Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Iuliana Ene
Corectură: autorii
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Bacalaureat 2026 : Matematică : M_mate-info :
teme recaputulative, 65 de teste rezolvate după modelul M.E.,
Breviar teoretic / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa,... –
Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4326-1

I. Zanoschi, Adrian
II. Iurea, Gheorghe
III. Popa, Gabriel

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Adrian Zanoschi
Gheorghe Iurea
Gabriel Popa
Petru Răducanu
Ioan Șerdean

Bacalaureat 2026

MATEMATICĂ

M_mate-info

_ Teme recapitulative
_ 65 de teste rezolvate, după modelul M.E.
_ Breviar teoretic

Editura Paralela 45

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ și $B = (-2, 7)$. Determinați $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.

2. Ordonați crescător numerele $a = 2{,}5(1)$, $b = \dfrac{5}{2}$, $c = 2{,}(51)$ și $d = 2{,}51$.

3. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\dfrac{21}{2}} - 6\sqrt{\dfrac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{4\dfrac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

4. Arătați că numărul $b = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$ este natural.

5. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor a și b.

6. Determinați numerele raționale a și b, știind că $\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = a - b\sqrt{3}$.

7. Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

8. Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Stabiliți câte numere iraționale conține mulțimea $\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{199}, \sqrt{200}\right\}$.

10. Calculați:

a) $\left[\dfrac{5}{3}\right] + \left[-\dfrac{5}{2}\right]$;

b) $\{1{,}64\} - \{-2{,}36\}$;

c) $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{2} + \sqrt{3}\right]$;

d) $\left\{\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} - \left\{\sqrt{2} + \sqrt{3}\right\}$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x-2|=5$; b) $|x-1|+|2-2x|=12$;
c) $|1-2x|=|x+4|$; d) $|x^2-1|+|x+1|=0$.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|1-2x|\le 3$; b) $|x+3|\ge 4$.

13. Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |2x+1|\le 100\}$.

14. Arătați că valoarea expresiei $E(x)=|4x-8|-2|4-2x|$ nu depinde de numărul real x.

15. Demonstrați că $|2x-3|+2|x-1|\ge 1$, pentru orice număr real x.

16. Demonstrați că $x^2+3x+3>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

17. Fie $E(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$, unde $x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $E(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;

b) $E(x)>\frac{3}{4}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

18. Demonstrați că, dacă $x, y\in[2,\infty)$, atunci $xy-2x-2y+6\in[2,\infty)$.

19. Demonstrați, prin inducție, că următoarele egalități sunt adevărate pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

b) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

20. Demonstrați, prin inducție, că următoarele inegalități sunt adevărate pentru orice număr natural n care îndeplinește condiția indicată:

a) $2^n>2n+1$, $n\ge 3$;

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n\ge 1$.

21. Demonstrați că numărul 13^n+7^n-2 se divide cu 6, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

22. Aflați câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

23. Stabiliți câte numere naturale de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3.

24. Stabiliți câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

25. Aflați câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.

26. Aflați câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 0.

27. Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aflați câte perechi $(a, b)\in A\times A$ au proprietatea că produsul $a\cdot b$ este impar.

1.6. Trigonometrie

1. Calculați: a) $\sin\frac{5\pi}{6}$; b) $\cos\frac{7\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; d) $\cos\frac{7\pi}{6}$.

2. Calculați: a) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; b) $\cos\frac{117\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg}\frac{53\pi}{3}$; d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1007\pi}{6}\right)$.

3. Aflați $\cos a$, $\sin b$, $\sin(a+b)$ și $\cos(a-b)$, știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\cos b = \frac{12}{13}$.

4. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos a = -\frac{5}{13}$, calculați $\sin a$, $\sin 2a$ și $\cos 2a$.

5. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Se cer $\cos x$ și $\sin x$.

6. Dacă $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sin x = \frac{1}{4}$, se cere $\sin 3x$.

7. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{ctg} x = 6$. Calculați $\sin^2 x$.

8. Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2$, calculați $\sin 2t$.

9. Fie t și $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha + t\cos\alpha = 1$.

a) Dacă $t = 1$, calculați $\operatorname{tg} 2\alpha$.
b) Dacă $t = -1$, calculați $\sin 2\alpha$.

10. Calculați $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, știind că $\sin a = \frac{4}{5}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Calculați: a) $\sin\frac{\pi}{12}$; b) $\cos 75°$; c) $\operatorname{tg} 15°$; d) $\cos\frac{11\pi}{12}$.

12. Calculați $\frac{\sin 75°}{\sin 15°} - \frac{\cos 75°}{\cos 15°}$.

13. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Calculați $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$.

14. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a - b = \pi$. Arătați că are loc relația $\cos a \cdot \cos b \le 0$.

15. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos(a-b)$.

30. Verificați egalitatea $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{3}{2}$.

31. Demonstrați că $\sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

32. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

33. Determinați $x \in [0, 3\pi)$ pentru care:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

34. Determinați $x \in [0, 2\pi)$ pentru care $\operatorname{tg} x = \sin x$.

35. Stabiliți dacă următoarele funcții sunt pare sau impare:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x - x \cos x$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x$.

36. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x \cdot \cos x$, este periodică, având perioada $T = \pi$.

37. Determinați imaginile funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x) = 3 \sin x - 2$; b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$; c) $f(x) = \sin x + \cos x$.

38. Demonstrați că:

a) $\cos 1 > \cos 2$; b) $\sin 2 > \cos 2$; c) $\sin 1 > \cos 1$.

1.7. Aplicații ale trigonometriei în geometrie

1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 3$, $AC = 4$. Calculați:

a) lungimea ipotenuzei BC; b) aria triunghiului;
c) cosinusul unghiului B; d) lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei;
e) raza cercului circumscris triunghiului.

2. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 5$ și $BC = 6$. Calculați distanța de la centrul de greutate al triunghiului la dreapta BC.

3. Calculați perimetrul triunghiului ABC, în care $AB = 4$, $AC = 3$, iar $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

4. În triunghiul ABC, avem $AB = 3$, $AC = 5$, iar $BC = 7$. Calculați $\cos A$.

5. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 8$. Arătați că triunghiul are un unghi obtuz.

6. Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc identitatea $b \cos C + c \cos B = a$.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a) $2\sqrt{14}-\sqrt{\dfrac{7}{2}}-5\sqrt{\dfrac{8}{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=3$;

c) $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Se consideră numerele $a=\sqrt{3-\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{3+\sqrt{3}}$. Arătați că $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\in\mathbb{Q}$.

3. Arătați că numărul $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$.

4. Calculați $\left[\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right]$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x).

5. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{18}:\sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt{3}}$.

6. a) Aduceți la forma cea mai simplă: $E(x,\,y)=\sqrt[4]{\dfrac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\dfrac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$, unde $x, y\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că numărul $a=\sqrt[3]{\dfrac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}}$ este rațional.

7. Se consideră $E(x)=x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x\geq 0$. Calculați $E(a)$, unde $a=\sqrt[11]{8}$.

8. a) Fie $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}$ și $b=\sqrt[16]{2}$. Arătați că $a\cdot b$ este număr rațional.

b) Arătați că numărul $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}\in\mathbb{Q}$.

9. Determinați numărul natural k, dacă $\left(\sqrt[5]{x^3}\right)^{7-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=x$, pentru orice $x>0$.

10. Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ și $\sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ și $\sqrt[3]{4}$.

11. Comparați numerele:

a) $a=\sqrt{2}+\sqrt{7}$ și $b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$; b) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12}$ și $b=\sqrt{12}-\sqrt{11}$.

12. Comparați numerele $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ și $b=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$

13. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$; b) $\log_2 0{,}125$; c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$; d) $\log_2 \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2\sqrt{8}}$.

14. Ordonați crescător numerele $a=-\sqrt[3]{64}$, $b=\log_3\dfrac{1}{27}$ și $c=\log_2\dfrac{1}{32}$.

15. a) Arătați că numărul $a=\log_4 8+\log_9 27-\sqrt[3]{8}$ este natural.

b) Demonstrați că numărul $b=\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculați:

a) $\log_2\left(6+\sqrt{8}\right)+\log_2\left(6-\sqrt{8}\right)-\log_2 7$; b) $\lg 0{,}01+2^{\log_2 3}-9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$; d) $\dfrac{\log_3 5\cdot\log_7 11}{\log_7 5\cdot\log_3 11}$.

17. Calculați:

a) $\log_2 8\cdot\log_3 9\cdot\log_5\sqrt{5}$; b) $\log_2 8\sqrt{2}-\log_3 3\sqrt{3}$.

18. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$; b) $\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_9 4}-\dfrac{3}{\log_{27} 8}$;

c) $\log_{11} 3\cdot\log_7 5-\log_7 3\cdot\log_{11} 5$.

19. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a=\log_{25}100\cdot\log_{16}25-2\log_{16}5$; b) $a=\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

c) $a=\log_2 9+\dfrac{\log_2 12}{\log_3 2}-\dfrac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

20. Arătați că numărul $a=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{5+2\sqrt{6}}$ este natural.

21. Care număr este mai mare?

a) $\log_3 5$ sau $\log_3 4$; b) $\log_2 3$ sau 2; c) $\log_{0,3} 2$ sau $\log_{0,3} 3$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ sau -1; e) $\log_3 5$ sau $\log_4 5$.

2.5. Combinatorică

1. Care este cel mai mic număr natural n pentru care $n! > 1000$?

2. a) Arătați că $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{99}{100!}$ și arătați că $S < 1$.

3. Calculați: a) $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$; b) $A_5^3 - 6C_5^3$; c) $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.

4. Calculați:

a) $\frac{n! + (n+1)!}{(n+1)! - n!}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$; c) $\frac{C_n^3}{C_n^3 + C_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

5. Care este cel mai mare element din mulțimea $A = \{C_7^3, C_7^5, C_7^6\}$?

6. Demonstrați că:

a) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$; b) $C_{n+1}^4 = C_n^4 + C_n^3$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

7. Rezolvați ecuațiile: a) $C_x^2 + A_x^2 = 30$; b) $C_{2x-3}^2 = 3$;

c) $A_x^5 - 3A_x^4 = 21A_x^3$; d) $6 \cdot C_x^1 + 6 \cdot C_{x+2}^3 = 13C_{x+1}^2$; e) $A_{x-2}^2 + C_x^2 = 41$.

8. Rezolvați inecuațiile:

a) $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$; b) $(x+1)! - x! \leq 100$; c) $C_n^3 \geq C_n^5$;

d) $C_7^k \geq C_7^{k-1}$; e) $A_{x-1}^5 \leq 12A_{x-1}^3$.

***

9. În câte moduri se poate forma un tren, având la dispoziție 6 vagoane?

10. Câte numere de zece cifre distincte încep cu 20 și se termină cu 14?

11. În câte moduri putem împărți 5 cărți la trei copii?

12. Dăm 3 cărți diferite la 5 copii, astfel încât niciun copil să nu primească mai mult de o carte. În câte moduri se poate face împărțirea?

13. Un antrenor are la dispoziție 10 jucători. În câte moduri poate forma o echipă formată din 6 jucători?

14. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Determinați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

15. Într-o clasă sunt 30 de elevi, dintre care 18 fete și 12 băieți. Alcătuim o echipă formată din 6 elevi care să conțină cel puțin 4 fete. În câte moduri putem forma echipa?

16. Aflați numărul diagonalelor unui poligon convex cu 10 laturi.

36. Găsiți termenul care nu conține x din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

37. a) Determinați coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(2+x)^4$.

b) Aflați rangul termenului care conține a^4 din dezvoltarea $\left(a^2+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a \neq 0$.

38. Fie dezvoltarea $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$. Aflați termenul independent de x, știind că suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este egală cu 49.

39. Aflați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$.

40. Arătați că:

a) $(\sqrt{2}+1)^7-(\sqrt{2}-1)^7 \in \mathbb{Q}$;

b) $(2+\sqrt{2})^7-(2-\sqrt{2})^7 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

41. Calculați:

a) $C_{16}^0+C_{16}^2+...+C_{16}^{16}$;

b) $C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$;

c) $C_{2008}^0 \cdot 5^{2008}-C_{2008}^1 \cdot 5^{2007} \cdot 4+C_{2008}^2 \cdot 5^{2006} \cdot 4^2-...+C_{2008}^{2008} \cdot 4^{2008}$.

42*. a) Verificați dacă: $(1+k)C_n^k=C_n^k+nC_{n-1}^{k-1}$, $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$.

b) Demonstrați că: $1+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n=2^{n-1}(n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

43*. a) Arătați că $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, $n \geq k$.

b) Demonstrați că: $C_n^0+\frac{1}{2}\cdot C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2.6. Matematici aplicate. Probabilități

1. Determinați ce procent din $a+b$ reprezintă numărul a, știind că a este egal cu 25% din b.

2. După o reducere de 20%, prețul unui produs este de 320 lei. Aflați prețul înainte de reducere.

3. Aflați prețul inițial al unui produs dacă, după o scumpire cu 15%, costă 460 lei.

4. Suma de 500 de lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii de 1%. Calculați dobânda obținută după un an.

5. O sumă de 1000 lei a fost depusă la o bancă și, după un an, s-a obținut o dobândă de 8 lei. Calculați rata dobânzii.

2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a

Varianta 1

1. Arătați că modulul numărului complex $z = 5 - 12i$ este 13.

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$ și axa Ox.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$.

4. Câte numere de două cifre se divid cu 4 sau cu 5?

5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin $A(1, 2)$ și este paralelă cu dreapta $d: x + y + 1 = 0$.

6. Arătați că $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Varianta 2

1. Arătați că partea imaginară a numărului complex $z = \frac{1}{1+i}$ este $-\frac{1}{2}$.

2. Determinați punctele de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ale căror coordonate au același modul.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x+2} + 2 = 0$.

4. Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ conțin numărul 1?

5. Arătați că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$ sunt coliniari.

6. În triunghiul ABC avem $AB = 4$, $AC = 6$ și $\sphericalangle A = 120°$. Arătați că $BC = 2\sqrt{19}$.

Varianta 3

1. Demonstrați că numărul $a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ este întreg.

2. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$ este impară.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{x^2 - 4x} = \frac{1}{27}$.

4. Câte submulțimi cu trei elemente are mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$?

5. Aflați distanța de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta $d: x - 2y = 0$.

6. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{5}{13}$, calculați $\operatorname{tg} a$.

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, τ^{-2}.

2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $(\sigma\tau)^{-1}$, σ^{-1}, τ^{-1} și arătați că $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.

3. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Calculați σ^{2009}.

4. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in S_3$, știind că $\sigma x \tau = e$.

5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\sigma^2 = \tau^2 = e$, $\sigma^{-1} = \sigma$, $\tau^{-1} = \tau$ și $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

b) Determinați o permutare $\alpha \in S_4$, astfel încât $\alpha^{-1} \neq \alpha$.

6. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculați σ^3.

b) Rezolvați ecuația $\sigma^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

7. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

b) Rezolvați ecuația $\sigma x = \tau$.

8. Determinați semnul fiecăreia dintre următoarele permutări:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.7. Șiruri

1. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă:

a) $x_n=\dfrac{n+1}{n}$; b) $x_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$;

c) $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$; d) $x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}$.

2. Studiați mărginirea șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ al cărui termen general este:

a) $x_n=1+(-1)^n$; b) $x_n=\dfrac{2^n+3^n}{5^n}$;

c) $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+...+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; d) $x_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$.

3. Arătați că următoarele șiruri sunt divergente:

a) $a_n=\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+2}$; b) $b_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

c) $c_n=n^2-n$; d) $d_n=2^n-3^n$.

4. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri, având termenul general:

a) $a_n=\dfrac{7n+3}{8n-2}$; b) $b_n=\dfrac{n^2-n+2}{n+3}$; c) $c_n=\dfrac{n^2+1}{(n+1)^3}$;

d) $d_n=\dfrac{(n-1)^2-(n+1)^2}{2n+1}$; e) $e_n=\dfrac{1+2+...+n}{n^2+2}$; f) $f_n=\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^3$.

5. Calculați limita șirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situații:

a) $a_n=\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n}$; b) $a_n=\dfrac{3\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+7}$; c) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt[3]{n+1}}$;

d) $a_n=\sqrt{n^2+1}-2n$; e) $a_n=\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+3}$; f) $a_n=\sqrt{n^2+1}-n\sqrt{n}$.

6. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri având termenul general:

a) $a_n=\dfrac{\ln n+3}{\ln n-2}$; b) $b_n=\ln(n+1)-\ln n$; c) $c_n=\dfrac{\ln(e^n+1)}{n+1}$;

d) $d_n=\dfrac{\ln(4^n+1)}{\ln(2^n+3)}$; e) $l_n=\dfrac{1+\ln n^2}{2+\ln n^3}$; f) $f_n=n-\ln n$.

19. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = n^a(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$, unde $a \in \mathbb{R}$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ (discuție după valorile lui a).

20. a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât limita șirului cu termenul general $a_n = \sqrt{n^2+1} - a \cdot n + b$ să fie 2.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, astfel încât limita șirului cu termenul general $a_n = \left(a + \dfrac{n+1}{bn^2+n+2}\right)^{n+2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ să fie $\dfrac{1}{e}$.

3.8. Șiruri date prin formule de recurență

1. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = 3$ și $x_{n+1} - x_n - 2 = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $a_1 = -2$ și $a_{n+1} = 4a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

a) Determinați a_n și S_n.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n+2}}{S_{n+1}}$.

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin: $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{10}a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați a_n în funcție de a_1 și calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{3}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

5. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = a$, $a \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}x_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați x_n în funcție de a și calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

20*. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Demonstrați că $f(x+1)-f(x)\le 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3.14. Regulile lui l'Hospital

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-7x}{2-3x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(1+e^x)}$; i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2^x-32}{x-5}$;

j) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$; k) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$; l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+\cos x-1}{x^2-x}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-x-2}{\sin x}$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$; q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x-\operatorname{arctg} x}$; r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x-\sin x}$.

2. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0}x\ln x$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$;

d) $\lim\limits_{x\searrow 0}x\operatorname{ctg}2x$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\operatorname{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(1+x)-x)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x-\ln x)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right)$.

4. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^{\frac{1}{x-2}}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^x$.

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $1001 \circ (-1001)$.

b) Rezolvați ecuația $x \circ x^2 = 64$.

c) Demonstrați că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$\circ$”, definită prin $x \circ y = x + y + 11$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

c) Determinați cel mai mare număr natural n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n < 1000$.

3. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x * y = x^2 - 4xy + 3y^2$.

a) Calculați $300 * 100$.

b) Arătați că $(x * x) * y \geq 0$, oricare ar fi numerele reale x și y.

c) Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.

4. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $(-1000) \circ (-999) \circ \ldots \circ 1000$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 12$.

5. Pe mulțimea numerelor reale definim operația „$\circ$” prin $x \circ y = xy + \sqrt{2}(x + y) + 2 - \sqrt{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = (x+\sqrt{2})(y+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

11. Pe mulțimea $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ considerăm operația $x \circ y = x^{3 \ln y}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că $x \circ y \in G$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Arătați că $x \circ y = y \circ x$, oricare ar fi $x, y \in G$.

c) Rezolvați în G ecuația $x \circ x = e^3$.

12. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x * 5^x = 11$.

b) Demonstrați că mulțimea $H = [3, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”.

c) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $a * b \in \mathbb{Z}$.

13. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, +\infty)$, se definește legea de compoziție:
$a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

a) Arătați că, pentru orice $a, b \in M$, rezultă că $a * b \in M$.

b) Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

c) Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, determinați elementele $a \in M$, astfel încât $\underbrace{a * a * ... * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

14. Fie mulțimea $G = [3, +\infty)$, pe care se definește legea de compoziție:
$x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că „$*$” este lege de compoziție internă pe G.

b) Arătați că legea este asociativă, comutativă și admite element neutru.

c) Care sunt elementele simetrizabile în raport cu această lege de compoziție?

15. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.

b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$*$”.

c)* Rezolvați ecuația $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } 101 \text{ ori } x} = -1$.

16. Fie mulțimea de numere reale $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$.

a) Demonstrați că, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, atunci $a = c$ și $b = d$.

b) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de înmulțirea numerelor reale.

c) Dovediți că, dacă $x = a + b\sqrt{2}$ și $x \in G$, atunci $x \neq 0$ și $\dfrac{1}{x} \in G$.

4.7. Formula Leibniz–Newton

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1000x^{999}}{x^{1000}+1}$.

a) Verificați dacă funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln(x^{1000}+1)$ este o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.

a) Verificați dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\sin x$, este o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

3. Calculați integralele:

a) $\int_1^2 \left(x^2-x+2\right)dx$; b) $\int_1^4\left(x^2-\sqrt{x}\right)dx$; c) $\int_{-e}^{-1}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx$;

d) $\int_{-e}^{-1}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 dx$; e) $\int_2^3 \dfrac{x^2-x+2}{x}\,dx$; f) $\int_0^2\left(2^x+3^x\right)dx$;

g) $\int_0^2 \dfrac{1}{x^2+4}\,dx$; h) $\int_0^1\dfrac{1}{x^2-4}\,dx$; i) $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$;

j) $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$; k) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$; l) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$;

m) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$; n) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos x\,dx$; o) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$.

4. Calculați integralele:

a) $\int_{-1}^{1}(x+1)^{2017}dx$; b) $\int_0^1\left((x+1)^5-(x-1)^5\right)dx$; c) $\int_0^2\dfrac{1}{x+2}\,dx$;

d) $\int_2^3\dfrac{2}{2x+1}\,dx$; e) $\int_0^1\left(\dfrac{1}{2^x}-\sqrt{2^x}\right)dx$; f) $\int_0^1 e^{3x-1}dx$;

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\,dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 3x\,dx$.

5. a) Determinați $a\in\mathbb{R}$, dacă $\int_1^a (a-4x)\,dx=6-5a$.

b) Determinați $a>0$, dacă $\int_0^a(2-4x+3x^2)\,dx=a$.

c) Determinați $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\int_0^x e^t(2e^t-3)\,dt=0$.

15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$. Calculați:

a) $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx$; b) $\int_{-1}^0 \frac{x^2+4}{f(x)} dx$.

16. Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-5}{x^2-3x+2}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ să avem $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.

b) Găsiți primitivele lui f pe $(2, +\infty)$. c) Calculați $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_3^n f(x)\, dx$.

17. Calculați:

a) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx$; b) $\int_{-1}^{2} |e^x - e^{-x}|\, dx$; c) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$.

18. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, x \in (0, +\infty) \end{cases}$.

a) Demonstrați că f este integrabilă pe $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Calculați $\int_{-1}^{\pi} f(x)\, dx$.

19. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, x \le 0 \\ x + \sqrt{x}, x > 0 \end{cases}$.

a) Demonstrați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$. Determinați primitiva care se anulează în zero.

b) Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

c) Dacă $\int_a^b f(x)\, dx = \int_b^c f(x)\, dx$, unde a, b, c sunt numere reale și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, arătați că numerele $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

20. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.

a) Calculați $\int_1^e \left(f(x) - \frac{\ln x}{x} \right) dx$. b) Demonstrați că $\int_1^e f(x)\, dx = \frac{e^2}{2}$.

c) Determinați rația progresiei aritmetice având termenul general:
$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx, \ n \ge 1$.

4.11. Probleme de sinteză – analiză matematică

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

a) Arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1, +\infty)$.

b) Determinați primitiva funcției f care se anulează în $x = 1$.

c) Determinați $a \in (1, e^2)$ dacă $\int_a^{e^2} f(x)dx = \ln 3 - \ln 2$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.

a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $(-1, +\infty)$.

b) Calculați $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_x^{2x} f(t)\, dt}{x}$.

3. Se consideră $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$ și $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Arătați că $F(x) = 1 - f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x tf(t^2)dt$.

4. Fie $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}\sin x$ și $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin x - \dfrac{1}{2}e^{-x}\cos x$.

a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x f(x)dx$.

b) Verificați dacă F este primitivă a funcției f.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx \le 1 - \dfrac{1}{e}$.

5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2, & x<0 \\ e^x+1, & x \ge 0 \end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive. Determinați primitiva funcției f care se anulează în $x = 0$.

b) Calculați $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

c) Arătați că $\int_0^1 xf(x^2)dx = \dfrac{e}{2}$.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

Testul 1

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Calculați $\left[\sqrt{2022}\right]-4\cdot\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ($[x]$ = partea întreagă a numărului real x, $\{x\}$ = = partea fracționară a numărului real x).

(5p) **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{1+2^x}$. Calculați $S=f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

(5p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x-\sqrt{x-1}=3$.

(5p) **4.** Determinați numărul elementelor mulțimii A, știind că are exact 11 submulțimi cu cel mult două elemente.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $3x+y-1=0$. Arătați că punctele $A(2, 5)$ și $B(-4, 3)$ sunt simetrice față de dreapta d.

(5p) **6.** Arătați că $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=2$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

(5p) a) Verificați că $\det(A(a))=a+5$.

(5p) b) Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât inversa matricei $A(a)$ să fie matricea $B=\begin{pmatrix}-12 & -7 & 3\\ -5 & -3 & 1\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

(5p) c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, știind că $X\cdot A(-4)=C$, unde C este matricea $(-1\ \ 0\ \ 1)$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + \dfrac{\overline{z_1 + z_2}}{2}$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(5p) a) Verificați dacă $(1 + i) * (1 - i) = 3$.

(5p) b) Demonstrați că mulțimea $M = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ față de legea „$*$".

(5p) c) Arătați că pentru o infinitate de numere complexe z, $(-2 + 3i) * z$ este număr real.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

(5p) a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

(5p) b) Arătați că f are un singur punct de extrem.

(5p) c) Demonstrați că dreapta $y = (e - 1)x$ este tangentă graficului funcției f.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \dfrac{\ln x}{x}$.

(5p) a) Verificați că $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x) + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \frac{7}{3}$.

(5p) b) Determinați $a \in (1, \infty)$, știind că $\displaystyle\int_1^a \left(x^2 - f(x) \right) dx = \frac{1}{2}$.

(5p) c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f pe $(0, 1)$ este strict monotonă.

Testul 2

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Arătați că numerele $\log_3 8$, $\sqrt{6}$, $\log_{\sqrt{2}} 3$ sunt în progresie geometrică.

(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Determinați semnul produsului $P = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3}) \cdot f(\sqrt{5})$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} - 2^x = \sqrt{2}(2^{x+1} - 1)$.

(5p) **4.** Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $C_7^{x-1} \geq 2C_7^x$.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(8, 1)$ și $C(0, 1)$. Arătați că punctul $H(2, 5)$ este ortocentrul triunghiului ABC.

(5p) **6.** Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin x \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos x \cdot \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Testul 28

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, o progresie aritmetică astfel încât $a_3 = 3$ și $a_7 = 15$. Calculați $a_1 + a_9$.

(5p) **2.** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m, 2)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 3$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5-x} = 3x - 1$.

(5p) **4.** Într-o clasă sunt 12 elevi, dintre care 5 sunt fete. Aflați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(5, 6)$ și $C(-1, 1)$. Determinați ecuația înălțimii duse din vârful C în triunghiul ABC.

(5p) **6.** Calculați $\cos 70° + \cos 110°$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ mx + y + z = 4m + 1 \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

(5p) a) Arătați că $\det A(m) = 5 - m$.

(5p) b) Arătați că pentru $m = 5$ sistemul nu are soluție.

(5p) c) Determinați numerele naturale m, știind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) formată din numere naturale.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x * y = 6x + 6y - 2xy - 15$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Arătați că $e = \frac{5}{2}$ este elementul neutru al legii date.

(5p) b) Verificați că legea „$*$” este asociativă.

(5p) c) Rezolvați ecuația $x * x * x = x, x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcțiile $f, g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1 - x \ln x$ și $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

(5p) a) Arătați că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
(5p) b) Demonstrați că funcția g este strict descrescătoare.
(5p) c) Arătați că $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-1} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}-1}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$.
(5p) a) Calculați I_1.
(5p) b) Demonstrați că $I_n = e - nI_{n-1}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.
(5p) c) Arătați că $I_3 = 6 - 2e$.

Testul 29

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculați suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și $b_2 = -2$.
(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$. Calculați $(f \circ f)(2)$.
(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28$.
(5p) **4.** Se dă dezvoltarea $\left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)^6$, $x > 0$. Determinați termenul independent de x.
(5p) **5.** Se consideră un triunghi ABC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$. Determinați numerele reale x, y, știind că $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
(5p) **6.** Fie $a \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin a = -\frac{4}{5}$. Calculați $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f_A(X) = AXA^{-1}$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și A este inversabilă.
(5p) a) Calculați $f_A(I_2)$.
(5p) b) Arătați că f_A este o funcție bijectivă.
(5p) c) Arătați că $f_A(X \cdot Y) = f_A(X) \cdot f_A(Y)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^2 + 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.
(5p) a) Determinați restul împărțirii lui f prin polinomul $X - 3$.
(5p) b) Arătați că f nu are rădăcini raționale.
(5p) c) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + 3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = -8$.

Testul 50

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Determinați partea reală a numărului $z = \dfrac{4-2i}{3+i}$.

(5p) **2.** Determinați funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ știind că este tangentă axei Ox în punctul $A(2, 0)$ și intersectează axa Oy în punctul $B(0, 4)$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(5+\sqrt{5}) + \log_5(5-\sqrt{5}) - 2\log_5 x = 1$.

(5p) **4.** Aflați câte numere naturale mai mici sau egale cu 2000 au suma cifrelor 2.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$ și $C(1, -6)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

(5p) **6.** Calculați $\sin\dfrac{11\pi}{12}\cos\dfrac{23\pi}{12}$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 3 & 3 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(5p) a) Arătați că $\det(A) = 3(a^2 - 1)$.

(5p) b) Demonstrați că $\operatorname{rang}(A) \geq 2$, pentru orice număr real a.

(5p) c) Pentru $a = 1$, arătați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = B$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

(5p) a) Pentru $a = 1$, determinați rădăcinile polinomului f.

(5p) b) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, calculați $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

(5p) c) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul are cel puțin o rădăcină întreagă.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{1-x}$.

(5p) a) Calculați $f'(x)$, $x \in [0, 1]$.

(5p) b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

(5p) c) Demonstrați că $2\sqrt{e} \leq f(x) \leq 1 + e$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

2. Fie funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

(5p) a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

(5p) b) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} \int_0^x t f(t)\,dt$.

Testul 51

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Arătați că numărul $z = \left(\dfrac{1}{3 - 2i} - \dfrac{1}{3 + 2i} \right)^2$ este real.

(5p) **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = x - 2$. Calculați $(f \circ g)(1)$.

(5p) **3.** Rezolvați ecuația $\left(\dfrac{1}{2} \right)^{1-x} = \sqrt{2^x}$.

(5p) **4.** Aflați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 99\}$, acesta să se dividă cu 3, dar nu cu 9.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 4)$. Determinați coordonatele punctului M astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

(5p) **6.** Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\cos 2x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2} \right)$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, $a \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Calculați $\det X(-2)$.

(5p) b) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, pentru orice numere reale a și b.

(5p) c) Determinați matricele $S = X(-2) + X(-1) + X(0) + X(1)$ și $P = X(-2)X(-1) \cdot X(0)X(1)$.

2. Fie G mulțimea polinoamelor de grad trei cu coeficienți în $\mathbb{Z}_3$.

(5p) a) Aflați numărul elementelor mulțimii G.

(5p) b) Determinați rădăcinile, din $\mathbb{Z}_3$, ale polinomului $f = X^3 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

(5p) c) Arătați că polinomul $g = X^3 + X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Testul 61

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + 3x + 5 = 0$, arătați că numărul $x_1^3 + x_2^3$ este întreg.

(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Rezolvați ecuația $(f \circ f)(x) = f^2(x)$.

(5p) **3.** Determinați numerele naturale $x \geq 2$, știind că $C_x^1 + C_x^2 \leq 15$.

(5p) **4.** Câte numere $\overline{abc}$ au cifrele din mulțimea $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ și $a < b < c$.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -3)$ și $B(4, 1)$. Găsiți coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.

(5p) **6.** Determinați raza cercului înscris în triunghiul ABC în care $AB = AC = 15$ și $BC = 24$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & ix \\ 0 & 1 & 0 \\ -ix & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

(5p) a) Calculați determinantul matricei $A(1)$.

(5p) b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$, pentru orice numere reale x și y.

(5p) c) Determinați numerele reale x pentru care $(A(x))^{2018} = A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - aX^2 - aX + 2$ cu $a \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Calculați $f(-1)$.

(5p) b) Determinați valorile lui a pentru care f are toate rădăcinile reale.

(5p) c) Pentru $a = 1$, arătați că rădăcinile polinomului f au același modul.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

(5p) a) Arătați că funcția f are un singur punct de extrem.

(5p) b) Arătați că $\ln\frac{3}{2} < 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

(5p) c)* Arătați că pentru orice $m \in (2, +\infty)$, ecuația $f(x) = m$ are două rădăcini reale distincte.

2. Se consideră funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{1}{x^3}, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

(5p) a) Arătați că f admite primitive pe $[0, 2]$.

(5p) b) Arătați că $\int_0^2 f(x)dx = \frac{7}{8}$.

(5p) c) Determinați $a \in [0, 1]$, știind că $\int_0^a f(x)dx = \int_a^2 f(x)dx$.

Testul 62

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculați $\left[2\sqrt{2}\right] - 5\{-1,8\}$.

(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Determinați semnul produsului $P = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3}) \cdot f(\sqrt{5}) \cdot f(\sqrt{7})$.

(5p) **3.** Dacă $\log_2 3 = a$, calculați $\log_{12} 18$, în funcție de a.

(5p) **4.** Fie ABC un triunghi și punctele D și E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$. Arătați că $BE \parallel CD$.

(5p) **5.** Dacă $\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x = 3$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, calculați $9(\sin 2x - \cos 4x)$.

(5p) **6.** Laturile unui triunghi sunt egale cu 6, 8 și 10. Determinați raza cercului circumscris triunghiului.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-1 & y-1 & 0 \\ x^2+1 & y^2+1 & 2 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

(5p) a) Calculați $D(2, 3)$.

(5p) b) Arătați că $D(x, y) = (x - 1)(y - 1)(y - x)$, pentru orice numere reale x și y.

(5p) c) Rezolvați ecuația $D(2^x, 4) = 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX - 1$, cu $a \in \mathbb{R}$..

(5p) a) Determinați a, dacă f este divizibil cu $X - 1$.

(5p) b) Determinați rădăcinile lui f pentru $a = -1$.

(5p) c)* Dacă $a \in \mathbb{Z}$, arătați că $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$.

(5p) a) Determinați ecuația asimptotei la graficul lui f spre $+\infty$.

Soluții

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. **2.** $b < d < a < c$. **3.** $a = 6 \in \mathbb{N}$. **4.** $b = 2 \in \mathbb{N}$. **5.** $a = \sqrt{2},\ b = 18\sqrt{2},\ m_a = \dfrac{19\sqrt{2}}{2},\ m_g = 6$. **6.** $a = 8$, $b = -4$. **7.** $\sqrt{x+49} \in [7, 10]$, $\sqrt{x+625} \in [25, 26] \Rightarrow a \in [32, 36]$, $\forall\ x \in [0, 51]$. **8.** $E(x, y) = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(y+3)^2+1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. **9.** 186. **10.** a) -2; b) 0; c) 5; d) 1. **11.** a) $x \in \{-3, 7\}$; b) $x \in \{-3, 5\}$; c) $x \in \{-1, 5\}$; d) $x = -1$. **12.** a) $x \in [-1, 2]$; b) $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$. **13.** 100. **14.** $E(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **15.** $|2x-3| + 2|x-1| = |2x-3| + |2x-2| = |2x-3| + |2-2x| \geq |2x-3+2-2x| = 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **16.** $x^2 + 3x + 3 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **17.** b) $E(x) = (x^2+1)\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right) > \dfrac{3}{4}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **18.** $xy - 2x - 2y + 6 = (x-2)(y-2) + 2 \in [2, +\infty)$, $\forall\ x, y \in [2, +\infty)$. **21.** Fie $P(n) = 13^n + 7^n - 2 \,\vdots\, 6$, unde $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ avem $13^0 + 7^0 - 2 \,\vdots\, 6$, deci $P(0)$ este adevărată. Presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un număr natural k; atunci $13^k + 7^k - 2 = 6p$, cu $p \in \mathbb{N}$. Rezultă că $13^{k+1} + 7^{k+1} - 2 = 13 \cdot 13^k + 7^{k+1} - 2 = 13(6p + 2 - 7^k) + 7 \cdot 7^k - 2 = 6 \cdot 13p - 6 \cdot 7^k + 24 = 6(13p - 7^k + 4) \,\vdots\, 6$, deci $P(k+1)$ este adevărată, drept urmare, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. **22.** 6. **23.** 192. **24.** 60. **25.** 243. **26.** 171. **27.** 16. **28.** a) 8; b) 25; c) 50.

1.2. Progresii

1. $a_1 = 5$. **2.** $a_1 = -1$. **3.** Fie r rația progresiei; atunci $a_1 + 2r = 5$ și $a_1 + 4r = 9$. Rezultă $a_1 = 1$ și $r = 2$. Prin urmare, $S_7 = \dfrac{(a_1 + a_7)7}{2} = 49$. **4.** 2007 este al 402-lea termen al progresiei. **5.** $x = 6$. **6.** Este suma primilor 11 termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 1 și rația 3; avem că $S_{11} = \dfrac{(1+31)\cdot 11}{2} = 176$. **7.** Termenii sumei formează o progresie aritmetică în care $a_1 = 1$, $r = 4$. Dacă notăm cu m numărul de termeni, atunci $n = a_m = a_1 + r(m-1)$, deci $n = 4m - 3$. Astfel, $231 = S_m = \dfrac{m(4m-2)}{2} = 2m^2 - m$ și cum $m \in \mathbb{N}^*$, obținem că $m = 11$, apoi $n = 41$. **8.** $a_{n+1} - a_n = 3$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deci (a_n) este progresie aritmetică de rație $r = 3$ și $a_1 = 1$. Apoi

29. Cum sin $B = 1$, rezultă că $\sphericalangle B = 90°$. Avem că sin $A = \dfrac{BC}{AC}$, deci $AC = 8$. Aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$. **30.** $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\sphericalangle BAD = 24\sqrt{2}$. **31.** a) Cum $A + B = \pi - C$, rezultă că $\dfrac{\text{tg}\, A + \text{tg}\, B}{1 - \text{tg}\, A \cdot \text{tg}\, B} = -\,\text{tg}\, C$, deci $\text{tg}\, A + \text{tg}\, B + \text{tg}\, C = \text{tg}\, A \cdot \text{tg}\, B \cdot \text{tg}\, C$; b) $\text{tg}(A + B) =$ $= \dfrac{\text{tg}\, A + \text{tg}\, B}{1 - \text{tg}\, A \cdot \text{tg}\, B} = -1$, deci $A + B = 135°$. Rezultă că $\text{tg}\, C = 1$. Altfel: Folosind relația de la a), obținem că $\text{tg}\, C = 1$, deci $C = 45°$.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. b) Observăm că $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$ și $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$; c) Se ridică la pătrat în ambii membri. **2.** Avem: $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \dfrac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) = 1 \in \mathbb{Q}$. **3.** $a = 2$. **4.** Se arată că $-4 < \sqrt{2} - 3\sqrt{3} < -3$, deci $\left[\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right] = -4$. **5.** a) 0; b) 6; c) 1; d) 27. **6.** a) $E = \dfrac{x}{y}$; b) $a = \dfrac{2}{3}$. **7.** Cum $E(x) = x^{\frac{11}{6}}$ și $a = 2^{\frac{3}{11}}$, rezultă $E(a) = \sqrt{2}$. **8.** a) $a = \sqrt[16]{2^{15}}$, deci $a \cdot b = 2$; b) $a = 2$. **9.** $k = 2$. **10.** a) Aducând radicalii la ordin comun rezultă $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$; b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{4} <$ $< \sqrt[4]{27\sqrt{3}}$. **11.** a) Avem: $a^2 = 9 + 2\sqrt{14}$ și $b^2 = 9 + + 2\sqrt{18}$, deci $a < b$; b) Cum $a = \dfrac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{12}}$ și $b = \dfrac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$, rezultă $a < b$. **12.** Aducem la același ordin, deci $a > b$. **13.** a) $\dfrac{7}{2}$; b) -3; c) $\dfrac{7}{3}$; d) $\dfrac{13}{6}$; e) $\dfrac{1}{2}$. **14.** $c < a < b$. **15.** a) $a = 1$; b) $b = -1$. **16.** a) 2; b) -24; c) 3; d) 1. **17.** a) 3; b) 2. **18.** a) 2; b) 0; c) 0. **19.** a) $a = \dfrac{1}{2}$; b) Fie $\log_2 3 = x$; atunci $a = (3 + x) \cdot (5 + x) - (6 + x)(2 + x) =$ $= 3 \in \mathbb{Q}$; c) -3. **20.** $a = 3$. **21.** a) $\log_3 5$; b) 2; c) $\log_{0,3} 2$; d) -1; e) $\log_3 5$. **22.** a) Cum $1 < 2 < 3$, rezultă $0 < \log_3 2 < 1$; b) Cum $3 < 4 < \sqrt{27}$, rezultă $1 < \log_3 4 < \dfrac{3}{2}$; c) Se arată că $\log_3 4 < \dfrac{3}{2} <$ $< \log_4 9$, deci $\log_3 4 < \log_4 9$. **23.** a) Inegalitatea este echivalentă cu $2\sqrt{2} < 3 < 4$; b) Folosind a), avem $a > 2$ și $a < 2 + \dfrac{2}{3}$, deci $[a] = 2$. **24.** $\log_{12} 18 = \dfrac{2 + \log_3 2}{1 + 2\log_3 2} = \dfrac{2 + a}{1 + 2a}$. **25.** Din $\log_{40} 100 = a$

2.5. Combinatorică

1. 7. **2.** b) $S = 1 - \frac{1}{100!} < 1$. **3.** a) $\frac{11}{10}$; b) 0; c) 12. **4.** a) $\frac{n+2}{n}$; b) $(n-4)^2$; c) $\frac{4}{n+1}$. **5.** C_7^3. **7.** a) $x = 5$; b) $x = 3$; c) $x = 10$; d) $x = 3$; e) $x = 7$. **8.** a) $x \in \{3, 4\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) În mod necesar $n \geq 5$. Inecuația este echivalentă cu $n^2 - 7n - 8 \leq 0$, $n \geq 5$, deci $n \in [-1, 8] \cap [5, +\infty) \cap \mathbb{N}$, adică $n \in \{5, 6, 7, 8\}$; d) $k \in \{1, 2, 3, 4\}$; e) $x \in \{6, 7, 8\}$. **9.** $6! = 720$ moduri. **10.** $6! = 720$ numere. **11.** $3^5 = 243$ moduri. **12.** $A_5^3 = 60$ moduri. **13.** $C_{10}^6 = 210$ moduri. **14.** $C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 = 9900$ moduri. **15.** $C_{18}^4 \cdot C_{12}^2 + C_{18}^5 \cdot C_{12}^1 + C_{18}^6 \cdot C_{12}^0$ moduri. **16.** Cu cele 10 puncte putem forma $C_{10}^2 = 45$ de drepte. Cum 10 dintre aceste drepte provin din laturi, vom avea 35 de diagonale. **17.** Din $C_n^2 = 120$ obținem $n = 16$. **18.** O submulțime cu cinci elemente care conține pe 2 și pe 3 are forma $\{2, 3\} \cup X$, unde X este o submulțime cu trei elemente a mulțimii $\{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Rezultă că X poate fi aleasă în C_7^3 moduri. Prin urmare, 35 de submulțimi ale lui A au cinci elemente și conțin numerele 2 și 3. **19.** $C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 42$. **20.** Submulțimile sunt de forma $\{0\} \cup X$, unde X este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$. Există $2^4 = 16$ asemenea submulțimi. **21.** Mulțimea X are forma $\{4, 5\} \cup A$, unde A este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Sunt $2^3 = 8$ mulțimi cu proprietatea cerută. **22.** $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4 = 16$. **23.** Cele două numere pare pot fi alese în C_5^2 moduri, iar cele trei numere impare pot fi alese în C_5^3, deci numărul submulțimilor este $C_5^2 \cdot C_5^3 = 100$. **24.** *Soluția 1*: Numărul de submulțimi cu trei elemente este $C_9^3 = 84$. Dintre acestea trebuie excluse submulțimile care conțin toate elementele numere pare, deci C_5^3 submulțimi. Numărul submulțimilor căutate este 74. *Soluția 2*: Submulțimile căutate conțin 1 număr impar și 2 pare, 2 numere impare și unul par sau 3 numere impare. Numărul lor este $C_4^1 \cdot C_5^2 + C_4^2 \cdot C_5^1 + C_4^3 \cdot C_5^0 = 74$. **25.** *Soluția 1*: În total sunt $2^7 = 128$ de submulțimi. Dintre acestea trebuie excluse submulțimile cu toate elementele numere pare, deci $2^4 = 16$ submulțimi. Numărul submulțimilor căutate este 112. *Soluția 2*: Submulțimile cu cel puțin un număr impar cu forma $X \cup Y$ unde X este o submulțime nevidă a mulțimii $\{1, 3, 5\}$, iar Y o submulțime a mulțimii $\{0, 2, 4, 6\}$. Numărul lor este $(2^3 - 1)2^4 = 112$. **26.** Submulțimile lui A cu trei elemente și suma elementelor număr par sunt formate din: trei numere pare, deci $C_5^3 = 10$ submulțimi, sau un număr par și două impare, deci $5 \cdot C_5^2 = 50$ submulțimi. În total sunt 60 de submulțimi cu proprietățile cerute. **27.** $C_7^3 = 35$. **28.** a) Patru cifre distincte pot fi alese în C_{10}^4 moduri. Odată alese, ele pot fi ordonate descrescător în mod unic. Obținem $C_{10}^4 = 210$ numere ca în enunț; b) Prima cifră nu poate fi 0, deci numerele nu conțin cifra 0. Cu același raționament, găsim $C_9^4 = 126$ numere. **29.** O asemenea funcție ia valoarea 1 în două elemente ale domeniului și 0 în rest. Aceste două elemente le putem alege în $C_{10}^2 = 45$ de moduri.

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.** $(\sigma\tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** Cum $\sigma^4 = e$, rezultă că $\sigma^{2009} = \sigma$. **4.** $x = \sigma^{-1}\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **5**. b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **6.** a) $\sigma^3 = e$; b) Deoarece $\sigma^{2009} = \sigma^{2007} \cdot \sigma^2 = \sigma^2$, rezultă că $x = \sigma^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **7.** a) Avem $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) Ecuația este echivalentă cu $x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **8.** Deoarece $m(\sigma_1) = 3$, $m(\sigma_2) = 4$, $m(\sigma_3) = 5$, rezultă că $\varepsilon(\sigma_1) = -1$, $\varepsilon(\sigma_2) = 1$ și $\varepsilon(\sigma_3) = -1$. **9.** a) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; b) $m(\sigma) = m(\sigma^{-1}) = 7$. **10.** $i = 8$, $j = 3$. **11.** a) Deoarece $A = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$, rezultă că ea are cinci elemente; b) Având în vedere că $m(\sigma) = 4$, deci $\varepsilon(\sigma) = 1$, obținem $\varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma) = 1$ și $\varepsilon(\sigma^3) = \varepsilon(\sigma^4) = \varepsilon(e) = 1$. **12.** a) $m(\sigma) = 9$; b) Dacă ecuația ar avea o soluție $x \in S_6$, atunci, cum $\varepsilon(x^4) = 1$ și $\varepsilon(\sigma) = -1$, ar rezulta că $1 = -1$, ceea ce este fals. Deci ecuația considerată nu are nicio soluție în S_6.

3.2. Matrice

1. 625. **2.** $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -11 & 18 \end{pmatrix}$, $A + A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. **3.** $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $X = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $a + b + c + d = -6$. **5.** $x = 2$, $y = 0$, $z = 3$. **6.** $B = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 2 & n^2 + n \\ -n & 0 \end{pmatrix}$. **7.** a) 3; b) $x = 2$. **8.** c) $(x, y) \in \{(0, 4), (1, 1), (4, 0)\}$. **9.** b) Să presupunem că există două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $I_2 = XY - YX$. Deoarece $\mathrm{tr}(XY - YX) = \mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(YX) = 0$, rezultă că $\mathrm{tr}(I_2) = 0$, ceea ce este fals. **10.** a) Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ două matrice din $G(a_1 > 0, a_2 > 0)$. Deoarece $AB = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $a_1a_2 > 0$, rezultă că

3.14. Regulile lui l'Hospital

1. a) $-\frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{12}$; c) 1; d) $-\frac{4}{3}$; e) 0; f) 0; g) $+\infty$; h) 1; i) 32 ln 2; j) –1; k) π; l) $\frac{3}{2}$; m) –2; n) 1; o) $\frac{1}{3}$; p) $\frac{1}{2}$; q) $-\frac{1}{2}$; r) 6. **2.** a) 0; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) –1; f) 1. **3.** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) 0; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{2}$. **4.** a) $\sqrt[3]{e}$; b) e; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) $\sqrt{2}$; e) e^2; f) 1. **5.** a) 1; b) 1; c) 1; d) $\frac{1}{e}$; e) 1; f) 1. **6.** a) 1; b) e; c) e; d) 1; e) 1; f) 1. **7.** a) Nu, deoarece nu există $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)'$; b) Avem

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = 1\text{, deoarece } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

3.15. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor

1. Cum $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$, $\forall\ x \in (0, +\infty)$, rezultă că funcția f este strict crescătoare, deci graficul său intersectează axa Ox în cel mult un punct. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = -\infty$ și $f\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, rezultă că graficul lui f intersectează axa Ox în $A(a, 0)$, cu $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$. **2.** Cum $f'(x) = e^x + 2x > 0$, $\forall\ x \in [0, 1]$, rezultă că f este strict crescătoare, deci minimul funcției este $f(0) = 1$, iar maximul este $f(1) = e + 1$. **3.** Vom folosi șirul lui Rolle. a) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$. Rădăcinile derivatei, $f'(x) = 6(x^2 - 2x)$, sunt 0 și 2. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 3$, $f(2) = -5$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, avem:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	–	+	–	+

Deci ecuația considerată are trei rădăcini reale: $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$, $x_3 \in (2, +\infty)$; b) $x_1 \in (\ln 2, +\infty)$; c) $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$; d) $x_1 \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $x_2 \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $x_3 \in (\sqrt{3}, +\infty)$. **4.** Avem: I. $m \in (-\infty, -2)$: o rădăcină, $x_1 \in (1, +\infty)$; II. $m = -2$: trei rădăcini, $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 \in (1, +\infty)$; III. $m \in (-2, 2)$: trei rădăcini, $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 \in (1, +\infty)$; IV. $m = 2$: trei rădăcini, $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 = x_3 = 1$; V. $m \in (2, +\infty)$: o rădăcină, $x_1 \in (-\infty, -1)$. **5.** Vom folosi șirul lui Rolle. Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 18x^2 - \ln x - m$. Evident, f este

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție

1. a) 1; b) Ecuația este $2^{x+x^2} = 2^6$, adică $x^2 + x - 6 = 0$ și de aici $x = 2$ sau $x = -3$; c) Avem că $(x \circ y) \circ z = 2^{2^{x+y}+z}$; din $2^{2^{x+y}+z} = 2^{z+1}$, rezultă că $2^{x+y} = 1$, deci $x + y = 0$. **2.** b) $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$; c) Prin inducție, $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + (n - 1) \cdot 11$, $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ și $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n = \frac{n(n+1)}{2} + 11(n - 1) < 1000$. Cum n este maxim, atunci $n = 34$. **3.** a) 0; b) Cum $x * x = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că $(x * x) * y = 3y^2 \geq 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$; c) Avem $a * 1 = a^2 - 4a + 3 = (a - 2)^2 - 1$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n + 1$ nu este pătrat perfect, luăm $a = 2 + \sqrt{n+1}$. Astfel, găsim o infinitate de valori ale lui $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru care $a * 1 = n \in \mathbb{N}$. **4.** a) Folosind faptul că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$, avem că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = (x + 4)(y + 4)(z + 4) - 4$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$; b) Observăm că $x \circ (-4) = (-4) \circ y = -4$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (numărul -4 este element absorbant pentru operația „$\circ$”). Atunci $(-1000) \circ (-999) \circ \ldots \circ 1000 = [(-1000) \circ \ldots \circ (-5)] \circ (-4) \circ [(-3) \circ \ldots \circ 1000] = x \circ (-4) \circ y = -4 \circ y = -4$; c) Ecuația se scrie sub forma $(x + 4)^4 - 4 = 12$. Cum $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $(x + 4)^2 = 4$, cu soluțiile $x_1 = -2$ sau $x_2 = -6$. **5.** b) Dacă $x, y \in I$, atunci $x + \sqrt{2} > 0$ și $y + \sqrt{2} > 0$, deci $x \circ y > -\sqrt{2}$, adică $x \circ y \in I$; c) Observăm că operația este asociativă. Atunci $\left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{13}}\right) = \left[\left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1}}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{9}}\right)\right] \circ \left(-\sqrt{2}\right) \circ \left[\left(-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{11}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{12}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{13}}\right)\right] = \left[a \circ \left(-\sqrt{2}\right)\right] \circ b = \left(-\sqrt{2}\right) \circ b = -\sqrt{2}$.

6. a) $(x + i)(y + i) - i = xy + ix + iy - 1 - i = x \circ y$; b) Demonstrăm inductiv, folosind a); c) Ecuația este $(x + i)^4 - i = 1 - i$, deci $(x + i)^4 = 1$, de unde $x + i \in \{-1, 1, i, -i\}$, adică $x \in \{-1 - i, 1 - i, 0, -2i\}$. **7.** a) $x \circ y = (x - 4)(y - 4) = y \circ x$; b) De exemplu, observăm că $2 \circ (3 \circ 4) = 8$, însă $(2 \circ 3) \circ 4 = 0$; c) Avem $(m - 4)(n - 4) = 7$, cu soluțiile $(m, n) \in \{(5, 11); (11, 5); (3, -3); (-3, 3)\}$. **8.** a) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$; b) $e = 0$; c) $x_1 = x_0\sqrt[3]{2}$, $x_2 = x_0\sqrt[3]{3}$, $x_3 = x_0\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **9.** b) $e = \frac{7}{2}$; c) Se demonstrează prin inducție matematică. **10.** a) Pentru orice $x, y \in (-\infty, 0)$, avem că $x * y \in (-\infty, 0)$, deci $*$ este lege de compoziție pe G; c) Fie $e \in G$ un eventual element neutru; atunci $\frac{xe}{x+e} = x$, $\forall\, x \in G$, sau încă $xe = x^2 + xe$, $\forall\, x \in G$, fals. Rezultă că legea nu are element neutru. **11.** a) Observăm că $x \circ y = e^{3\ln x \ln y} > 0$,

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

Testul 1

I. 1. 41. **2.** 5. **3.** $x = 2$. **4.** 4 elemente. **5.** $AB \perp d$ și mijlocul $M(-1, 4) \in d$. **6.** $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2$. **II. 1.** b) $A^{-1}(a) = B \Leftrightarrow A(a) \cdot B = I_3$. Rezultă $a = -4$; c) $X = C(A(-4))^{-1} = CB = (16 \quad 9 \quad -4)$. **2.** b) Dacă $x + i$ și $y + i \in M$, atunci $(x + i) * (y + i) = \dfrac{3(x+y)}{2} + i \in M$; c) $z = a - 3i$, $a \in \mathbb{R}$. **III. 1.** a) $\frac{1}{e}$; b) $A(0, 1)$ este punct de minim; c) Dreapta este tangentă graficului funcției f în punctul $M(1, e - 1)$. **2.** b) $\int_1^a \left(x^2 - f(x)\right)dx = \int_1^a \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = e$; c) Fie F o primitivă a lui f pe $(0, 1)$. Cum $F'(x) = f(x) > 0$ (deoarece $\ln x < 0$), rezultă că F este strict crescătoare pe $(0, 1)$.

Testul 2

I. 1. $\log_3 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} 3 = 3\log_3 2 \cdot 2\log_2 3 = 6 = (\sqrt{6})^2$. **2.** $f(\sqrt{2}) < 0$; $f(\sqrt{3}) < 0$; $f(\sqrt{5}) > 0$. **3.** $x = -1$ și $x = \frac{1}{2}$. **4.** $x \in \{6, 7\}$. **5.** $BH \perp AC$ și $CH \perp AB$. **6.** $x = \frac{\pi}{3}$. **II. 1.** b) $\det A \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; c) Pentru $a = 1$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluțiile $(7 - \alpha, 11 - 2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Obținem soluții formate din numere naturale pentru $\alpha \in \{0, 1, 2, ..., 5\}$, deci 6 soluții. **2.** c) Se verifică ușor că „$*$" este asociativă, are element neutru $e = 2$ și orice $x \neq 4$ este inversabil. Rezultă că $(\mathbb{R}, *)$ nu este grup. **III. 1.** a) 1; b) Fie că în $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ tangentele nu sunt secante, deci sunt paralele. Rezultă $f'(a) = f'(b) \Rightarrow a = b$, fals; c) Folosind șirul lui Rolle, ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții. **2.** b) $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{e^x}{(x+1)^2}\right)dx = \int_1^2 \left(\frac{e^x}{x+1} - \frac{e^x}{(x+1)^2}\right)dx = \int_1^2 \left(e^x \cdot \frac{1}{x+1}\right)' dx = \left.\frac{e^x}{x+1}\right|_1^2 = \frac{2e^2 - 3e}{6}$; c) Pentru $x \in [1, 3]$, $e^x \geq e$, deci $\int_1^3 f(x)dx \geq \int_1^3 \frac{e}{x+1}dx = e\ln(x+1)\Big|_1^3 = e \ln 2$.

Testul 50

I. 1. 1. **2.** $f(x) = x^2 - 4x + 4$. **3.** 2. **4.** 10. **5.** $x - y - 1 = 0$. **6.** $\frac{1}{4}$. **II. 1.** b) Pentru $a \neq 1$, $\text{rang}(A) = 3$, iar pentru $a = 1$ sau $a = -1$, $\text{rang}(A) = 2$; c) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **2.** a) -1; i; $-i$; b) $a + 3$; c) Rădăcină întreagă poate fi -1 sau 1. Rezultă $a = 1$ sau $a = -3$. **III. 1.** a) $f'(x) = e^x - e^{1-x}$, $x \in [0, 1]$; c) $\min f = 2\sqrt{e}$; $\max f = 1 + e$. **2.** a) Dacă F este primitivă a funcției f, atunci $F'(x) = f(x) > 0$; b) $\frac{16\pi}{3}$; c) 1.

Testul 51

I. 1. $z = \frac{-16}{169} \in \mathbb{R}$. **2.** 6. **3.** $x = 2$. **4.** A are 50 de elemente, 17 divizibile cu 3 și 6 divizibile cu 9. Probabilitatea cerută este egală cu $\frac{11}{50}$. **5.** $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 3(-4\vec{i} + 2\vec{j}) - 2(2\vec{i} + 2\vec{j}) = -16\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow$ $\Rightarrow M(-13, 4)$. **6.** Ecuația este echivalentă cu $2\cos^2 x - 1 = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Rezultă $x = 0$ sau $x = \frac{2\pi}{3}$. **II. 1.** a) -1; c) $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** a) Există $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ polinoame; b) $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}$, $f(\hat{2}) = \hat{0}$; $\hat{2}$ este singura rădăcină a polinomului f; c) g nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$ și grad $g = 3$, deci este ireductibil. **III. 1.** a) f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, +\infty)$; b) $\min f = \frac{1}{2}$, deci $f(x) \geq \frac{1}{2}$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$ și de aici rezultă concluzia problemei; c) $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **2.** a) $\ln(x + 2) - \ln(x + 1) + x + \mathcal{C}$; b) $\frac{1}{2} + \ln 2$; c) $\pi\left(\frac{9}{2} - 2\ln\frac{3}{2}\right)$.

Testul 52

I. 1. 189. **2.** $[-4, 0]$. **3.** $x \in \{-1, 0\}$. **4.** $T_7 = 2^6 \cdot C_9^6$. **5.** $a = 2$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **II. 1.** b) Sistemul este compatibil determinat cu soluția $(-8, -5, -5)$; c) Sistemul este compatibil nedeterminat cu soluția $\left(\alpha - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **2.** a) $a = 8$, $b = -6$; b) 1; 3; $\pm\sqrt{2}$; c) $a = -2$. **III. 1.** a) $f'(2) = 3\ln 2$; b) f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$, $A(0, 1)$ este punct de

b) $f'(x) = x \sin x \geq 0$ pe $[0, \pi]$; c) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ și f crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq$ $\leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **2.** b) $\frac{e^2+1}{2}$; c) Pentru $x \in [1, 2]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 0 \leq f^n(x) \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$, deci $0 \leq$ $\leq \frac{1}{3^n}\int_1^2 f^n(x)dx \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, limita cerută este egală cu zero.

Testul 60

I. 1. $a = 1$, $b = -5$. **2.** $f(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci f nu este surjectivă. **3.** $x \in \{-1, 1\}$. **4.** 1. **5.** $3x +$ $+ 2y + 7 = 0$. **6.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **II. 1.** b) 6. **2.** a) Rădăcini raționale ar putea fi 1 sau -1. Cum $f(1) \neq 0$ și $f(-1) \neq 0$, rezultă concluzia; b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, deci cel puțin o rădăcină nu este reală. Cum $f \in \mathbb{R}[X]$, f are cel puțin două rădăcini complexe, nereale. Cum $f(0) \cdot f(1) < 0$ și $f(1) \cdot f(2) < 0$ rezultă că f are două rădăcini reale, una în $(0, 1)$ și una în $(1, 2)$; c) Cum $x_1^4 - 4x_1 + 1 = 0$, rezultă că $x_1^3 - 3 = \frac{4x_1 - 1}{x_1} - 3 = \frac{x_1 - 1}{x_1}$ și atunci produsul $P = \frac{(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{f(1)}{f(0)} = -2$.
III. 1. a) Dacă $A(a, b)$, $b = f(a)$ este punctul de pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta $2y - x + 1 = 0$, rezultă că panta tangentei este egală cu panta dreptei, deci $f'(a) = \frac{1}{2}$, deci $a = \sqrt{3}$ sau $a = -\sqrt{3}$. Pentru $A\left(\sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$ tangenta are ecuația: $y -$ $- \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3})$; pentru $A\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$ ecuația tangentei este $y + \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} =$ $= \frac{1}{2}(x + \sqrt{3})$; b) 2; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \in (-1, 1)$; $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ și f descrescătoare pe $(-1, 1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) >$ $> f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **2.** c) $I_{n+1} + I_n = \int_1^2 \frac{x^n(x+1)}{(x+1)\sqrt{x}}dx = \int_1^2 x^{n-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{2n+1}x^{n+\frac{1}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{2n+1}\left(2^n \cdot \sqrt{2} - 1\right)$.

Testul 61

I. 1. $x_1^3 + x_2^3 = 18 \in \mathbb{Z}$. **2.** $x = -3$ și $x = 0$. **3.** $x \in \{2, 3, 4, 5\}$. **4.** $C_6^3 = 20$. **5.** $A'(6, 5)$. **6.** 4. **II. 1.** a) 0; c) $(A(x))^n = A(2^{n-1}x^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Rezultă $2^{2017}x^{2018} = x$, deci $x = 0$ sau $x = \frac{1}{2}$. **2.** a) $f(1) = 0$; b) $f =$ $= (x + 1)(2x^2 - (a + 2)x + 2)$ și are toate rădăcinile reale dacă $\Delta = (a + 2)^2 - 16 \geq 0$, deci $a \in (-\infty,$ $-6] \cup [2, +\infty)$; c) $f = (x + 1)(2x^2 - 3x + 2)$ și are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$ și $|x_1| = |x_2| =$ $= |x_3| = 1$. **III. 1.** a) $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$, f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și crescătoare pe $(1, \infty)$.

$A(1, 2)$ este punct de minim; b) Cum $2, 3 \in (1, \infty)$ și f este strict crescătoare pe $(1, \infty)$, rezultă că $f(2) < f(3)$ și de aici rezultă concluzia; c) Folosim șirul lui Rolle pentru funcția $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - m$.

x	0	1	$+\infty$
g'		0	
g	$+\infty$	$2 - m$	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$

Rezultă că $g(x) = 0$ are două rădăcini reale $x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (1, +\infty)$. **2.** a) f este continuă pe $[0, 2]$; b) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2x^2}\Big|_1^2 = \frac{7}{8}$;

c) Relația dată este echivalentă cu: $2\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = \frac{7}{8}$, deci

$2\int_0^a x\,dx = \frac{7}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{7}{8} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Testul 62

I. 1. 1. **2.** $P > 0$. **3.** $\frac{1+2a}{a+2}$. **4.** $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CE}$, deci $DC \parallel BE$. **5.** 5. **6.** 5. **II. 1.** a) 2; c) $x = 0$ sau $x = 2$. **2.** a) $f(1) = 0 \Rightarrow a = -1$; b) $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$ c) Trebuie demonstrat că f nu are rădăcini raționale neîntregi pentru $a \in \mathbb{Z}$. **III. 1.** a) $y = 1$; b) $f'(x) < 0$, pentru $x > 0$. **2.** b) Fie F o primitivă a funcției f, limita cerută va fi egală cu $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x) - F(0)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \frac{1}{2}$; c) $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^n \left(\sqrt{x^2+1}\right)' dx = x^n\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}\sqrt{x^2+1}dx = \sqrt{2} - n\int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$, deci $I_{n+1} = \sqrt{2} - n(I_{n+1} + I_{n-1})$.

Testul 63

I. 1. 36. **2.** $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. **3.** $x = 2$. **4.** $\frac{1}{9}$. **5.** C$(-1, 4)$. **6.** -3. **II. 1.** b) $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$; c) Sistemul este compatibil nedeterminat cu soluțiile: $\left(\frac{-1-8\alpha}{6}, \frac{1+2\alpha}{6}, \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $x + 4y = \frac{1}{2}$. **2.** a) -24; c) $(1, 2)$; $(-3, -2)$. **III. 1.** a) 0; b) $f'(x) = -e^{-x}(x-1)^2 \le 0$; c) $x \ge 0$, f descrescătoare $\Rightarrow$

Breviar teoretic

1. ALGEBRĂ

1.1. Formule de calcul prescurtat

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1.2. Sume remarcabile

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.3. Modulul unui număr real

Definiție. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți: 1) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
4) $|x : y| = |x| : |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$; 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; egalitatea are loc dacă și numai dacă $xy \geq 0$; 6) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, $a > 0$; 7) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $a > 0$.

1.4. Partea întreagă și partea fracționară

Definiție. *Partea întreagă* a unui număr real x este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x și se notează cu $[x]$. *Partea fracționară* (*zecimală*) a unui număr real x se notează cu $\{x\}$ și este definită astfel: $\{x\} = x - [x]$.
Proprietăți: 1) $[x] \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} \in [0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; 2) $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
3) $[x + k] = [x] + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; 4) $\{x + k\} = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

pentru f dacă $(X-a)^p$ divide f, dar $(X-a)^{p+1}$ nu divide f. Numărul $a \in \mathbb{C}$ este rădăcină multiplă de ordinul p pentru polinomul f dacă și numai dacă $f(a) = 0, f'(a) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(a) = 0$, dar $f^{(p)}(a) \neq 0$.

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$, având rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_k$ multiple de ordine $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$. Atunci descompunerea lui f în factori liniari este $f = a_n(X-x_1)^{\alpha_1}(X-x_2)^{\alpha_2}\ldots(X-x_k)^{\alpha_k}$, unde a_n este coeficientul dominant al lui f.

Polinoame cu coeficienți reali. Polinoamele ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt cele de gradul I și cele de gradul al II-lea care nu au rădăcini în $\mathbb{R}$. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$ și $z_0 = a + bi$, $b \neq 0$, este o rădăcină complexă a lui f, atunci și $\overline{z_0} = a - bi$ este rădăcină a lui f, iar cele două rădăcini au același ordin de multiplicitate. Orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe nereale. Orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

Polinoame cu coeficienți raționali. Dacă $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f \neq 0$ și $x_0 = a + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$) este o rădăcină a lui f, atunci și $a - \sqrt{b}$ este rădăcină a lui f, iar cele două rădăcini au același ordin de multiplicitate.

Polinoame cu coeficienți întregi. Dacă $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$ admite o rădăcină rațională $x_0 = \dfrac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$), atunci p divide termenul liber (adică $p \mid a_0$), iar q divide coeficientul dominant (adică $q \mid a_n$).

Relațiile lui Viète. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, $a_n \neq 0$, atunci au loc relațiile (lui Viète): $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$, …, $x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}$. Dacă numerele complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifică relațiile $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S_1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_{n-1}x_n = S_2$, …, $x_1x_2\ldots x_n = S_n$, atunci ele sunt rădăcinile polinomului $f = X^n - S_1X^{n-1} + S_2X^{n-2} + \ldots + (-1)^nS_n$.

2. GEOMETRIE

2.1. Punctul în plan

Considerăm un sistem cartezian ortogonal în plan și pentru orice punct P din plan notăm cu (x_P, y_P) coordonatele sale în raport cu sistemul ales. Lungimea segmentului AB este egală cu $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. Coordonatele punctului P, de pe segmentul AB, cu proprietatea că $\dfrac{PA}{PB} = k$

sunt: $x_P = \dfrac{x_A + kx_B}{1+k}$, $y_P = \dfrac{y_A + ky_B}{1+k}$. Coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

2.2. Vectori în plan

Fie $\left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}$ o bază ortonormată asociată unui reper cartezian ortogonal din plan. *Vectorul de poziție* al punctului $A(x_A, y_A)$ este $\overrightarrow{r_A} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$. Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$, adică $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$. Suma vectorilor $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$ este $(\vec{u}+\vec{v})(a+a', b+b')$. Produsul dintre vectorul $\vec{v}(a,b)$ și scalarul t este $(t\cdot\vec{v})(ta, tb)$.

Panta direcției vectorului $\vec{v}(a,b)$ este $m_{\vec{v}} = \dfrac{b}{a}$, iar a vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $m_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Condiții de paralelism (coliniaritate) pentru vectorii $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow (\exists)\, t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = t\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow m_{\vec{u}} = m_{\vec{v}}$.

2.3. Produsul scalar a doi vectori

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este numărul real:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}), & \text{dacă } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ și } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{, dacă } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ sau } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Dacă $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ și $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$, atunci $\vec{u}\cdot\vec{v} = aa' + bb'$. Condiții de perpendicularitate pentru vectorii $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$. Măsura unghiului dintre doi vectori nenuli se poate afla cu ajutorul formulei $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}}$.

2.4. Teoreme remarcabile în triunghi

Teorema lui Thales: Dacă M și N sunt puncte pe laturile AB, respectiv AC ale triunghiului ABC, atunci dreptele MN și BC sunt paralele dacă și numai dacă $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$.

Teorema bisectoarei: Semidreapta AD, $D \in (BC)$, este bisectoare a triunghiului ABC dacă și numai dacă $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Teorema lui Menelaus: Pe dreptele suport BC, CA, AB ale laturilor triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P (două puncte pe laturi și al treilea pe prelungirea laturii

Cuprins

Clasa a XII-a