. [–4; 1]; D. (–4; 3).

(7p) **2.** Rezultatul calculului $(-9x^5) : (3x) + (2x^2)^2$ este egal cu:
A. $3x^3$; B. $-x^2$; C. $2x^5$; D. $-x^4$.

(7p) **3.** Dacă descompunem în factori suma algebrică $x^2 - 49$, obţinem:
A. $7(x^2 - 7)$; B. $(x - 7)(x + 7)$; C. $(x - 4)(x + 9)$; D. $x(x - 49)$.

(7p) **4.** Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Planele $(D'DE)$ şi $(F'FE)$ sunt:
A. identice; B. secante; C. paralele.

(7p) **5.** Perimetrul secţiunii axiale a unui cilindru circular drept cu $R = 3$ cm şi $G = 8$ cm este egal cu:
A. 28 cm; B. 18 cm; C. 24 cm; D. 32 cm.

(7p) **6.** Rezultatul calculului $3x(x + 2) - (x - 2)(3x + 1)$ este egal cu:
A. $x^2 - 4x$; B. $11x + 2$; C. $13x - 1$; D. $x^2 + 4x$.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(8p) **1.** Se consideră intervalele de numere reale $E = (-2; \sqrt{3})$ şi $F = [-\sqrt{3}; 2]$. Determinaţi intervalele $E \cup F$ şi $E \cap F$.

(8p) **2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{1}{4} - \frac{7x}{10} \geq \frac{4x}{5}$.

(8p) **3.** Se consideră expresia $E(x) = 5(x + 1)^2 - (2x - 3)^2 + (1 - x)(x + 1) - 22x$, $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că expresia $E(x)$ nu depinde de x, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(8p) **4.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm şi $AA' = 4$ cm. Calculaţi aria patrulaterului $ABC'D'$.

5. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchia de 24 cm şi punctul E situat pe muchia AD, astfel încât $AD = 4AE$. Notăm cu F simetricul punctului E faţă de A, iar cu M şi N proiecţiile punctului F pe muchiile BD, respectiv CD. $AB \cap FM = \{Q\}$ şi $AC \cap FN = \{P\}$.

(8p) a) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele PQ şi CD.

(8p) b) Calculaţi perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Notă (pentru testele 1 – 3): Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

Testul 1

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Numărul de 10 ori mai mare decât 0,123 este egal cu:
a) 1230; b) 1,23; c) 12,3; d) 123,0.

(5p) **2.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 60 este egal cu:
a) 24; b) 9; c) 6; d) 12.

(5p) **3.** Într-o mare situată la altitudinea de –21m a fost scufundată la adâncimea de 17 m o cameră de luat vederi. Altitudinea camerei de luat vederi este egală cu:
a) –5 m; b) –24 m; c) –38 m; d) –7 m.

(5p) **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $4\sqrt{5}, 5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{5}, 6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$;
c) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}$.

(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt prezentate notele unui elev din clasa a VIII-a la Educație fizică. Media elevului la Educație fizică a fost:

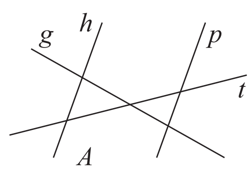
Nota	6	9	10
Numărul de note	1	3	1

a) 6; b) 7; c) 8; d) 9.

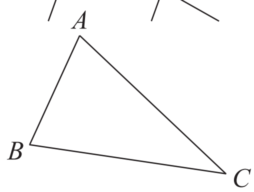
(5p) **6.** Radu afirmă că „suma a două numere naturale impare este un număr natural impar”. Afirmația lui Radu este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

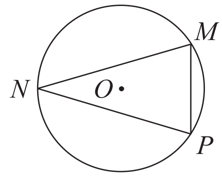
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele *g*, *h*, *p* și *t*. Dintre cele patru drepte, cele paralele sunt:
a) *g* și *h*; b) *h* și *p*;
c) *p* și *t*; d) *t* și *g*.



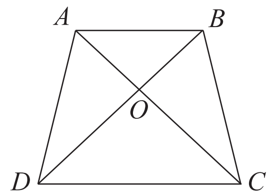
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul *ABC*. Dacă $AB < BC < CA$, atunci:
a) $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$; b) $\sphericalangle A < \sphericalangle B < \sphericalangle C$;
c) $\sphericalangle B < \sphericalangle C < \sphericalangle A$; d) $\sphericalangle C < \sphericalangle B < \sphericalangle A$.



(5p) **3.** Pe cercul de centru *O* și rază *R* din figura alăturată sunt reprezentate punctele *M*, *N* și *P*. Dacă $R = 3\sqrt{7}$ cm și măsura unghiului *MNP* este egală cu 30°, atunci lungimea coardei *MP* este de:
a) $7\sqrt{3}$ cm; b) 3 cm;
c) 7 cm; d) $3\sqrt{7}$ cm.

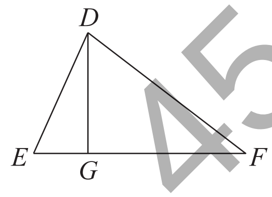


(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathscr{P}_{AOD} = 23$ cm şi $\mathscr{P}_{BCD} = 41$ cm, atunci lungimea bazei mari CD este egală cu:



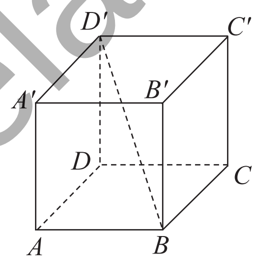
a) 10 cm; b) 18 cm;
c) 15 cm; d) 12 cm.

(5p) **5.** Triunghiul DEF dreptunghic în D din figura alăturată reprezintă traseul unui autobuz, iar punctele D, E, G şi F sunt staţiile în care acesta opreşte. Dacă $DG \perp EF$, $\text{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$ şi $DG = 6$ km, atunci distanţa dintre staţiile E şi F este egală cu:



a) $6\sqrt{3}$ km; b) $7\sqrt{3}$ km;
c) $8\sqrt{3}$ km; d) $9\sqrt{3}$ km.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub notat $ABCDA'B'C'D'$. Dacă muchia lui este de $5\sqrt{2}$ cm, atunci lungimea proiecţiei diagonalei BD' pe planul $(B'BC)$ este egală cu:



a) 15 cm; b) $10\sqrt{2}$ cm;
c) $12\sqrt{2}$ cm; d) 10 cm.

Subiectul al III-lea. Scrieţi rezolvările complete.

1. Se consideră intervalele de numere reale $A = (-4; 1]$ şi $B = (-3; 3)$.

(3p) a) Calculaţi suma numerelor întregi din intervalul $A \cup B$.

(2p) b) Determinaţi cardinalul mulţimii $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in A \cap B\}$.

2. Vârstele a trei fraţi sunt direct proporţionale cu numerele 6, 7 şi 9, iar diferenţa de vârstă dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre fraţi este de 6 ani.

(3p) a) Aflaţi vârsta fratelui mai mare şi vârsta fratelui mai mic.

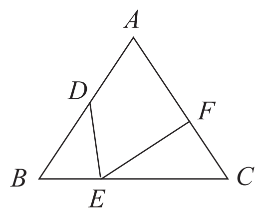
(2p) b) Calculaţi diferenţa de vârstă dintre fratele mijlociu şi fratele mai mic.

3. Se consideră expresia $E(x) = (x-2)^2 - (x-1)^2 + (x-2)(x+2) + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Arătaţi că $E(x) = x^2 + x - 1$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, $E(n)$ este număr întreg impar.

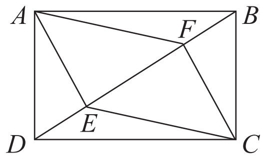
4. Triunghiul echilateral ABC din figura alăturată reprezintă schematic un zmeu din carton, pe care un elev a construit segmentele DE şi EF. Se ştie că $DB = 4$ cm, $BE = 2$ cm, $EC = 6$ cm şi $\Delta DBE \sim \Delta ECF$.



(2p) a) Calculaţi lungimea segmentului CF.

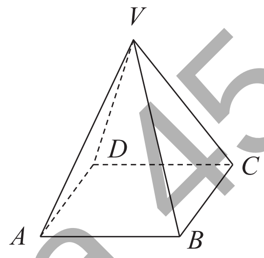
(3p) b) Determinaţi măsura unghiului DEF.

5. În dreptunghiul $ABCD$ din figura alăturată am notat cu E şi F proiecţiile punctelor A, respectiv C pe diagonala BD. Se ştie că $AB = 20$ cm şi $BC = 15$ cm.



(2p) a) Calculaţi distanţa de la punctul A la dreapta BD.
(3p) b) Calculaţi aria patrulaterului $AECF$.

6. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ din figura alăturată reprezintă schematic acoperişul unui turn al unui castel medieval. Se ştie că piramida are muchia bazei de 6 metri şi că măsura unghiului dintre două muchii necoplanare ale piramidei este egală cu 60°.



(2p) a) Calculaţi înălţimea acoperişului.
(3p) b) Determinaţi măsura unghiului AVC.

Testul 2

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect.

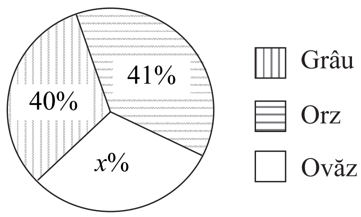
(5p) **1.** Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-7; 7]$ este:
a) –6; b) –7; c) –8; d) –5.

(5p) **2.** Fracţia ordinară $\frac{9^n}{3^2}$, $n \in \mathbb{N}$, este subunitară pentru $n =$:
a) 3; b) 2; c) 1; d) 0.

(5p) **3.** Un elev deschide o carte şi observă că suma numerelor cu care sunt notate cele două pagini ale cărţii este egală cu 131. Cele două numere sunt:
a) 63 şi 68; b) 65 şi 66; c) 64 şi 67; d) 62 şi 69.

(5p) **4.** Media geometrică a numerelor $2\sqrt{6}$ şi $3\sqrt{6}$ este egală cu:
a) $5\sqrt{6}$; b) 8; c) 6; d) $7\sqrt{6}$.

(5p) **5.** Suprafaţa de teren deţinută de o fermă agricolă a fost cultivată cu grâu, orz şi ovăz conform diagramei următoare.



Numărul natural x este egal cu:
a) 23; b) 19; c) 30; d) 15.

(5p) **6.** Adelina afirmă că „dacă numărul natural $\overline{ab}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$ şi $a \neq b$) se divide cu 3, atunci şi numărul $\overline{ba}$ se divide cu 3”. Afirmaţia Adelinei este:
a) adevărată; b) falsă.

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

Testul 1

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	A	C	C	C	A	D	B	C

Partea a II-a

1. $S = \{(3; -1)\}$. **2.** a) $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$; b) $x^{-1} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$; $m_a(x; x^{-1}) = \frac{7\sqrt{6}}{12}$. **3.** a) $\mathscr{P}_{ABC} = 24$ cm; b) $r = \frac{AB + AC - BC}{2} = 2$ cm; c) $\mathscr{A}_d = 4\pi$ cm^2.

Testul 2

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	B	B	D	C	C	B	A	B

Partea a II-a

1. $x = -\frac{5}{4}$. **2.** a) $A \times B = \{(-1; -2), (-1; 2), (3; -2), (3; 2)\}$; b) $\mathscr{A} = 16$ u^2. **3.** a) $AE = 6$ cm, $AF = 5$ cm; b) $\mathscr{A}_{ABCD} = 60$ cm^2; c) $\mathscr{A}_{AEF} = 7{,}5$ cm^2.

Testul 3

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	B	D	B	A	C	B	C	D

Partea a II-a

1. $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$. **2.** a) $y = \sqrt{6}$; b) $x = 6\sqrt{6}$; $m_g(x; y) = 6$. **3.** a) $\mathscr{A}_{ABCD} = 64$ cm^2; b) $BE = 6$ cm şi, aplicând teorema lui Pitagora în ΔBCE, obținem $CE = 10$ cm, deci $\mathscr{P}_{EBC} = 24$ cm; c) Construim $DF \perp CE$. $\Delta EBC \sim \Delta CFD$ şi obținem $DF = 6{,}4$ cm.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I – INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

1. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; c) $C = \{0, 1, 2\}$; d) $D = \{2, 3, 4, 5\}$. **2.** a) $A = \{$g, e, o, m, t, r, i, a$\}$, card $A = 8$; b) $B = \{7, 0, 1, 2, 3, 4, 8\}$, card $B = 7$. **3.** a) $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, card $E = 5$; b) $F = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, card $F = 6$. **4.** a) $A = \left\{\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, card $A = 5$; b) $B = \left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}\right\}$, card $B = 4$. **5.** $E = \{$t, e, r, a, d, u$\}$, $F = \{$c, i, l, n, d, r, u$\}$; a) $E \cup F = \{$t, e, r, a, d, u, c, i, l, n$\}$; b) $E \cap F = \{$r, d, u$\}$; c) $E \setminus F = \{$t, e, a$\}$; d) $F \setminus E = \{$c, i, l, n$\}$. **6.** a) $C \cup D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $C \cap D = \{1, 2\}$; $C \setminus D = \{3, 4, 5\}$; $D \setminus C = \{-2, -1, 0\}$; b) $C \cup D =$

$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; $C \cap D = \{1, 2, 3\}$; $C \setminus D = \{0\}$; $D \setminus C = \{-3, -2, -1\}$. **7.** a) $D_6 \cup D_9 = \{1, 2, 3, 6, 9\}$; b) $D_6 \cap D_9 = \{1, 3\}$; c) $D_6 \setminus D_9 = \{2, 6\}$; d) $D_9 \setminus D_6 = \{9\}$. **8.** a) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$; b) $A \cap B = \{1, 2\}$; c) $A \setminus B = \{3\}$; d) $B \setminus A = \varnothing$; e) $A \times B = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2)\}$; f) $B \times A = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3)\}$. **9.** a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, deci $A = B$; b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, deci $A = B$. **10.** a) $E \cup F = \{15, 25, 30, 45, 50, 60, 75, 90\}$; b) $E \cap F = \{75\}$; c) $E \setminus F = \{15, 30, 45, 60, 90\}$; d) $F \setminus E = \{25, 50\}$. **11.** $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, deci $B \subset A$. **12.** a) $\{2\}$, $\{6\}$, $\{2, 6\}$, $\varnothing$; b) $\{2\}$, $\{5\}$, $\{8\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 8\}$, $\{5, 8\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\varnothing$. **13.** $E = \{0, 5\}$, $F = \{0, 9\}$; a) $E \cup F = \{0, 5, 9\}$; b) $E \cap F = \{0\}$; c) $E \setminus F = \{5\}$; d) $F \setminus E = \{9\}$; e) $E \times F = \{(0, 0), (0, 9), (5, 0), (5, 9)\}$; f) $F \times E = \{(0, 0), (0, 5), (9, 0), (9, 5)\}$. **14.** a) $99 < 10n + 9 \le 999$, de unde rezultă $9 < n \le 99$, deci $10 \le n \le 99$; cel mai mic element este 109; b) cel mai mare element este 999. **15.** $E = \{25, 36\}$ şi $F = \{125, 216, 729\}$; $E \times F = \{(25, 125), (25, 216), (25, 729), (36, 125), (36, 216), (36, 729)\}$; $F \times E = \{(125, 25), (125, 36), (216, 25), (216, 36), (729, 25), (729, 36)\}$. **16.** $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, deci $C = D$. **17.** $E = \{15, 45, 75\}$, $F = \{15, 30, 45, 60, 90\}$; a) $E \cup F = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$; b) $E \cap F = \{15, 45\}$; c) $E \setminus F = \{75\}$; d) $F \setminus E = \{30, 60, 90\}$. **18.** $A = \{18, 36, 72\}$, $B = \{18, 36, 45, 90\}$; a) $A \cup B = \{18, 36, 45, 72, 90\}$; b) $A \cap B = \{18, 36\}$; c) $A \setminus B = \{72\}$; d) $B \setminus A = \{45, 90\}$. **19.** Condiţia $5^n < 2^{n+3}$ este verificată de $n = 0$, $n = 1$ şi $n = 2$, iar pentru $n \ge 3$ avem $5^{3+x} > 2^{6+x} \Leftrightarrow 125 \cdot 5^x > 64 \cdot 2^x$, $x \in \mathbb{N}$, deci $A = \{0, 1, 2\}$ şi, analog, se arată că $B = \{0, 1, 2\}$, prin urmare $A = B$. **20.** Din $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \dfrac{4}{7}$ rezultă că $b = 2a$, prin urmare $A = \left\{\dfrac{12}{21}, \dfrac{24}{42}, \dfrac{36}{63}, \dfrac{48}{84}\right\}$; $n = 2^{\text{card } A} = 16$ submulţimi. **21.** $3x - 2 + x + 5 + 5x + 4 = 3x - 1 + x + 4 + 4x + 7$, de unde rezultă $x = 3$ şi după verificare admitem soluţia $x = 3$. **22.** $b \in \{1, 3, 7, 9\}$ şi verificând rezultă $b \in \{3, 7\}$; $E = \{13, 23, 43, 53, 73, 83, 17, 37, 67, 97\}$, card $E = 11$. **23.** $a = b$, deci $2^n + 3^{n+1} = 2^{n+2} + 3^n$ sau $3^n \cdot 2 = 2^n \cdot 3$, deci $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{3}{2}$, de unde rezultă $n = 1$; $A \cap B = \{11\}$. **24.** Observăm că $u(a) \in \{4, 9\}$, iar $u(b) \in \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}$, deci $E \cap F = \varnothing$. **25.** Notăm $a + x = b + y = c + z = t$, deci $3t = \overline{a0}$, prin urmare $3 \mid \overline{a0}$, aşadar $a = 3$, deci $a + x = b + y = c + z = 10$, de unde rezultă $A = \{3, 5, 7\}$ şi $B = \{7, 5, 3\}$. **26.** $c = 15t + 11 = 3(5t + 3) + 2$, deci $c \in A$; $c = 15t + 11 = 5(3t + 1) + 1$, deci $c \in B$, prin urmare $c \in A \cap B$ şi deci $C \subset A \cap B$, aşadar $C \setminus (A \cap B) = \varnothing$. **27.** Deoarece numerele $\overline{cd}$ şi $\overline{bcd}$ sunt pătrate perfecte deducem că $\overline{cd} = 25$, iar $\overline{bcd} \in \{225, 625\}$. După efectuarea calculelor obţinem $A = \{5625, 7225\}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, card $A = 6$; b) $B = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, card $B = 8$. **2.** a) $E \cup F = \{0, 2, 5, 8\}$; b) $E \cap F = \{5\}$; c) $E \setminus F = \{0\}$; d) $F \setminus E = \{2, 8\}$; e) $E \times F = \{(0; 2), (0; 5), (0; 8), (5; 2), (5; 5), (5; 8)\}$; f) $F \times E = \{(2; 0), (2; 5), (5; 0), (5; 5), (8; 0), (8; 5)\}$. **3.** Condiţia $3^n < 2^{n+2}$ este verificată de $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$, iar pentru $n \ge 4$ avem $3^{4+x} > 2^{6+x} \Leftrightarrow 81 \cdot 3^x > 64 \cdot 2^x$, $x \in \mathbb{N}$, deci $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $2^{\text{card } A} = 16$ submulţimi.

Lecţia 2. Intervale numerice şi reprezentarea lor pe axa numerelor

1. a) Interval mărginit deschis la ambele capete, de extremităţi -1 şi 8; b) Interval mărginit închis la ambele capete, de extremităţi 0 şi 7; c) Interval mărginit deschis la stânga şi închis la dreapta, de extremităţi 2 şi 9; e) Interval nemărginit la stânga şi deschis la dreapta, de extremitate 4; f) Interval nemărginit la stânga şi închis la dreapta, de extremitate $\sqrt{2}$. **2.** a) A; b) A; c) F; d) A. **3.** a) F; b) F; c) A; d) F. **4.** a) $A = (-1; 4)$; b) $B = [\sqrt{2}; 9]$; c) $C = [-4; 6)$; d) $D = (0; \sqrt{3}]$.

$\in \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$. **21.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = 4$; d) $x = -4$. **22.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = -4$; d) $x = -3$.

23. a) $x \in (-3; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 5)$; c) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; d) $x \in \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$. **24.** i) a) $x \in (-2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; b) $x \in [-\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; c) $x \in (-\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$; d) $x \in [\sqrt{6}; 3\sqrt{6}]$; e) $x \in (2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; f) $x \in [\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; ii) a) $x \in \left(-\frac{1}{12}; \frac{19}{12}\right)$; b) $x \in \left(-\frac{23}{12}; \frac{41}{12}\right)$; c) $x \in \left[-\frac{14}{9}; \frac{10}{9}\right]$; d) $x \in (-8\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$; e) $x \in [3\sqrt{3}; 9\sqrt{3}]$; f) $x \in (8\sqrt{7}; 16\sqrt{7})$. **25.** a) $x = -3$; b) $x = -2$. **26.** $x \in (-\infty; 4+2\sqrt{5})$; $4+2\sqrt{5} > 4+2\sqrt{4} = 8$, deci $x = 8$. **27.** a) $x \in (2; 4)$; b) $x \in [-3; -1]$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x = (-\infty; 1)$; b) $x \in (-4; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 2\sqrt{5}]$. **2.** a) $x = (-\infty; 12)$; b) $x \in (-\infty; -5]$. **3.** $x = -2$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. a) $E \cup F = [-5; \sqrt{5})$; b) $E \cap F = (-2\sqrt{6}; 2)$; c) $E \setminus F = [-5; -2\sqrt{6}] \cup [2; \sqrt{5})$; d) $F \setminus E = \varnothing$. **6.** $A = [-2; 3]$, $B = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, deci card($C$) = 3. **Testul 2. 5.** Observăm că $c > 4$ şi u(c^3) = c, prin urmare $c \in \{5, 6, 9\}$; $A = \{125, 216, 729\}$; $n = 2^{\text{card } A} = 8$ submulţimi. **6.** $E = [-2; +\infty)$ şi $F = (-\infty, 3)$; $E \cup F = \mathbb{R}$; $E \cap F = [-2; 3)$; $E \setminus F = [3; +\infty)$; $F \setminus E = (-\infty; -2)$.

Testul 3. 5. $x \in \left[-\frac{9}{5}; +\infty\right)$, deci cel mai mic număr întreg care verifică inecuaţia este -1. **6.** $A = (-\sqrt{3}; +\infty)$ şi $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, deci card($A \cap B$) = 3.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. **2.** F. **3.** A. **II. 1.** $[-3; 0]$. **2.** 0. **3.** $(-\infty; -1]$. **III. 1.** C. -5. **2.** A. 6. **3.** D. $(-\infty; -12]$. **IV.** $E \cup F = \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$; $E \cap F = (-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$; $E \setminus F = \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$; $F \setminus E = \left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right]$. **V.** a) $A = [32; 98]$; b) $b = \frac{9a-3}{a+9}$, de unde rezultă că $a \in \{3, 5\}$, prin urmare $B = \{32, 53\}$, deci $B \subset A$.

CAPITOLUL II – CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecţia 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

1. a) Coeficientul este 38, iar partea literală este x^5; b) Coeficientul este $-\frac{7}{8}$, iar partea literală este y^3; c), d), e), f), g), h) Analog. **2.** a) $3x^2 - 8x + 29$; b) $-4x^2 + 35x - 7$; c) $2y^4 - \sqrt{2}y^3 + 4y - 21$; d) $-9y^5 + \sqrt{5}y^3 - y^2 - 16$. **3.** a) $-3x^5$; b) $11x^2$; c) $4z^3$; d) $-21z$; e) $9y^4$; f) $-\frac{1}{4}y$; g) $\sqrt{2}t$; h) $\frac{7}{3}t^5$.
4. a) $7x$; b) $5x$; c) $3x$; d) $11x^2$; e) $11x^2$; f) $2x^2$; g) $-8x^2$; h) $28x^2$; i) $6x^3$. **5.** a) $9a$; b) $5a$; c) $-23a^2$; d) $2a^2$; e) $3a^3$; f) $4a^3$. **6.** a) $2x + 1$; b) $-6x - 4$; c) $-9x + 7$; d) $10x - 9$; e) $-6x + 2$; f) $-2x + 6$; g) $-4x^2 - 4x$; h) $-14x^2 - 3x$; i) $16x^2 + 6x$. **7.** a) $5x^2 - 6x$; b) $4x^2 - x$; c) $25x^3 - 8x$; d) $-21x^3 + 6x$; e) $-12x^4 + x^2$; f) $-12x^4 + 4x^2$. **8.** a) $-3y^3 - 10y$; b) $-8y^4 - 3y$; c) $3y^5 - 6y$; d) $-8y^3 + 4y$; e) $-4y^4 - 3y^2$; f) $-23y^5 - 3y^3$. **9.** a) $5x^2 + 2x - 6$; b) $-4x^2 - 2x - 5$; c) $-3x^2 + 5x + 13$; d) $-11x^2 - 6x + 2$; e) $-9x^2 -$

$-10x-7$; f) $-3x^2-4x-11$. **10.** a) $-7x^3-13x-2$; b) $-13x^3+5x+7$; c) $-6x^3-2x^2+11$; d) $-x^3-6x^2+9$; e) $15x^2-21$; f) $-18x^3-8$. **11.** a) $-4\sqrt{2}x-2\sqrt{3}$; b) $-5\sqrt{5}x-9\sqrt{2}$; c) $11\sqrt{7}x^2-\sqrt{3}x$; d) $-\sqrt{5}x^2-7\sqrt{6}x$. **12.** a) $8a-2$; b) $a+3$; c) $-a^2-2a$; d) a^2-6a. **13.** a) $\sqrt{2}x^2-4\sqrt{3}x$; b) $-4\sqrt{5}x^2-\sqrt{6}x$; c) $-5\sqrt{7}x^3+14\sqrt{3}x$; d) $-4\sqrt{2}x^3-\sqrt{5}x$. **14.** a) $-\frac{17}{9}y^2+\frac{5}{12}y$; b) $\frac{19}{20}y^2-\frac{13}{12}y$; c) $\frac{1}{24}y^3-\frac{1}{15}y^2$; d) $-\frac{1}{2}y^3-\frac{7}{4}y^2$. **15.** a) $-\frac{8}{3}x^2+\frac{5}{24}x+\frac{17}{15}$; b) $\frac{5}{24}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}$; c) $\frac{1}{14}x^2-\frac{1}{10}x-\frac{7}{20}$; d) $-\frac{3}{40}x^2+\frac{1}{36}x+\frac{2}{3}$. **16.** a) $-\frac{\sqrt{2}}{8}x^2+\frac{\sqrt{2}}{12}x$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{18}x$; c) $-\frac{\sqrt{5}}{7}x^3+\frac{7\sqrt{5}}{12}x^2$; d) $-\frac{\sqrt{7}}{4}x^4-\frac{\sqrt{7}}{3}x^3$. **17.** a) $4y^2+4y$; b) $8y^2+6y$; c) $-6y^2+10y$; d) $-4y^2-2y$. **18.** a) $-8t^2+7t-8$; b) t^3-14t^2-2t+1; c) t^3-6t^2-9t+9; d) $-t^3-2t^2+8t-3$. **19.** a) $3x^2+3x+3$; $-2x^2-4x+6$; $-5x^2+x-1$; b) $-3x^2+4x-8$; $-x^2-10$. **20.** a) $5z^3+2z^2+4z$; $6z^3-3z^2-z$; $-11z^3+17z^2+5z$; b) $-z^3+13z^2+9z$; $11z^3-25z^2-9z$. **21.** $S=7599x-7450x^2$. **22.** $-2x^{10}+x^9-4x^8+3x^7-6x^6+5x^5-8x^4+7x^3-10x^2+9x$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $-22x^2+5x$; b) $-17x^2+8x-3$. **2.** a) $2x^2-\frac{1}{10}x-\frac{5}{12}$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{6}x^3-\frac{7\sqrt{2}}{6}x$. **3.** a) $2y^3+6y^2-11y-2$; b) $-6y^3+4y^2+23y+2$.

Lecţia 6. Înmulţirea numerelor reale reprezentate prin litere

1. a) $10x^2$; b) $12x^2$; c) $14x^2$; d) $-18x^3$; e) $-20x^4$; f) $-7x^4$; g) $42x^5$; h) $16x^6$; i) $20x^{10}$. **2.** a) $6x^7$; b) $2x^7$; c) $-2x^7$; d) $-4x^7$; e) $\frac{3}{2}x^7$; f) $\frac{4}{3}x^8$. **3.** a) $\sqrt{15}x^5$; b) $\sqrt{14}x^6$; c) $-36\sqrt{5}x^6$; d) $-30\sqrt{2}x^6$; e) $12\sqrt{7}x^7$; f) $14\sqrt{2}x^5$. **4.** a) $18x^3$; b) x^3; c) $2x^4$; d) $3x^4$; e) $-3x^5$; f) $-46x^5$. **5.** a) $-44x^6$; b) $29x^7$; c) $19x^8$; d) $-6x^9$. **6.** a) $-3x^5$; b) $-7x^6$. **7.** a) $-5\sqrt{6}x^5$; b) $11\sqrt{10}x^6$; c) $5\sqrt{2}x^9$; d) $-3\sqrt{5}x^{10}$. **8.** a) $2x^2+6x$; b) $3x^2-6x$; c) $6x^2+42x$; d) $5x^2-20x$; e) $7x^2+35x$; f) $72x-8x^2$. **9.** a) $8x^2+28x$; b) $24x^2-30x$; c) $6x^2+21x$; d) $24x^2-56x$; e) $54x^2+18x$; f) $20x^2-15x$. **10.** a) $6x^4+12x^3$; b) $24x^4-30x^3$; c) $14x^4+6x^3$; d) $-2x^6-10x^5$; e) $-3x^6+18x^5$; f) $-4x^6+12x^5$. **11.** a) $12x^4+12x^3-21x^2$; b) $-30x^4+15x^3+10x^2$; c) $12x^4+30x^3-18x^2$; d) $42x^5-14x^4+21x^3$; e) $8x^5+8x^4-80x^3$; f) $16x^5-14x^4+18x^3$. **12.** a) $15x^4-20x^3+5x^2-30x$; b) $20x^4+4x^3-8x^2+12x$; c) $-3x^5+15x^4+12x^3-3x^2$; d) $-7x^5-14x^4-21x^3+7x^2$. **13.** a) $-33x^3-6x^2$; b) $-10x^4-62x^3$; c) $13x^3-27x^2+20x$; d) $-28x^3+4x^2-8x$. **14.** a) x^2-1; b) x^2-4; c) x^2-9; d) $-3x^2-10x+25$; e) $2x^2+5x+2$; f) $-5x^2+9x-4$. **15.** a) $2x^3-x^2-15x$; b) $4x^3+23x^2-35x$; c) $6x^3-29x^2+20x$; d) $-4x^4+23x^3-15x^2$; e) $35x^4+27x^3-18x^2$; f) $63x^4-x^3-12x^2$. **16.** a) $42-23\sqrt{6}$; b) $28+15\sqrt{2}-14\sqrt{3}-10\sqrt{6}$; c) $-42-18\sqrt{10}$; d) $-9-45\sqrt{2}+40\sqrt{3}+4\sqrt{6}$. **17.** a) $6x^3-13x^2+4x+3$; b) $4x^3-35x^2+36x-9$; c) $-5x^3-29x^2+52x-12$; d) $-4x^3-29x^2-2x+35$. **18.** a) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{6}+2$; b) $15\sqrt{2}+20\sqrt{3}+\sqrt{6}-1$; c) $14\sqrt{5}-20\sqrt{2}-7\sqrt{10}+35$; d) $10\sqrt{3}-21\sqrt{5}-\sqrt{15}+39$. **19.** a) $3x^4-20x^3+4x^2+41x-10$; b) $8x^4-2x^3-27x^2+2x+12$; c) $8x^5-2x^4+3x^3+33x^2+8x$; d) $2x^5-13x^4+4x^3-13x^2+7x$. **20.** a) $6x^4-4x^3-9x^2+11x-5$; b) $12x^4-27x^3+11x^2+25x-25$; c) $5x^4-26x^3-7x^2+34x-12$; d) $-2x^4-9x^3+12x^2-9x+4$. **21.** a) $16x^2+6x-14$; b) $12x^2+3x+45$; c) $4x^3-19x^2+67x-2$; d) $-4x^3-3x^2+35x-20$. **22.** a) $60\sqrt{2}+12\sqrt{5}-151$; b) $148-140\sqrt{3}-87\sqrt{7}-16\sqrt{21}$; c) $60\sqrt{5}-30\sqrt{3}-\sqrt{15}+76$. **23.** a) $2x^5+8x^4$; b) $4x^5-20x^6$; c) $4x^5+2x^4-12x^3$; d) $-10x^6+17x^5-x^4-3x^3$;

c) $\frac{x+2}{7x^3}$. **18.** a) $\frac{3x-2}{4x^2-x^3}$; b) $\frac{2x^2-7x}{3}$; c) $\frac{3-5x}{3x^4+x^3}$. **19.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x-1}{x+2}$; c) $\frac{x-3}{x-5}$; d) $\frac{x+3}{x+5}$. **20.** a) $\frac{x-3}{4x}$; b) $\frac{3x^2}{x+1}$; c) $\frac{x-2}{2x^3}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{2x-3}{2x^2+x}$; b) $\frac{2}{x^2}$. **2.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x^2-x}{x+3}$. **3.** a) $\frac{x+1}{5x-x^2}$; b) $\frac{x+3}{4x}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $\frac{21x^2+3x}{6x^4-6x^2}$, $\frac{x^2-2x+1}{6x^4-6x^2}$. **6.** $\frac{x+1}{x}$. **Testul 2. 5.** $\frac{4x^3+8x^2}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$, $\frac{x^2-9}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$. **6.** $\frac{4x+5}{6x^2-3x}$. **Testul 3. 5.** $\frac{2x^2}{x-3}$. **6.** $\frac{3x^3-12x^2+12x}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{x^3-2x^2-x+2}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{4x^2+4x-8}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** F. **II. 1.** $\frac{2x}{3}$. **2.** $6x^2$. **3.** $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$. **III. 1.** B. $\mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$. **2.** C. $\frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2+x}$. **3.** D. $\frac{x-1}{4x^2}$. **IV.** $\frac{3x^2-12x+12}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$, $\frac{x^3-x}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$. **V.** a) $E(x)=\frac{3}{x+2}$; b) $F(x)=$ $=\frac{x-3}{x(x+1)}$; $E(x)=\frac{3x^2+3x}{x(x+1)(x+2)}$, $F(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x+1)(x+2)}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I – ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

Lecţia 1. Puncte, drepte, plane: convenţii de notare, reprezentări, determinarea dreptei

2. a) A; b) A. **3.** a) A; b) A. **4.** a) F; b) A. **6.** 4 drepte. **7.** 6 drepte. **8.** Observăm că $A \in BC$ şi $D \in BC$, deci A, B, C, D sunt coliniare. **9.** 6 drepte. **10.** MN, NP, PM, MF, PE, EF. **11.** 8 drepte. **12.** 10 drepte. **13.** a) O dreaptă, când cele 5 puncte sunt coliniare; b) 10 drepte, când oricare 3 dintre cele 5 puncte sunt necoliniare. **14.** Se arată că $EC \parallel BD$ şi $FC \parallel BD$, deci E, C şi F sunt coliniare. **15.** 8 drepte. **16.** Se arată că $\sphericalangle EAF = 180°$, deci E, A şi F sunt coliniare; 11 drepte. **17.** $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. Observăm că $Q \notin MN$, deci M, N, Q sunt necoliniare. **2.** a) O dreaptă, când cele 4 puncte sunt coliniare; b) 6 drepte, când oricare 3 dintre cele 4 puncte sunt necoliniare. **3.** Se arată că $EC \parallel BD$ şi $FC \parallel BD$, deci E, C şi F sunt coliniare.

Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

Testul 1. I. 1. C. $[-4; 1]$. **2.** D. $-x^4$. **3.** B. $(x-7)(x+7)$. **4.** B. secante. **5.** A. 28 cm. **6.** B. $11x+2$.
II. 1. $E \cup F = (-2; 2]$, $E \cap F = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$. **2.** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$. **3.** $E(x) = 5(x^2+2x+1) - (4x^2 - 12x + 9) + 1 - x^2 - 22x = 5x^2 + 10x + 5 - 4x^2 + 12x - 9 + 1 - x^2 - 22x = -3$. **4.** $\mathscr{A}_{ABC'D'} = AB \cdot BC' = 10$ cm^2. **5.** a) $AF = AP = AQ = 6$ cm, deci $PQ \parallel BC$, prin urmare $\sphericalangle(PQ, CD) = \sphericalangle BCD = 60°$; b) $PQ \parallel (BCD)$, deci $PQ \parallel MN$, prin urmare $MNPQ$ este trapez isoscel; $\mathscr{P}_{MNPQ} = 3(7+6\sqrt{3})$ cm.
Testul 2. I. 1. D. -7. **2.** B. $-x^3$. **3.** C. $3x^2(2x-3)$. **4.** C. necoplanare. **5.** A. 19 cm. **6.** D. $-x^2+6$.
II. 1. $E \cup F = \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right]$, $E \cap F = \left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$. **2.** $x \in [-\sqrt{10}; +\infty)$. **3.** $E(x) = (x+2)(x^2-2x+1) + x(4-x^2) - 7x = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 + 4x - x^3 - 7x = -6x + 2$; $E(n) = 2(1-3n) \vdots 2$.
4. $h = 4$ cm. **5.** a) $\sphericalangle(B'C, O'D) = \sphericalangle A'DO' = 30°$; b) Construim $BE \perp O'D$. Din egalitatea $\mathscr{A}_{B'BDO'} = \mathscr{A}_{B'BO'} + \mathscr{A}_{O'BD}$ rezultă că $BE = 4\sqrt{3}$ cm.
Testul 3. I. 1. A. 0. **2.** D. $-3x$. **3.** B. x^2+2x+1. **4.** C. $(C'CD)$. **5.** D. 15 cm. **6.** B. $2x-3$.
II. 1. $E \cup F = [-4; 5]$, $E \cap F = (-2; 5)$. **2.** $x \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right]$; $x = -3$. **3.** Notăm $x^2 - x = a$; $E(x) = a(a-5) + 6 = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3) = (x^2-x-2)(x^2-x-3) = (x-2)(x+1)(x^2-x-3)$. $E(a) = (a-2)(a+1)(a^2-a-3)$. Observăm că: pentru $a = 3k+2$, $a-2 \vdots 3$, pentru $a = 3k+1$, $a^2 - a - 3 \vdots 3$, pentru $a = 3k$, $a^2 - a - 3 \vdots 3$, prin urmare $E(a) \vdots 3$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$. **4.** $R = 6$ cm, $G = 9$ cm, $h = 3\sqrt{5}$ cm. **5.** a) $AC \cap BD = \{O\}$; $\sphericalangle(AB, VM) = \sphericalangle VMO = 60°$; b) $l = a_p = 8$ cm, $h = 4\sqrt{3}$ cm, $\mathscr{A}_d = 16\sqrt{6}$ cm^2.

Modele de teste pentru Evaluarea Naţională

Testul 1

Subiectul I

1. b) 1,23 *(5p)*. **2.** d) 12 *(5p)*. **3.** c) -38 m *(5p)*. **4.** c) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ *(5p)*. **5.** d) 9 *(5p)*. **6.** b) falsă *(5p)*.

Subiectul al II-lea

1. b) h şi p *(5p)*. **2.** a) $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$ *(5p)*. **3.** d) $3\sqrt{7}$ cm *(5p)*. **4.** b) 18 cm *(5p)*. **5.** c) $8\sqrt{3}$ cm *(5p)*. **6.** d) 10 cm *(5p)*.

Subiectul al III-lea

1. a) -3 *(3p)*; b) card $E = 4$ *(2p)*. **2.** a) $\frac{a}{6} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = k$, $a = 6k$, $b = 7k$, $c = 9k$, $c - a = 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$, deci $c = 18$ ani şi $a = 12$ ani *(3p)*; b) $b = 14$ ani; $b - a = 2$ ani *(2p)*. **3.** a) $E(x) = x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 + 3x = x^2 + x - 1$ *(2p)*; b) $E(n) = n^2 + n - 1$; deoarece n^2 şi n au aceeaşi paritate, rezultă că $n^2 + n$ este par, deci $n^2 + n - 1$ este număr impar *(3p)*. **4.** a) $\frac{DB}{EC} = \frac{BE}{CF}$, de unde obţinem $CF = 3$ cm *(2p)*; b) $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CEF$; $\sphericalangle BED + \sphericalangle CEF = 120°$, deci $\sphericalangle DEF = 60°$ *(3p)*.
5. a) $BD^2 = AB^2 + AD^2$, de unde obţinem $BD = 25$ cm; d$(A, BD) = AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = 12$ cm *(2p)*; b) $AE = CF = 12$ cm şi $AE \parallel CF$, deci $AECF$ este paralelogram; $EF = BD - DE - BF = 7$ cm;

Cuprins