

8

MATE[®]
2000⁺

consolidare

Anton Negrilă
Maria Negrilă

partea I

matematică

algebră • geometrie

Editura Paralela 45

Nume:

Prenume:

Clasă:

Școală:

--	--	--

--	--	--

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 5318/21.11.2019.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca

Tehnoredactare: Adriana Vlădescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

NEGRILĂ, ANTON

Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a /

Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Pitești : Paralela 45, 2026 – 2 vol.

ISBN 978-973-47-4465-7

Partea 1. – Pitești : Paralela 45, 2026. –

ISBN 978-973-47-4466-4

I. Negrilă, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2026

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebită plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul **aplicației MATE 2000+** este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!

Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

- * Inițiere (înțelegere)
- ** Consolidare (aplicare și exersare)
- *** Excelență (aprofundare și performanță)
- **** Supermate

Legendă

PE

= portofoliul elevului

PP

= portofoliul profesorului

PE-PP

= portofoliul elevului - portofoliul profesorului

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚIALĂ

PE TESTE CU EXERCII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE PENTRU PREGĂTIREA TESTĂRII ÎNȚIALE

TESTUL 1

1. Efectuați calculele:

a) $\sqrt{6} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{8} - \sqrt{27}$; b) $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{108} - \sqrt{75} - \sqrt{27})$; c) $\left(\frac{4}{\sqrt{50}} + \frac{3}{\sqrt{8}} \right) - \left(\frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $3(x+3) - 5(x+1) = 4(x+4)$; b) $|2x-3| = 5$; c) $\frac{4x-3}{3} - \frac{2x+1}{2} = 1\frac{1}{6}$;
d) $\sqrt{(x-2)^2} = \frac{1}{4}$; e) $(x+3)^2 = 25$.

3. Se consideră numerele $a = 2\sqrt{432} - 3\sqrt{75} - \sqrt{147}$ și $b = 3\sqrt{243} - 3\sqrt{108} - \sqrt{27}$. Calculați media geometrică a numerelor a și b .

4. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 17 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3(2x+y) - 2(x+2y-5) = 20 \\ 5(x-y+2) = 4(2x-y+3) - 13 \end{cases}$.

5. Se consideră punctele $A(-2; -3)$, $B(1; 3)$ și $C(3; 7)$.

- a) Reprezentați punctele într-un sistem de axe de coordonate.
- b) Arătați că punctele A , B și C sunt coliniare.
- c) Determinați coordonatele punctului M , mijlocul segmentului BC .

6. O persoană constată că după ce a cheltuit 25% din suma pe care a avut-o și încă 20% din restul rămas, mai are în portofel 252 de lei. Ce sumă a avut inițial?

7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $\angle A = 90^\circ$ și $\angle C = 30^\circ$. Știind că mediana $AM = 10$ cm, $M \in BC$, calculați:

- a) perimetrul triunghiului ABC ;
- b) valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ABC}}$, unde D este piciorul înălțimii duse din A pe ipotenuza BC .

8. În cercul de centru O și rază $R = 8$ cm se construiește diametrul AB și o coardă CD , astfel încât $AB \cap CD = \{E\}$. Știind că $\angle BDC = 60^\circ$, calculați aria triunghiului AOC .

ALGEBRĂ

Capitolul I

INTERVALE DE NUMERE REALE.

INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

PP Competențe specifice

- C1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- C2. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- C3. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$
- C4. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- C5. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- C6. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații



O propoziție cu o variabilă care conține în scrierea sa unul dintre semnele: $\geq$, $\leq$, $>$ sau $<$ este o **inecuație**. Litera care apare ca variabilă se numește **necunoscută**.

Atribuind variabilei diverse valori, se obțin propoziții adevărate sau false. Numerele pentru care propoziția este adevărată se numesc **soluții** ale inecuației.

A rezolva o inecuație înseamnă a afla toate soluțiile acesteia, care sunt cuprinse în **mulțimea soluțiilor**.

Două inecuații sunt **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

OBSERVAȚIE:

În rezolvarea inecuațiilor se folosesc următoarele proprietăți ale inegalităților între numere:

- dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$ și $a - c < b - c$;
- dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ și $a : c < b : c$;
- dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$ și $a : c > b : c$;
- dacă $b < a$, se poate scrie și $a > b$.

Aceleași proprietăți sunt valabile și dacă înlocuim $<$ cu semnul $\leq$, iar semnul $>$ cu $\geq$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aflați ce elemente ale mulțimii A sunt soluții ale următoarelor inecuații:

- a) $2(x+3) \leq 8$; b) $3x - 2(x+1) \leq -3$; c) $2|x| + 3 \leq 5$; d) $3x + 2 \geq 5$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $4x - 10 < 30$; b) $6x - 12 \leq 30$; c) $-3x + 7 \geq -5$;
 d) $-3x + 2 \geq -7$; e) $2x + 1 \leq 11$; f) $-5x + 4 \leq -16$;
 g) $6x + 11 < -7$; h) $7x - 12 \geq 30$; i) $2x - 5 \leq 7$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $2(x+3) < x-5$; b) $3(x-2) > 2(x+1)$; c) $2(x-4) \geq 3(x-1)$;
 d) $3(x-2) \geq x+8$; e) $7x+4 < 3(x+8)$; f) $5(x+1) \leq 3(x+3)$;
 g) $3(x-1) > 2x+9$; h) $6(x-1) > 4(x+2)$; i) $7(x+3) \leq 5(x-1)$.

4. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care inecuațiile sunt adevărate:

- a) $\frac{3}{x-1} < 0$; b) $\frac{-2}{x+2} > 0$; c) $\frac{-5}{3x+1} < 0$;
 d) $\frac{7}{2x-5} > 0$; e) $\frac{-1}{3x+7} \leq 0$; f) $\frac{4}{2x-1} \geq 0$;
 g) $\frac{-8}{-5x+1} > 0$; h) $\frac{-2}{-3x+5} \leq 0$; i) $\frac{-7}{-x+4} \geq 0$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $4(x+3) < 3x+7$;

c) $6(x-3) - 10 \leq 2(2x+1)$;

e) $3(x-1) - 6 < 2(x+7)$;

g) $6(x-2) + x \leq 5(x+4)$;

b) $8(x+2) < 5x+4$;

d) $5(2x-3) - 3(x+1) > 4(x-9)$;

f) $5(x-1) - 3 < 3(x+4)$;

h) $4(x+3) - 9 \leq 3(x-1)$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $3(2x-1) - 15 \leq x+32$;

c) $19x+22 > 4(3x+4) + 13$;

e) $5x-2(x+7) \leq 5(2x+5) + 3$;

b) $4(3x+2) - 14x > 69 - 3(2x+3)$;

d) $7x-9(2x+3) < 4(3x+8) - 13$;

f) $5(3x-2) - 7(2x-5) > 46 - 20x$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $\frac{x-1}{3} + \frac{2x-5}{2} \leq \frac{3x-2}{6}$;

c) $\frac{3x-1}{4} + \frac{2x-5}{3} < \frac{7x-11}{12} + 1\frac{1}{2}$;

e) $\frac{x+4}{5} - x + 5 \leq \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$;

b) $\frac{x-3}{5} + \frac{3x-4}{2} \leq \frac{5x-2}{10}$;

d) $\frac{5x+1}{6} + \frac{3x-1}{5} < \frac{9x+1}{15} - \frac{1-x}{3} - \frac{8}{30}$;

f) $\frac{2x-1}{2} + \frac{4x-3}{4} + \frac{8x-2}{6} \leq 2x - \frac{17}{4}$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $5x+8 \geq 5(x+1) + 3$;

c) $2(x+3) \geq 4(x-1) - 2(x-5)$;

e) $5(x-3) \leq 3x+2(x-7)$.

b) $2(x+1) < 2(x-1) + 4$;

d) $2(x-7) + 5 < 7(x-2) - 5(x-4)$;

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $\frac{9-5x+2(x+3)}{-3} < 2$;

c) $\frac{2(1-x)+3x-5}{-2} < 1$;

b) $\frac{3(x-4)-5(x+4)}{-2} \leq 3$;

d) $\frac{3-5x+2(3x+1)}{-4} < 2$.

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

10. Rezolvați inecuațiile:

a) $3(x+5) + 2|3x-1| + 2x-7 < 5(x+1) + 9, x \in \mathbb{N}$;

c) $4(x+1) - 2|2x+3| - 2(x+1) > 2(x-2), x \in \mathbb{Z}$.

b) $5(x+2) - 3|2x+5| + 2(x+3) \geq 7(x+3) - 14, x \in \mathbb{Z}$;

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $(x^2+5)[2(x+3) - (x+5)] \leq 0$;

c) $|x+3| \cdot [5(x-7) - 3(x-11)] \geq 0$;

e) $(x^4+x^2+2)[3(x-5) - 5(x-1)] \leq 0$;

g) $(2x^2+3)[3(x-1) - x+5] < 0$.

b) $(x+1)^2[5(x-3) - 7(x-5)] < 0$;

d) $(x^2+1)(2x-7) > 0$;

f) $(4+|x|)(3x\sqrt{2}-2) < 0$;

12. Rezolvați inecuațiile în $\mathbb{R}$:

a) $|x+2| \cdot (|x-1|-3) \leq 0;$

b) $|x-2| \cdot (4-|x+3|) \geq 0;$

c) $|x+1| \cdot (|2x+3|-3) < 0;$

d) $|x-3| \cdot (5-|x+1|) > 0;$

e) $|x-\sqrt{3}| \cdot (|x-2|-1) < 0;$

f) $\frac{5-|2x+3|}{|x-1|} \geq 0.$

13. Determinați valorile reale ale lui x pentru care inecuațiile următoare sunt adevărate:

a) $|x+5| \cdot (|x-3|-2) \leq 0;$

b) $|x-1| \cdot (|x-2|-3) < 0;$

c) $|x+1| \cdot (3-|x+2|) > 0;$

d) $\frac{|x-3|}{|x-1|-4} < 0;$

e) $\frac{3-|x-4|}{|x-2|} \geq 0.$

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $\sqrt{5}(x+1) - 7 < 7x;$

b) $x\sqrt{3}-4 < 4x-\sqrt{3};$

c) $2(x+\sqrt{2})-\sqrt{50} < \sqrt{2}(2x-3)-4;$

d) $2(2-\sqrt{2}) \leq 2\sqrt{2}(x-7);$

e) $2x\sqrt{4-2\sqrt{3}}+x\sqrt{7-4\sqrt{3}} \leq \sqrt{(\sqrt{3}-5)^2}-\sqrt{(1-2\sqrt{3})^2}.$

15. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x+3 < \frac{2x+13}{3} < x+5\right\}.$

16. Determinați $x \in \mathbb{Z}^*$ pentru care $\frac{3(x-2)+5}{2} < x+2 < \frac{4(x+3)+1}{3}.$

17. Determinați $x \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{2x+5}{4} < x < \frac{3x+13}{6}.$

18. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid x-1 < \frac{3x+7}{4} < x+2\right\}.$

19. Calculați $A \cap B$, unde:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x-2 < \frac{2x+3}{7} < x+3\right\} \text{ și } B = \left\{x \in \mathbb{Z}^* \mid x-1 < \frac{4x+1}{3} \leq x+2\right\}.$$

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\frac{2x+3}{2} \leq \frac{3(x+3)}{5} < \frac{4x+13}{6}.$

PE-PP SUPERMATE ◆ ◆ ◆ ◆

21. Determinați mulțimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x-2| \cdot (|x-\sqrt{2}|-2) < 0\right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid |x-2| \cdot (|x-\sqrt{5}|-1) < 0\right\}.$

22. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $(x-3)[5(x+5)-6(x+3)] \geq 0;$

b) $(x-2)[3(x+1)-5(x-2)] \geq 0;$

c) $\left(1+\frac{x+5}{x-2}\right)\left(1+\frac{x-5}{3}\right) > 0;$

d) $\left(2+\frac{x+7}{x+1}\right)\left(1+\frac{x-3}{4}\right) > 0;$

e) $\left(\frac{x}{3}-2\right)\left(1-\frac{x}{5}\right) \geq 0;$

f) $\left(\frac{2x}{5}-1\right)\left(\frac{x}{2}-3\right) \leq 0.$

- Timp de lucru 50 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

TESTUL 1

(20p) 1. Rezolvați inecuațiile:

a) $4x - 5 \leq 3x - 2, x \in \mathbb{N};$

c) $2|x - 1| + 3x \leq 3(x + 2), x \in \mathbb{N}^*;$

b) $7x + 9 > 3x - 7, x \in \mathbb{Z}_-;$

d) $3|x + 2| - 2x \leq 2(2 - x) + 5, x \in \mathbb{Z}_-.$

(20p) 2. Rezolvați inecuațiile:

a) $4(x + 1) + |x + 4| < 2(2x + 3), x \in \mathbb{Z};$

c) $|x + 1| \leq 3, x \in \mathbb{Z}^*;$

b) $|x - 4| \cdot (|x - 2| - 3) < 0, x \in \mathbb{Z};$

d) $x\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \leq 3\sqrt{5} - 6, x \in \mathbb{N}^*.$

(10p) 3. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x + 4 > \frac{2x + 10}{3} > x + 2 \right\}.$

(20p) 4. Fie $x \in \mathbb{Z}$. Determinați valorile lui x pentru care $(3x^2 + 2) \cdot (|x - 2| - 1) \leq 0$.

(20p) 5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{5 - |2x + 1|}{|x^2 - 1|} \geq 0$.

TESTUL 2

(20p) 1. Rezolvați inecuațiile:

a) $5x + 7 \leq 3x + 11, x \in \mathbb{N}^*;$

c) $8x - 7 \geq 5x - 19, x \in \mathbb{Z}_-;$

b) $6x + 11 \geq 4(x + 2) + 13, x \in \mathbb{R};$

d) $3|2x - 1| + 5x \leq 5(x + 5) + 2, x \in \mathbb{N}^*.$

(20p) 2. Rezolvați inecuațiile:

a) $\sqrt{3}x + 2 \leq 2x + \sqrt{3}, x \in \mathbb{R};$

c) $|x - 3| \cdot (|x + 1| - 5) < 0, x \in \mathbb{R};$

b) $3(x + 7) + |x + 4| < 3(x + 9), x \in \mathbb{R};$

d) $|x - 2| \leq 4, x \in \mathbb{Z}^*.$

(10p) 3. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x + 7 < \frac{3x + 5}{2} < x + 8 \right\}.$

(20p) 4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $3(x + 2) - 2|x - 3| > x + 2(x + 1)$.

(20p) 5. Determinați mulțimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z}^* \mid |x^2 - 1| (|x - \sqrt{3}| - 4) < 0 \right\}.$$

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

PP

Competențe specifice

- C₁. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- C₂. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- C₃. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- C₄. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- C₅. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- C₆. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

A. OPERAȚII CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

DEFINIȚIE: Se numește **expresie algebrică** o succesiune de numere și/sau litere legate între ele prin operații aritmetice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere).



EXEMPLE: $7, x, 7x, 7\sqrt{3}x, 7\sqrt{3}x - 8y^2$.

OBSERVAȚII:

- Cea mai simplă expresie algebrică obținută doar prin înmulțire cu numere și/sau litere se numește **termen** al expresiei algebrice.

EXEMPLE: $7, x, xy, 8z^2y^3$.

- Numărul care apare în scrierea unui termen al unei expresii algebrice se numește **coeficientul** termenului.

EXEMPLE: $-7xy^2$ are coeficientul -7 , $18\sqrt{3}x^2z$ are coeficientul $18\sqrt{3}$, $-0,(7)zt^2$ are coeficientul $(-0,(7))$.

- Literele care intră în scrierea unui termen alcătuiesc **partea literală** a sa.

EXEMPLE: $-81x$ are partea literală x , $-8x^2y^3z$ are partea literală x^2y^3z .

- Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleași **operații** care se efectuează cu numerele reale: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Aceste operații au **aceleași proprietăți** pe care le au operațiile cu numere reale.

PE-PP 1. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

DEFINIȚIE: Se numesc **termeni asemenea** acei termeni care conțin aceeași succesiune de litere la aceiași exponenți.

EXEMPLE: a) $-3x + 9 + 6x$, termenii asemenea sunt $-3x$ și $6x$;

b) $7\sqrt{5} + 11a - 7x^3z + 2\sqrt{5} + \frac{3}{5}x^3z$, termenii asemenea sunt $7\sqrt{5}$ și $2\sqrt{5}$, respectiv $-7x^3z$ și $\frac{3}{5}x^3z$.

OBSERVAȚII:

- **Adunarea sau scăderea** a doi termeni asemenea este operația prin care se obține un termen asemenea cu cei inițiali, iar coeficientul noului termen se obține efectuând operațiile algebrice indicate asupra celor doi coeficienți ai termenilor inițiali.

- **Operațiile** de adunare și scădere efectuate cu **termeni asemenea** se numesc operații de **reducere** a termenilor asemenea.

EXEMPLE: i) $7x + 5x = 12x$; ii) $-7xy + 2xy = -5xy$; iii) $-3x^2 - 8x^2 = -11x^2$.

- O **expresie algebrică** este considerată a fi scrisă în **forma canonică** dacă nu conține termeni asemenea.

- **Produsul** dintre un număr real și o expresie algebrică se efectuează înmulțind acest număr cu fiecare coeficient al termenilor ce compun expresia algebrică, cu respectarea regulilor de calcul cu numere reale.

EXEMPLU:

$$3(2x^2 - 5x + 5) - (4x^2 + 3x + 3y) - 4(x + y) = \underline{6x^2} - \underline{15x} + 15 - \underline{4x^2} - \underline{3x} - \underline{3y} - \underline{4x} - \underline{4y} = 2x^2 - 22x - 7y + 15.$$

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Efectuați:

a) $4x - 3x + 5x$;

b) $7x^2 - 3x^2 + 3x^2$;

c) $2ab - 5ab$;

d) $9x^2 - 11x^2 - 9x^2$;

e) $-4,2y - 1,8y$;

f) $0,3a - 0,7a$;

g) $\frac{2}{7}a^2 - \frac{3}{7}a^2 - \frac{a^2}{7}$;

h) $\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x$;

i) $2\sqrt{5}xy - 7\sqrt{5}xy$;

j) $8abc - 11abc$;

k) $y^2 + 13y^2 - 5y^2$;

l) $4x^2y^2 - 7x^2y^2 + 3x^2y^2$.

2. Reduceți termenii asemenea:

a) $7x + 2y - 4z - 5x + 6y + 3z$;

b) $3a - 9b + 2a + 7b - 4a - 5b$;

c) $8x - 3y - 5z - 9x - 4y + 3z$;

d) $13x^2 - 2x + 4x^2 - 11x - 15x^2 + 13x$;

e) $17xy - 21x^2y - 12xy + 23x^2y - 2x^2y$;

f) $7x - 9 - 11x + 12 + 4x$.

3. Scrieți în spațiul punctat termenul corespunzător obținerii unei propoziții adevărate:

a) $18x - 16x + \dots + 5x = 24x$;

b) $16x - 23x + \dots + 6x = 18x$;

c) $10a + 14a - \dots + 12a = 15a$;

d) $4x^2 - 5x^2 + \dots + 18x^2 = 0$;

e) $11xy - 7xy + \dots - 8xy = 21xy$.

4. Scrieți în spațiul punctat termenii corespunzători obținerii unei propoziții adevărate:

a) $3x^2 - 9a + 7x^2 + \dots = 12a + 5x^2$;

b) $7xy + 9x^2 - 3x + \dots + xy - 4x^2 = 2x^2 + 5xy$;

c) $4x + 18x - 13 + \dots = -6x$;

d) $4x - 7xy^2 - 9x + 5xy^2 + \dots = 0$.

5. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $(2x^2 - 7x) + (6x - 3x^2)$;

b) $(2a - 5b) + (-6a + 3b)$;

c) $(x^2 + x + 3) - (2x^2 + x - 5)$;

d) $(6x^2 - 3x + 4) - (4x^2 - 3x + 5)$;

e) $(4x - 3a) + (5x + 6a) - (8x - 5a)$;

f) $(4a + 3b - 5) - (2a + 3b) + (a + 5)$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

6. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $-13x - 15y + 9x - (19x + 3y - 12x) + 7y$;

b) $(5x - 8y) - (11x + 3y) - (-13x - 5y)$;

c) $(4x^2 - 3y + 2x) - (4x + 6y - 5x^2) - (9x^2 - 7y - 3x)$;

d) $(3a + 4b - 2c) + (-5a - 6b + 4c) - (4a - 7b - 5c)$;

e) $(5x - 3a + 2b) - (4x - 5a + 6b) - (7a - 6x - 5b)$.

7. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $2(3a - 4b) - 3(a - 2b) + 4(-2a + 3b)$;

b) $4(3x + 2y) - 5(2x - 3y) + 3(-4x - 5y)$;

c) $-3(x^2 - 2) + 6(x^2 - 1) - 4(x^2 + 3) + 2(x^2 - 4)$;

d) $3(5x - 2y) - 5(2x + y) + 2(-3x - 4y) - 4(-x - 3y)$;

e) $3(4a + 5b) - 5(2a + 3b) - 4(3a + 4b) + 2(-a - 2b)$.

8. Efectuați calculele și reduceți termenii asemenea:

a) $2(3a + 9b - 7c) - 3(4a + 5b + 9c) - 5(a + 2b - 8c)$;

b) $4(2x^2 - 3x + 4) - 3(3x^2 - 4x - 2) + 2(x^2 - 2x - 10)$;

c) $5(3x^2 - 5x + 6) - 4(5x^2 - 6x + 7) - 3(-x^2 + 2x - 2)$;

d) $6(-x^2 - 3x + 5) - 7(2x^2 - 4x + 6) + 5(5x^2 + 2x - 1)$.

9. Efectuați calculele și reduceți termenii asemenea:

a) $2(3x^2 - 2x - 5) - 3(4x^2 - 2x - 7) - 4(2x^2 + x + 3)$;

b) $3(2x^2 - x + 4) - 4(3x^2 - 2x + 5) - 2(x^2 + 7x - 3)$;

c) $2(6x^2 - 5x + 4) - 3(4x^2 - 3x + 5) - 4(2x^2 + 3x - 4)$.

10. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

- a) $3(4x - 3y + 2z) - 2(3x - 2y - 3z) - 4(x + 3y + 2z);$ b) $2(3x - 2y - 5z) - 3(4x - 2y - 7z) - 4(2x + 3y + 3z);$
 c) $4(5x - 6y + 3z) - 3(6x - 5y + 4z) - 2(3x + 4y - 5z).$

11. Efectuați:

- a) $8\sqrt{3a} + 12\sqrt{3a} + 3\sqrt{3a} - 15\sqrt{3a} - 25\sqrt{3a};$ b) $9\sqrt{2x} + 13\sqrt{2x} - 18\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 10\sqrt{2x};$
 c) $4\sqrt{5xy} - 7\sqrt{5xy} + 14\sqrt{5xy} - 9\sqrt{5xy} + 2\sqrt{5xy};$
 d) $5\sqrt{6x^2y} - 14\sqrt{6x^2y} + 19\sqrt{6x^2y} - 23\sqrt{6x^2y} + 8\sqrt{6x^2y}.$

12. Reduceți termenii asemenea:

- a) $5\sqrt{3x^2} + 4\sqrt{2x^2} - 3\sqrt{3x^2} - 6\sqrt{2x^2};$ b) $\sqrt{3a} + \sqrt{27a} - 5\sqrt{2b} + \sqrt{8b} + \sqrt{72b};$
 c) $\sqrt{12x^2} - \sqrt{32a^2} - 4\sqrt{3x^2} + \sqrt{50a^2};$ d) $(\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{8x} - 3x - (\sqrt{2} + 4)x.$

13. Dacă $E_1 = 4x^2 - 3x + 3$, $E_2 = 7x^2 + 6x - 5$ și $E_3 = 9x^2 - 5x + 2$, calculați:

- a) $E_1 + E_2 + E_3;$ b) $E_1 - E_2 - E_3;$ c) $E_1 + E_2 - E_3;$ d) $E_1 - (E_2 + E_3).$

14. Dacă $E_1 = 7x^2 - 5x + 8$, $E_2 = 4x^2 + 6x - 9$ și $E_3 = 3x^2 - 2x - 4$, calculați:

- a) $E_1 - (E_2 + E_3);$ b) $E_2 - (E_1 - E_3);$ c) $E_2 - E_1 + E_3;$ d) $E_3 - (E_1 - E_2).$

15. Efectuați calculele:

- a) $2(y + 3x) - [7x - (3x + 5y)];$ b) $3(y - 2x) + [4x - 3y + 2(x - y)];$
 c) $4x + 5y - [5x + 11y - 3(2x + 3y)];$ d) $6x - 7y - [4x + 5y - (9x + 10y)].$

16. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

- a) $35x - 5[4xy - 5x - 3(xy - 4x)];$ b) $12a - 3[6a - 7b + 2(-a + 3b)];$
 c) $-3x^2 - 3[2(x^2 - 5) - 3(x^2 - 2)];$ d) $25x + 2[3x^2 - 5x - 2(-x^2 + 3x)] - 10x^2;$
 e) $8y - 4[2(x + 3y) - 5(x + y)] - 12x.$

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ♦ ♦ ♦

17. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

- a) $3(2x^3 - 5x^2 + 4x - 7) - 2(4x^3 - 6x^2 - 5x + 3) - 4(-x^3 + 2x^2 + 3x - 6);$
 b) $2(3x^3 - 7x^2 + 6x - 5) - 3(5x^3 - 3x^2 + 7x - 4) - 4(-2x^3 - x^2 + 3x + 2);$
 c) $4(4x^3 - 5x^2 - 3x - 2) - 3(3x^3 - 4x^2 - 5x - 6) - 2(2x^3 - 3x^2 - 4x + 5).$

18. Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{3}(\sqrt{3x} - 2\sqrt{3y} + 3\sqrt{3}) - 2\sqrt{2}(3\sqrt{2x} - 3\sqrt{2y} - 5\sqrt{2});$
 b) $\sqrt{18}(2\sqrt{3x^2} - 3\sqrt{2x} + 5\sqrt{2}) - \sqrt{12}(3\sqrt{2x^2} - 2\sqrt{3x} + 4\sqrt{3});$
 c) $\sqrt{3}\left(\sqrt{8\frac{1}{3}x} + \sqrt{16\frac{1}{3}y}\right) + 2\sqrt{2}\left(\sqrt{12\frac{1}{2}x} - \sqrt{24\frac{1}{2}y}\right);$
 d) $\sqrt{3x}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{2x}\left(2\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{5x}\left(\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$

19. Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{3}(2\sqrt{3} - x) + \sqrt{6}(3\sqrt{2x} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}(3 - x\sqrt{6});$ b) $\sqrt{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{6x}) + \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 2x) + \sqrt{6}(\sqrt{2x} - \sqrt{6});$
 c) $\sqrt{27}(2\sqrt{3x} - \sqrt{3}) + \sqrt{3}(2\sqrt{3} + 6x) - \sqrt{108}(x - \sqrt{3}).$

20. Calculați:

- a) $2x\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - x\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} + 3x\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$; b) $2xy\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2} + xy\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2} - \sqrt{12}xy$;
 c) $x^2\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + x^2\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2} - x^2\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

21. Se consideră expresiile: $A = 3x - 2 + a^2$, $B = 6 + 5x - 8a^2$ și $C = 13 - 11x + 3a^2$. Calculați:

- a) $A + B - C$; b) $A - B + 2C$; c) $A + B + C$;
 d) $2A + (2B - 3C)$; e) $-2A + (3B - C)$; f) $(2A - 3B) + (2B - 3C)$.

22. Dacă $4x + 5y = 21$ și $5x + 4y = 15$, calculați:

- a) $8x + 8y$; b) $4x - 4y$; c) $10x + 8y$;
 d) $8x + 10y$; e) $2x + 7y$; f) $-7x - 2y$.

23. a) Determinați valorile lui a pentru care numărul A să fie natural, unde:

$$A = a\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + a\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} - a\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}.$$

b) Se consideră numărul $n = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}a - \frac{6}{\sqrt{3}}a\right) - 6\left(\frac{2}{\sqrt{18}}a - \frac{15}{2\sqrt{75}}a\right)$, $a \neq 0$. Determinați a , astfel încât n să fie cel mai mic număr natural posibil.

c) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sqrt{2a+b-8} + \sqrt{a-2\sqrt{2}} = 0$. Arătați că numărul:

$$E = 6a + 3b - 8 \text{ este un pătrat perfect.}$$

PE-PP SUPERMATE ♦ ♦ ♦ ♦

24. Determinați numerele raționale a și b , astfel încât $\sqrt{3}a + 2a - 2\sqrt{3}b - 2b = -1$.

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sqrt{2a+3b-17} + \sqrt{2a-8} + \sqrt{5a-2b+7c} = 0$. Calculați valoarea expresiei $E = (3a + 5b + 14c)^{2019}$.

26. Se dă $E(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{5}\right\}$. Dacă a și b sunt două numere raționale pentru care $E(a) \cdot (5a+7) + b\sqrt{3} = \sqrt{3}$, calculați valoarea lui $n = (16a + 23b)^{2k+1}$, unde $k \in \mathbb{N}$.

27. Dacă a și b sunt două numere întregi pentru care $\frac{a}{2-\sqrt{3}} + \frac{b}{2+\sqrt{3}} = 6 - \sqrt{3}$, arătați că numărul

$$p = \frac{5a-3b}{3a-2b} \text{ este număr natural.}$$

PE-PP 2. ÎNMULȚIREA ȘI ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

Prin **înmulțirea** a doi termeni ai unei expresii algebrice, **nu neapărat asemenea**, obținem un nou termen ce are: **coeficientul** egal cu produsul coeficienților celor doi termeni, **partea literală** formată din fiecare literă a celor doi termeni, luată o singură dată, iar ca **exponent** fiecare literă are **suma** exponenților pe care i-a avut în termenii dați.

EXAMPLE: $7x \cdot (-3xy) = -21x^2y$; $(-4xyz) \cdot (-6x^2yz^3) = 24x^3y^2z^4$.



A **descompune** o expresie algebrică în factori înseamnă a scrie expresia respectivă ca un **produs** de alte expresii care nu se mai pot descompune.

DEFINIȚIE: **Expresia algebrică** formată din **produsul** celui mai mare divizor comun al coeficienților cu **partea literală comună** la cel mai mic **exponent**, desprinsă din termenii expresiei algebrice date, se numește **factor comun**.

6.1. METODA FACTORULUI COMUN

Metoda factorului comun constă în scoaterea din expresia algebrică a factorilor comuni ai termenilor ce alcătuiesc expresia dată.

Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și simetria egalității, avem:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

EXEMPLE:

a) $5x + 35xy = 5x(1 + 7y)$; b) $3\sqrt{5} + 5 = \sqrt{5}(3 + \sqrt{5})$; c) $4x(3m + 1) - 5y(3m + 1) = (3m + 1)(4x - 5y)$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ♦

1. Scoateți factorul comun în următoarele situații:

a) $3x + 6y$;

b) $5x + 5y - 5z$;

c) $2x - 4y + 10z + 12t$;

d) $3x + 3y - 9$;

e) $3x^2 - 6xy + 9y^2$;

f) $7a^2b - 14ab^2 + 21a^2b^2$;

g) $8x^4 + 16x^2 - 24x + 40x^3$;

h) $40x^3y^2 + 30x^2y^2 - 50x^2y^3$.

2. Scoateți factorul comun:

a) $3x(x - 2) - 4(x - 2)$;

b) $5(2x - 3) - x(2x - 3)$;

c) $4a(x + 7) - 3b(x + 7)$;

d) $3a(x + 5) - 2(x + 5)$;

e) $7x(x + 1) - 5y(x + 1)$;

f) $-3a(y + 3) + 6b(y + 3)$;

g) $(a + 2)(x + 2) + 3a(x + 2)$;

h) $(x + 2)(x - 3) + (x + 2)(2x + 1)$;

i) $(x + 1)(5x + 6) - (5x - 7)(x + 1)$;

j) $(2x - 3)^2 - 4(2x - 3)$.

3. Scoateți factorul comun:

a) $24x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 18x^3$;

b) $10xy^2 - 15x^2y + 35x^2y^2 - 20xy$;

c) $-14a^2b + 28ab^2 - 35a^3b^2 - 56a^3b^3$;

d) $12x^3y^4z^2 + 20x^4y^3z^5 + 28x^3y^6z^3 - 16x^3y^5z^4$;

e) $72x^2 - 18x^4 + 36x^3 - 54x^5$;

f) $36x^3y^3z^3 - 27x^4y^2z^3 - 63x^3y^3z^4$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ♦ ♦

4. Descompuneți în factori, scoțând factorul comun:

a) $2x(x + 1) - 5(x + 1)$;

b) $4(2x + 3) - x(2x + 3) + (2x + 3)(x + 1)$;

c) $6x(3x - 7) + 5(3x - 7)$;

d) $14x(2x - 1) - 7(2x - 1)$;

e) $10x(x + 6) + 5(x + 6)^2$;

f) $12(x - 3)^2 + 6x(x - 3)$;

g) $21x(3x - 1) - 7(3x - 1)^2$;

h) $24x(4x + 3) - 8(4x + 3)^2$;

i) $(2x + 5)[3(x - 2) - 2(x - 4)] + 2(2x + 5)$.

5. Descompuneți în factori prin scoaterea factorului comun:

- a) $3x(x-2) + (x-2)^2 - 5(x-2)$; b) $(x-1)(x-2) + 4(x-1)^2 - 4x(x-1)$;
 c) $(x-4)(3x+7) - (x-4)(4x+2) + 3(x-4)$; d) $(2x+1)^2 - (3x-2)(2x+1) + 3x(2x+1)$;
 e) $(4x+5)(3x+2)^2 - (3x+2)^3 + 2(x+4)(3x+2)^2$; f) $(5x-3)(3x+4) - 2(3x+4)^2 + 3x(3x+4)$.

6. Scoateți factorul comun:

- a) $3\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}x^3 - 5\sqrt{3}x^4$; b) $5\sqrt{2}x^4 + 3\sqrt{2}x^5 + 6\sqrt{2}x^3 - 7\sqrt{2}x^6$;
 c) $2\sqrt{3}x^2y - 4\sqrt{3}xy^2 + 8\sqrt{3}x^2y^2 + 12\sqrt{3}x^3y$; d) $5\sqrt{3}x^3 - 2\sqrt{3}x^4 + 8\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{3}x^5$.

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

7. Scoateți factorul comun:

- a) $\sqrt{32}x^2y^2 - \sqrt{50}x^3y^2 + \sqrt{72}x^2y^3 - \sqrt{200}x^3y^3$; b) $\sqrt{150}x^4y^2 - \sqrt{24}x^2y^4 + \sqrt{96}x^3y^3$;
 c) $\sqrt{80}x^6 - \sqrt{45}x^5 + \sqrt{180}x^2 + \sqrt{125}x^4$; d) $\sqrt{12}x^2y^2 - \sqrt{27}x^3y^3 + \sqrt{48}x^2y^3 - \sqrt{75}x^3y^2$;
 e) $-\sqrt{6}y^3 + \sqrt{24}y^4 - \sqrt{54}y^5 + \sqrt{96}y^7 - \sqrt{150}y^6$;
 f) $20\sqrt{125}x^4y^4z^4 + 5\sqrt{80}x^5y^4z^3 - 10\sqrt{180}x^4y^5z^6 + 15\sqrt{320}x^6y^6z^5$.

8. Scoateți factorul comun:

- a) $3(2+5x)^2 - x(2+5x) + 5(2+5x)$; b) $(x-y)(2x-y) + (x-y)^2 - 3y(x-y)$;
 c) $(x+3)(2x-y) - (2x-y)(x+1) + 5x(2x-y)$; d) $(3a-5)^2 - 2(5-3a) + (a-5)(3a-5)$;
 e) $(5-2x)(7x-2) + 7x(2-7x) + (7x-2)^2$; f) $(y-6)^3 + (y+1)(y-6)^2 - (5-3y)(y-6)^2$.

9. Scoateți factorul comun:

- a) $7x(x+2) + (x+2)^2 - 3(x+2)$; b) $(y+3)(y+2) + 4(y+3)^2 - 4y(y+3)$;
 c) $(y+5)(3y-7) - (y+5)(4y-2) + 3(y+5)$; d) $(3x-5)^2 - (3x-5)(2x-1) + 6x(3x-5)$;
 e) $(5x-4)(3x-2)^2 - (3x-2)^2 + 2(x+4)(3x-2)^2$; f) $(4y-5z)(2y+z) - (3y-z)(5z-4y) + (5z-4y)^2$.

10. Descompuneți în factori, scoțând factorul comun:

- a) $125x^m - 50x^{m+1} + 75x^{m+2} - 25x^{m+3}$, $m \in \mathbb{N}^*$; b) $25x^m - 75x^{m+1} + 50x^{m+2} - 125x^{m+3}$, $m \in \mathbb{N}^*$;
 c) $16x^{m-1} + 24x^{m+1} - 72x^m - 64x^{m+2}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$; d) $36x^n - 12x^{n+1} + 18x^{n+2} - 24x^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
 e) $6(x-3)^{n-1} - 4(x-3)^n + 7(x-3)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$; f) $3\sqrt{5}x^{n+1} - 6\sqrt{5}x^n + \sqrt{20}x^{n+2} - \sqrt{80}x^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

11. Scoateți factorul comun:

- a) $2\sqrt{3}x^2(x-3) - 12\sqrt{3}x(x-3) + 18\sqrt{3}(x-3)$; b) $4\sqrt{7}x^2(x+1) + 8\sqrt{7}x(x+1) + 16\sqrt{7}(x+1)$;
 c) $4\sqrt{3}x^2(2x-1) - 4\sqrt{3}x(2x-1) + \sqrt{3}(2x-1)$; d) $9\sqrt{5}x^2(3x+2) + 12\sqrt{5}x(3x+2) + 4\sqrt{5}(3x+2)$.

12. Fie numărul $a = \sqrt{2}(\sqrt{2}+2) + 2(\sqrt{2}+2) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-2) - 2(\sqrt{2}-2)$. Calculați numărul a , apoi arătați că $a^4 + a^2 + 9$ este pătratul unui număr real.

13. Arătați că numărul $n = 6(2x+5)^{13} + 2x(2x+5)^{13} - (2x+5)^{13}$ este pătratul unui număr întreg, pentru oricare $x \in \mathbb{Z}$.

14. Determinați numerele raționale a și b în fiecare dintre cazurile următoare:

- a) $2a + a\sqrt{3} + 2b\sqrt{3} + b = 5\sqrt{3} + 1$; b) $2a(\sqrt{3} - \sqrt{5}) - 3b(2\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{300} - \sqrt{5}$;
 c) $a(\sqrt{3} + 2) + b(\sqrt{3} - 2) = 3\sqrt{3} - 2$.

15. Arătați că, oricare ar fi numărul întreg n , $n \neq 0$, numărul N este:

a) număr întreg dacă:

$$\text{i) } N = \frac{n(5n+3) - 7(5n^2+3n)}{6};$$

$$\text{ii) } N = \frac{n(8n+1) - n(2n-5)}{6n};$$

b) pătrat perfect dacă:

$$\text{i) } N = 2n(2n+3)^7 + 3(2n+3)^7;$$

$$\text{ii) } N = 3n(3n-1)^3 - (3n-1)^3.$$

16. a) Se consideră numerele raționale x, y, z, t . Dacă $x\sqrt{3} + y\sqrt{5} = z\sqrt{3} + t\sqrt{5}$, atunci $x = z$ și $y = t$.

b) Determinați $x, y \in \mathbb{Q}$, dacă $x\sqrt{3} + 3\sqrt{5} = y\sqrt{3} + 3y\sqrt{5}$.

17. Se consideră $E(x) = \frac{x-1}{x+2}$, pentru care $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Determinați numerele raționale a și b , astfel încât $E(a) \cdot (a+2) = 3(a-2\sqrt{3}) + 2b\sqrt{3} - 7$.

18. Se consideră $E(x) = \frac{x+3}{x-4}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Determinați numerele raționale a și b , pentru care $E(a) \cdot (a-4) = 2(2a-3\sqrt{3}) + 3(b\sqrt{3}+4)$.

6.2. UTILIZAREA FORMULELOR DE CALCUL PRESCURTAT

Folosind proprietatea de simetrie a egalității, putem scrie:

• cum $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, atunci $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$;

• cum $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, atunci $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$;

(se spune că s-au descompus în factori cele două sume, folosind „restrângerea” pătratului unei sume (diferențe) de doi termeni).

• dacă $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, atunci $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

(se spune că s-a descompus această diferență de două pătrate în produsul sumei și diferenței acelorași termeni).

EXEMPLE:

$$\text{a) } 1 + 12x + 36x^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 6x + (6x)^2 = (1 + 6x)^2;$$

$$\text{b) } 9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = (3x - 4y)^2;$$

$$\text{c) } 9 - 4x^2 = (3 + 2x)(3 - 2x).$$

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Restrângeți pătratul unei sume:

$$\text{a) } x^2 + 2xy + y^2;$$

$$\text{b) } x^2 + 2x + 1;$$

$$\text{c) } x^2 + 4x + 4;$$

$$\text{d) } y^2 + 6y + 9;$$

$$\text{e) } x^2 + 8x + 16;$$

$$\text{f) } b^2 + 10b + 25;$$

$$\text{g) } x^2 + 12x + 36;$$

$$\text{h) } 4x^2 + 12x + 9;$$

$$\text{i) } 9x^2 + 12x + 4.$$

2. Restrângeți pătratul unei diferențe:

$$\text{a) } x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\text{b) } x^2 - 4xy + 4y^2;$$

$$\text{c) } 4x^2 - 4xy + y^2;$$

$$\text{d) } 9x^2 - 24xy + 16y^2;$$

$$\text{e) } 36x^2 - 60xy + 25y^2;$$

$$\text{f) } x^2 - 6x + 9;$$

$$\text{g) } x^2 - 12x + 36;$$

$$\text{h) } x^2 - 14x + 49;$$

$$\text{i) } 4x^2 - 12x + 9;$$

$$\text{j) } 9x^2 - 12x + 4;$$

$$\text{k) } 16x^2 - 40x + 25;$$

$$\text{l) } 25x^2 - 20x + 4.$$

B. RAPOARTE CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

PE-PP 7. AMPLIFICAREA. SIMPLIFICAREA



Un raport în care termenii sunt expresii algebrice se numește **raport algebric** sau **fracție algebrică** sau **expresie algebrică rațională**.

EXEMPLE: a) $\frac{a^2+7}{15}$; b) $\frac{5}{3x}$; c) $\frac{5a-3y}{5x-6}$; d) $\frac{x-\sqrt{5}}{x+11}$.

Domeniul de definiție al unei fracții algebrice este mulțimea numerică în care iau valori literele ce participă în partea literală a expresiilor algebrice care intră în scrierea număratorului și a numitorului fracției raționale, cu excepția acelor valori ale literelor care anulează numitorul.

EXEMPLE: Pentru $\frac{5a-3y}{5x-6}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{6}{5}\right\}$, iar pentru $\frac{x-\sqrt{5}}{x+11}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-11\}$.

OBSERVAȚIE: Un raport algebric nu este definit pentru acele valori ale literelor care anulează numitorul.

Operația de **amplificare** a unei fracții algebrice constă în înmulțirea atât a număratorului, cât și a numitorului acesteia cu o expresie algebrică nenulă.

EXEMPLE: Raportul $\frac{3x}{x^4+2}$, $x \in \mathbb{R}$, amplificat cu x^2+1 devine $\frac{3x(x^2+1)}{(x^4+2)(x^2+1)}$.

Operația de **simplificare** a unei fracții algebrice constă în împărțirea atât a număratorului, cât și a numitorului acesteia prin aceeași expresie algebrică nenulă.

EXEMPLE: a) $\frac{144x^2}{156x^3}$, $x \in \mathbb{R}^*$, se simplifică prin $12x^2$ și devine $\frac{12}{13x}$;

b) $\frac{13x-13\sqrt{5}}{x^2-5}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. Raportul simplificat se obține astfel: $\frac{13(x-\sqrt{5})}{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})} = \frac{13}{x+\sqrt{5}}$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Determinați valorile reale ale lui x pentru care următoarele fracții nu sunt definite:

a) $\frac{3}{x}$;

b) $\frac{\sqrt{3}}{13x^2}$;

c) $\frac{x+1}{16x^2}$;

d) $\frac{x+4}{x^2+1}$;

e) $\frac{5x-2}{5x+2}$;

f) $\frac{3x}{x-1}$;

g) $\frac{5}{x^2-1}$;

h) $\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$;

i) $\frac{3x-5}{x^2+3x+2}$;

j) $\frac{2x+3}{x(x+1)(x-3)}$;

k) $\frac{7x+3}{4x^2-9}$;

l) $\frac{xy+z}{x^2-3x+2}$.

2. Determinați domeniul de definiție pentru următoarele fracții algebrice:

a) $\frac{5}{x}$;

b) $\frac{7x+1}{9x^2}$;

c) $\frac{3x+2}{x-1}$;

d) $\frac{x-3}{x^2+4}$;

e) $\frac{7x-3y}{x(x+1)}$;

f) $\frac{2x+3}{x^2-1}$;

g) $\frac{3x-7}{x^2-3}$;

h) $\frac{2x+1}{x^2+5x+6}$;

i) $\frac{12}{x^2-4x+4}$;

j) $\frac{13x^2}{x(x+1)(x-4)}$.

3. Calculați valorile pe care le iau rapoartele:

- a) $\frac{x-7}{1+x+2x^2}$, pentru $x=7$; b) $\frac{x-3}{2x^2+5}$, pentru $x \in \{1, 3\}$; c) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2+4}$, pentru $x=2, y=2$;
 d) $\frac{x+y}{x^2+y^2+1}$, pentru $x \in \{0, 1\}, y \in \{-1, 1\}$; e) $\frac{3x+2y-5z}{x^2+y^2+z^2+11}$, pentru $x=1, y=-1, z=0$.

4. (i) Amplificați cu $x \in \mathbb{R}^*$ rapoartele:

- a) $\frac{11}{x}$; b) $\frac{12}{x^2}$; c) $\frac{11x-3}{x^2+1}$; d) $\frac{8-x}{x^4+x^2+2}$.

(ii) Amplificați cu $2x+3, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, rapoartele:

- a) $\frac{11}{13x}$; b) $\frac{7}{x+1}$; c) $\frac{7-x}{x^2+3x+2}$; d) $\frac{2x-3}{4x^2+x}$.

5. Amplificați fiecare raport din șirurile de mai jos astfel încât să se obțină, în fiecare caz în parte, un șir de rapoarte cu același numitor.

- a) $\frac{2x+3}{x-1}, \frac{11x}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $\frac{x}{3x+2}, \frac{2-5x}{3x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$;
 c) $\frac{7x-3}{4}, \frac{4x-2}{2x}, \frac{3-x}{6x^2}, \frac{x^2+1}{3}, x \in \mathbb{R}^*$.

6. Simplificați fracțiile algebrice următoare, stabilind domeniul lor de definiție:

- a) $\frac{x^3}{x^4}$; b) $\frac{x^4+6x^3+9x^2}{x^3+3x^2}$; c) $\frac{x^4+3x^2}{x^3}$; d) $\frac{x^3}{x^4+3x^3+5x^2}$;
 e) $\frac{7x^3+x^2}{x^4+2x^3+x^2}$; f) $\frac{5x^3}{4x^4+4x^3+x^2}$; g) $\frac{6x^3-5x^2}{x^4+5x^3+6x^2}$.

7. Simplificați cu $x+2, x \in \mathbb{R}_+^*$, fracțiile următoare:

- a) $\frac{x^2+2x}{x+2}$; b) $\frac{(x+1)(x+2)}{2x^2+4x}$; c) $\frac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$; d) $\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$.

8. Simplificați fracțiile algebrice următoare și stabiliți, după caz, domeniul de definiție:

- a) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$; b) $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$; c) $\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}$; d) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$;
 e) $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$; f) $\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$; g) $\frac{x^2+3x}{x^2-9}$; h) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$;
 i) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; j) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$; k) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$; l) $\frac{x^2+7x}{x^2-49}$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

9. Simplificați și stabiliți, după caz, domeniul de definiție:

- a) $\frac{2x^2+2x}{4x+4}$; b) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$; c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; d) $\frac{x^2-14x+49}{x^2-49}$;
 e) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$; f) $\frac{3x^3+6x^2+3x}{7x^3-7x}$; g) $\frac{2x^3-4x^2+2x}{4x^3-4x}$; h) $\frac{x^2-16}{x^2-8x+16}$.

10. Simplificați rapoartele și aflați domeniul lor de definiție:

a) $\frac{x^2 - 18x + 81}{x^2 - 81};$

b) $\frac{x^2 - 36}{x^2 - 12x + 36};$

c) $\frac{x^2 - 64}{x^2 + 16x + 64};$

d) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^3 - 25x};$

e) $\frac{x^3 - 49x}{x^3 + 14x^2 + 49x};$

f) $\frac{x^4 - 100x^2}{x^3 + 20x^2 + 100x}.$

11. Simplificați fracțiile și determinați domeniul lor de definiție:

a) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6};$

b) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 11x + 30};$

c) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 7x + 12};$

d) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4};$

e) $\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 7x + 12};$

f) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 9x + 20};$

g) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 16};$

h) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 5x + 6};$

i) $\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 9x + 20}.$

12. Simplificați rapoartele și determinați domeniul lor de definiție:

a) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3};$

b) $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4x - 12};$

c) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 12};$

d) $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 8x + 16};$

e) $\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 7x + 12};$

f) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 5x + 4};$

g) $\frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 4x - 21};$

h) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8};$

i) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 3x - 18}.$

13. Simplificați rapoartele și stabiliți domeniul lor de definiție:

a) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x - 18};$

b) $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + x - 30};$

c) $\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 11x + 30};$

d) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3};$

e) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x - 24};$

f) $\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - x - 6};$

g) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15};$

h) $\frac{x^2 + 4x - 32}{x^2 + 2x - 24};$

i) $\frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 - 9x + 14}.$

14. Simplificați rapoartele și stabiliți domeniul lor de definiție:

a) $\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 + 5x - 6};$

b) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8};$

c) $\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 5x - 14};$

d) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5};$

e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12};$

f) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4};$

g) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x - 10};$

h) $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 8};$

i) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 2x - 15}.$

15. Simplificați rapoartele și stabiliți domeniul lor de definiție:

a) $\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 2x - 15};$

b) $\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 6x - 16};$

c) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2};$

d) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x - 24};$

e) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x - 24};$

f) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 20};$

g) $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 4x - 12};$

h) $\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 2x - 15};$

i) $\frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + 4x - 12}.$

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

16. Simplificați rapoartele și stabiliți domeniul lor de definiție:

a) $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x - 5};$

b) $\frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 6x - 16};$

c) $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 5x - 14};$

d) $\frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 5x - 24};$

e) $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 5x - 14};$

f) $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x - 12};$

g) $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 3x - 28};$

h) $\frac{x^2 - 2x - 24}{x^2 - 5x - 36};$

i) $\frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 + 3x - 40};$

j) $\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - 7x - 18};$

k) $\frac{x^2 - 2x - 35}{x^2 + x - 56};$

l) $\frac{x^2 + 2x - 48}{x^2 + 4x - 32};$

m) $\frac{x^2 + 9x - 36}{x^2 + 11x - 12}.$

34. Simplificați fracțiile și stabiliți domeniul lor de definiție:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{(4x+1)^2 - (2x-3)^2}{4x^2 + 16x + 16}; & \text{b)} \frac{(3x+5)^2 - (x+1)^2}{4x^2 + 12x + 8}; & \text{c)} \frac{(4x+3)^2 - (x-2)^2}{9x^2 + 30x + 25}; & \text{d)} \frac{(2x-5)^2 - (x+1)^2}{9x^2 - 24x + 16}; \\ \text{e)} \frac{(3x+5)^2 - (2x+3)^2}{x^2 + 5x + 6}; & \text{f)} \frac{(4x+1)^2 - (2x-7)^2}{4x^2 + 12x - 16}; & \text{g)} \frac{(4x-5)^2 - (2x-3)^2}{4x^2 + 20x - 24}; & \text{h)} \frac{(4x+7)^2 - (2x-5)^2}{4x^2 + 32x + 48}. \end{array}$$

35. Simplificați fracțiile și stabiliți domeniul lor de definiție:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{(x+2)^2 - 6(x+2) + 9}{x^2 + 6x - 7}; & \text{b)} \frac{(2x-3)^2 + 2(2x-3) + 1}{4x^2 + 20x - 24}; \\ \text{c)} \frac{(x^2 + x - 1)^2 - 2(x^2 + x - 1) + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4)}; & \text{d)} \frac{(x^2 + x - 4)^2 - 4(x^2 + x - 4) + 4}{(x^2 - 4)(x^2 + 6x + 9)}; \\ \text{e)} \frac{(x^2 + 2x + 2)^2 - 4(x^2 + 2x + 2) + 4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}; & \text{f)} \frac{(x^2 + 3x + 3)^2 - 6(x^2 + 3x + 3) + 9}{x^4 + 6x^3 + 9x^2}; \\ \text{g)} \frac{(2x+1)^2 - 2(2x+1)(x+2) + (x+2)^2}{x^2 + 8x - 9}; & \text{h)} \frac{(3x+4)^2 - 4(3x+4)(x+1) + 4(x+1)^2}{x^2 + 10x + 16}. \end{array}$$

36. Simplificați rapoartele și stabiliți domeniul lor de definiție:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}; & \text{b)} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}; & \text{c)} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 7x + 6}; \\ \text{d)} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}; & \text{e)} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}; & \text{f)} \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}. \end{array}$$

37. Simplificați rapoartele și stabiliți domeniul lor de definiție:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}; & \text{b)} \frac{x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}; & \text{c)} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x + 2}; \\ \text{d)} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}; & \text{e)} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; & \text{f)} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}. \end{array}$$

PE-PP

SUPERMATE ◆ ◆ ◆ ◆

38. Simplificați fracțiile și aflați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care fracția este definită:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 4) + 3}{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 5) + 6}; & \text{b)} \frac{(2x^2 + x)(2x^2 + x - 3) + 2}{(2x^2 + x)(2x^2 + x - 4) + 3}; & \text{c)} \frac{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 5) + 4}{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 6) + 8}; \\ \text{d)} \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 4) + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5) + 3}; & \text{e)} \frac{(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 4) + 2}{(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 6) + 6}; & \text{f)} \frac{(x^2 - x + 2)(x^2 - x + 6) + 4}{(x^2 - x + 2)(x^2 - x + 3) - 2}. \end{array}$$

39. Simplificați fracțiile:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{(x^2 - x - 1)(2x^2 - 2x + 6) + 8}{(x^2 - x + 3)(2x^2 - 2x + 10) - 16}; & \text{b)} \frac{(x^2 + x + 2)(2x^2 + 2x - 8) + 18}{(2x^2 + 2x + 4)(x^2 + x + 1) - 12}; & \text{c)} \frac{(2x^2 + x + 1)(2x^2 + x + 5) + 3}{(2x^2 + x + 1)(2x^2 + x + 4) + 2}; \\ \text{d)} \frac{(x^2 - x + 1)(2x^2 - 2x - 4) + 4}{(2x^2 - 2x + 2)(x^2 - x + 1) - 2}; & \text{e)} \frac{(x^2 - x + 2)(2x^2 - 2x + 8) - 16}{(2x^2 - 2x - 4)(x^2 - x + 2) + 8}. \end{array}$$

40. Simplificați rapoartele și aflați domeniul lor de definiție:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{(x^2 + 4x + 1)(x^2 + 4x + 6) + 6}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}; & \text{b)} \frac{(x^2 - x)(x^2 - x - 5) + 6}{x^3 - 4x^2 + x + 6}; \\ \text{c)} \frac{(x^2 + x - 2)^2 + 5(x^2 + x - 2) + 6}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}; & \text{d)} \frac{(x^2 + 2x - 2)^2 + 9(x^2 + 2x - 2) + 18}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 4}. \end{array}$$

GEOMETRIE

Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

PP

Competențe specifice

- C1. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
- C2. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
- C3. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
- C4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
- C5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
- C6. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

PE-PP 1. PUNCTE, DREPTE, PLANE. DETERMINAREA DREPTEI

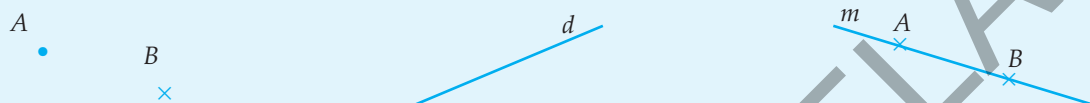


Punctul, dreapta și planul fac parte din noțiunile de bază ale geometriei în spațiu. Ele sunt noțiuni primare: nu se definesc, dar pot fi descrise.

Punctul. Se reprezintă prin atingerea vârfului unui creion bine ascuțit de foaia de scris: $\bullet$, $\times$. Se notează cu litere mari: $A, B, C, \dots$.

Dreapta. Este formată din puncte și se reprezintă printr-un fir de ață foarte subțire întins la nesfârșit în ambele sensuri. Se notează cu litere mici: $a, b, d, \dots$.

Dacă punctele A și B sunt pe o dreaptă, atunci se poate nota dreapta cu AB .



Planul. Poate fi asemănat cu suprafața liniștită a unei ape. De asemenea, planul este nesfârșit în toate direcțiile. Se notează cu litere din alfabetul grec: $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \dots$. Un plan care conține trei puncte necoliniare A, B și C se notează prin (ABC) . Planul se reprezintă printr-un paralelogram.



PROPOZIȚII DESPRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE

P1. (Axioma dreptei) Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una. Orice dreaptă are cel puțin două puncte distincte.

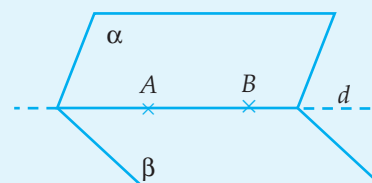
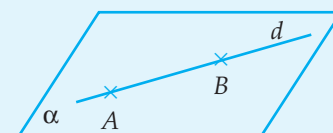
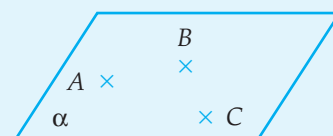
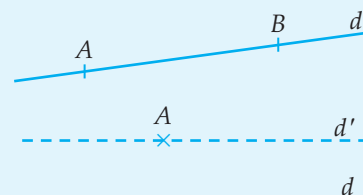
P2. (Axioma paralelelor sau postulatul lui Euclid) Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la acea dreaptă.

P3. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan și numai unul care să le conțină. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare.

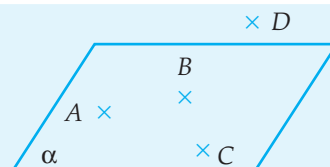
P4. Dacă două puncte distincte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

P5. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun.

Consecință: Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



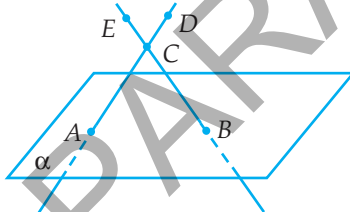
P₆. Există patru puncte nesituate în același plan (acestea se numesc necoplanare).



ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

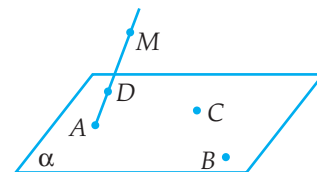
PE ÎNȚELEGERE ◆

- Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:
 - Trei puncte necoliniare determină un
 - Prin două puncte distincte trece o și numai una.
 - Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o comună.
 - Patru puncte necoplanare determină un număr de drepte.
- Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
 - Oricare trei puncte sunt coplanare.
 - Patru puncte coliniare sunt coplanare.
 - Dacă două plane au două puncte comune, atunci ele au o dreaptă comună.
 - Patru puncte, dintre care oricare trei sunt coliniare, determină o dreaptă.
- Scrieți toate dreptele determinate de punctele date în figura de mai jos.



PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

- Fiind date patru puncte A, B, C și D , stabiliți câte drepte distincte se pot obține unindu-le două câte două în fiecare dintre situațiile:
 - oricare trei dintre puncte sunt necoliniare;
 - trei dintre puncte sunt coliniare;
 - punctele sunt necoplanare.
- Câtor drepte poate să aparțină un punct dat?
 - Câtor plane pot să aparțină două puncte distincte date?
- În figura alăturată, punctele distincte $A, B, C \in \alpha$, $D \notin \alpha$, $M \notin \alpha$, iar $D \in AM$.
 - Stabiliți câte drepte distincte se pot obține unind punctele două câte două.
 - Stabiliți dreptele de intersecție a planelor (MAB) , (DBC) și (MAC) cu planul α .
 - Stabiliți dreapta de intersecție a planelor (BDC) și (MAC) .



PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

- Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D , oricare trei dintre ele fiind necoliniare.
 - Determinați câte drepte se pot obține unindu-le două câte două.
 - Dacă $\mathcal{A}_{ABC} = 84 \text{ cm}^2$, $d(A, BC) = 14 \text{ cm}$ și $d(D, BC) = 15 \text{ cm}$, calculați $\mathcal{A}_{BCD}$.

8. Fie triunghiul echilateral ABC de latură 24 cm și M un punct ce nu aparține planului (ABC) , astfel încât $MA = MB = MC = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Dacă $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv DC$, calculați aria triunghiului MAD .

b) Dacă $MN \perp AD$, $N \in AD$, calculați lungimea segmentului MN .

9. Fie triunghiul echilateral ABC și M un punct exterior planului (ABC) , astfel încât $MA = 6$ cm, $MB = MC = 6\sqrt{3}$ cm și $MD = 6\sqrt{2}$ cm, unde $D \in BC$ și $BD \equiv DC$. Stabiliți natura triunghiului MAD și calculați aria sa.

10. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură $AB = 12$ cm și M un punct nesituat în planul pătratului, astfel încât $MA = 12$ cm, $MB = MC = 6\sqrt{10}$ cm. Știind că $N \in BC$ astfel încât $BN \equiv NC$, stabiliți natura triunghiului MAN și aflați aria acestuia.

11. Punctele M, A, B și C sunt patru puncte necoplanare, $M \notin (ABC)$. Se știe că $AB = AC = 26$ cm, $MB = MC = 8\sqrt{10}$ cm, $MA = 6$ cm și $BC = 48$ cm. Dacă $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv DC$, calculați aria triunghiului MAD .

PE-PP SUPERMATE ♦ ♦ ♦ ♦

12. Într-un plan sunt date cinci puncte distincte A, B, C, D, E , iar în afara planului este situat un punct P .

a) Care este cel mai mic număr de drepte care să treacă prin cel puțin două dintre aceste puncte?

b) Dar cel mai mare număr?

13. Fie A, B, C trei puncte distincte într-un plan α , iar D și E două puncte distincte în afara planului.

a) Care este numărul minim de drepte determinate de câte două dintre aceste puncte?

b) Dar numărul maxim?

14. Cinci puncte distincte situate într-un plan și un punct exterior acestui plan pot determina numai nouă drepte?

PE-PP 2. DETERMINAREA PLANULUI



1. Trei puncte necoliniare determină un plan (figura 1).

2. O dreaptă și un punct care nu-i aparține determină un plan (figura 2).

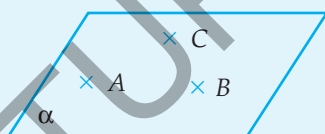


Fig. 1

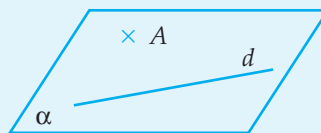


Fig. 2

3. Două drepte concurente determină un plan (figura 3).

4. Două drepte paralele determină un plan (figura 4).

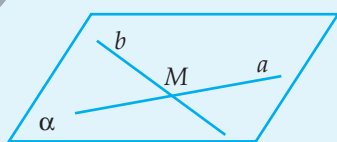


Fig. 3

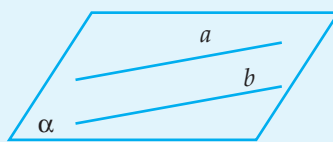


Fig. 4

11. Se consideră punctele distincte A, B, C, D, E , astfel încât $AB \parallel CD$. Care este numărul minim și care este numărul maxim de plane distincte determinate de punctele date?

12. Se consideră punctele distincte A, B, C, D, E, F situate într-un plan α , oricare trei necoliniare, și un punct M nesituat în planul α .

- Enumerați dreptele determinate de cele șapte puncte.
- Stabiliți numărul de plane determinate de oricare trei dintre aceste puncte.

13. Se consideră 5 puncte distincte necoplanare. Aflați:

- numărul minim de plane determinate de câte trei dintre aceste puncte;
- numărul maxim de plane determinate de câte trei dintre aceste puncte.

PE-PP 3. CORPURI GEOMETRICE

3.1. PIRAMIDA, PIRAMIDA REGULATĂ, TETRAEDRUL REGULAT

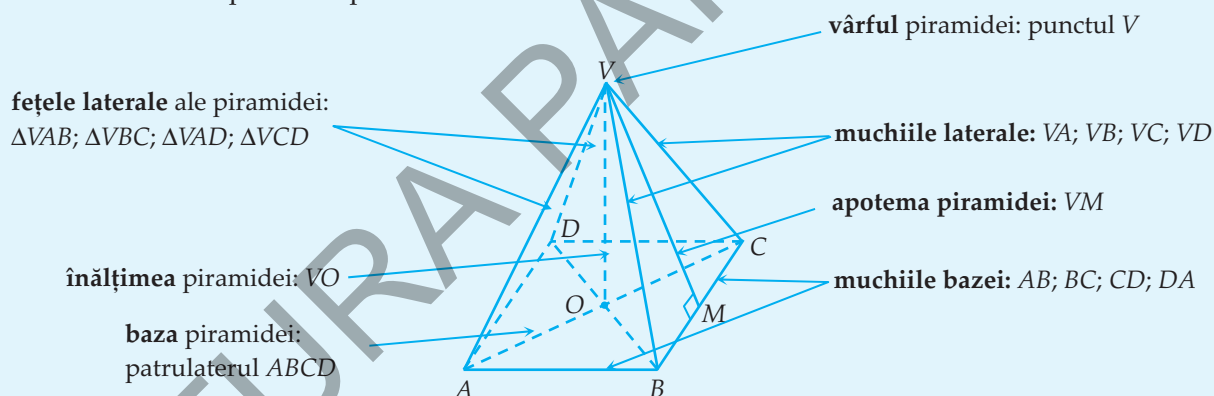


O **piramidă** este definită de un poligon, numit **bază**, și un punct exterior planului acestuia, numit **vârful piramidei**, unind vârful piramidei cu vârfurile poligonului de la bază.

În funcție de natura poligonului de la bază, piramidele pot fi: triunghiulare, patrulatere, hexagonale etc.

Tetraedrul este o piramidă cu baza triunghi.

Elementele unei piramide patrulatere:



Dacă proiecția vârfului V pe planul bazei este centrul cercului circumscris bazei, atunci piramida se numește **piramidă dreaptă**.

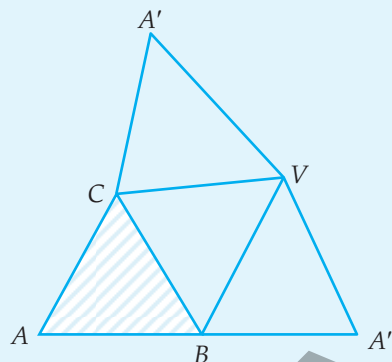
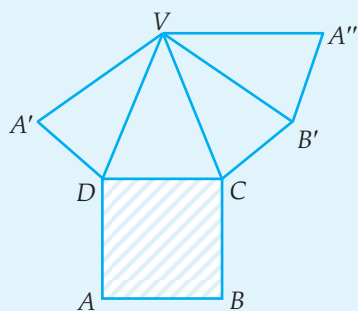
O piramidă dreaptă care are baza poligon regulat se numește **piramidă regulată**.

Într-o piramidă regulată, fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente. Înălțimea corespunzătoare bazei a unei fețe laterale se numește **apotema piramidei** (notată cu a_p).

Tetraedrul regulat este un tetraedru cu toate muchiile congruente. Fețele unui tetraedru regulat sunt patru triunghiuri echilaterale congruente.

TEOREMA LUI EULER: Numărul de fețe (f), de vârfuri (v) și de muchii (m) ale unui corp geometric (**poliedru**) verifică ecuația $f + v - m = 2$.

Desfășurarea unei piramide

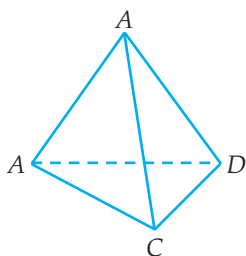


ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

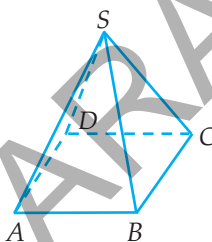
PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Pentru fiecare dintre piramidele de mai jos, scrieți denumirea, baza, fețele laterale și muchiile laterale.

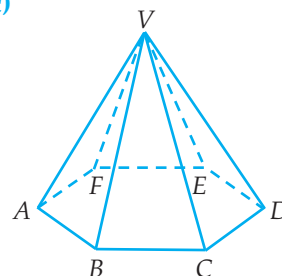
a)



b)



c)



2. a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor unui tetraedru regulat cu muchia de 8 cm.

b) Calculați suma ariilor fețelor acestui tetraedru regulat cu muchia de 8 cm.

3. O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile egale. Știind că suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 160 cm, calculați aria bazei.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

4. Desenați un tetraedru regulat. Știind că aria unei fețe a acestuia este egală cu $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$, calculați suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului.

5. O piramidă patrulateră regulată are muchiile laterale egale cu muchiile bazei. Știind că aria bazei este egală cu 144 cm^2 , calculați suma ariilor fețelor laterale.

6. Piramida regulată $VABC$ are baza un triunghi echilateral cu aria de $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Dacă $\angle VAB = 30^\circ$, calculați:

a) aria triunghiului VAB ;

b) suma lungimilor muchiilor laterale.

7. Fie $VABC$ o piramidă regulată. Știind că raza cercului circumscris bazei ABC este de $8\sqrt{6} \text{ cm}$ și că $\angle AVB = 90^\circ$, calculați:

a) lungimea muchiei bazei piramidei;

b) lungimea muchiei laterale a piramidei.

8. Fie piramida regulată $VABCD$ cu $VA = AB = 12$ cm și punctul M mijlocul muchiei VC .
- a) Stabiliți natura triunghiului MBD . b) Calculați perimetrul și aria triunghiului BMD .
9. Fie $VABCD$ o piramidă regulată cu latura bazei $AB = 24$ cm. Dacă punctul M este mijlocul muchiei VC și $AC \cap BD = \{O\}$, iar $OM = 10$ cm, calculați:
- a) apotema piramidei; b) suma ariilor fețelor laterale ale piramidei.
10. Fie $SABC$ o piramidă regulată în care $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = 90^\circ$ și $SA = 6\sqrt{2}$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv BC . Calculați:
- a) suma ariilor fețelor laterale ale piramidei; b) perimetrul și aria triunghiului SMN .

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

11. a) Desenul alăturat poate reprezenta desfășurarea laterală a unui tetraedru regulat?
- b) Dacă se notează tetraedrul cu $ABCD$ și lungimea muchiei acestuia este de 10 cm, calculați lungimea celui mai scurt drum de la C la B care intersectează muchia AD .
12. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $\angle AVB = 60^\circ$. Dacă $VA = 10$ cm, calculați:
- a) perimetrul lui $ABCD$; b) aria triunghiului VAC .
13. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei de 12 cm și muchiile laterale perpendiculare două câte două. Calculați suma lungimilor muchiilor laterale.
14. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $VA = AB = 12$ cm. Stabiliți natura triunghiului VAC și calculați aria acestuia.
15. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată care are muchiile laterale egale cu $8\sqrt{3}$ cm și muchiile bazei egale cu 16 cm. Dacă M este mijlocul laturii BC și N este mijlocul laturii AD , stabiliți natura triunghiului VMN și calculați aria acestuia.
16. În piramida regulată $VABC$ cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 12$ cm, iar aria triunghiului VAB este egală cu 48 cm^2 .
- a) Calculați apotema piramidei.
- b) Dacă punctul $M \in VA$ astfel încât perimetrul triunghiului BMC să fie minim, calculați perimetrul acestui triunghi BMC .
17. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia egală cu 12 cm, iar punctele E și F sunt mijloacele muchiilor AD , respectiv BC .
- a) Stabiliți natura triunghiului BEC . b) Calculați lungimea segmentului EF .
- c) Calculați aria triunghiului BEC .
18. Piramida regulată $VABC$ are muchia laterală egală cu 18 cm, iar raza cercului circumscris bazei este egală cu 12 cm. Calculați:
- a) latura bazei; b) apotema piramidei;
- c) suma ariilor fețelor laterale ale piramidei.
19. Piramida regulată $SABCD$ are latura bazei $AB = 12$ cm. Dacă punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv DC , iar triunghiul SMN este echilateral, calculați:
- a) lungimea muchiei laterale a piramidei; b) perimetrul triunghiului SAC ;
- c) suma ariilor fețelor laterale ale piramidei.





Nume _____

Clasa _____

TEST DE AUTOEVALUARE

- Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.**(3 puncte)**

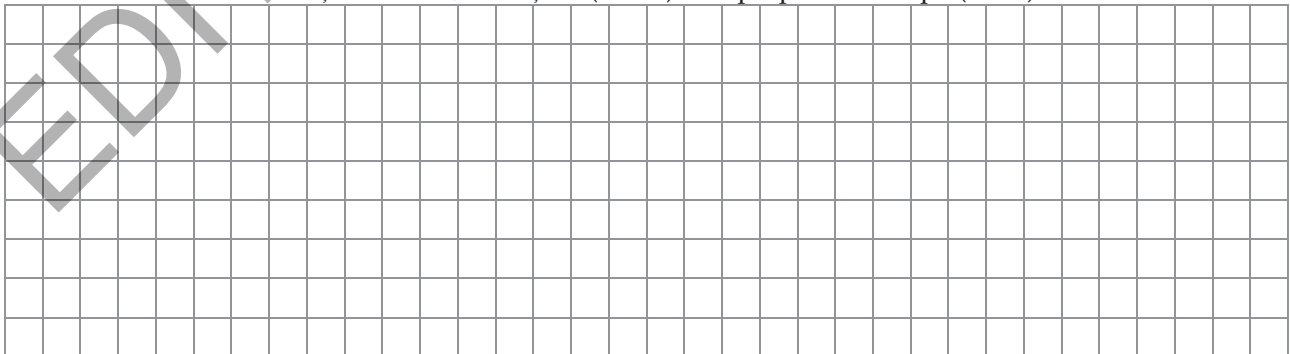
- (0,5p) 1. Figura geometrică formată din două semiplane mărginite de aceeași dreaptă se numește
 (0,5p) 2. Două plane care formează un diedru drept se numesc plane
 (0,5p) 3. Măsura unghiului a două plane secante, α și β , este cel mult egală cu°.
 (0,5p) 4. Măsura unghiului a două plane paralele este egală cu°.
 5. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub.
 (0,5p) a) Măsura unghiului format de planele $(A'AC)$ și $(D'AD)$ este egală cu°.
 (0,5p) b) Măsura unghiului format de planele (ABB') și (BCC') este egală cu°.

II. Încercuiți răspunsul corect.**(2 puncte)**

- (0,5p) 1. Într-un cub $ABCD A'B'C'D'$, măsura unghiului format de planele $(A'AC)$ și (BDD') este de:
 A. 60° ; B. 30° ; C. 90° ; D. 45° .
 (0,5p) 2. Într-un cub $ABCD A'B'C'D'$, măsura unghiului diedru format de planele $(D'BC)$ și (ABC) este de:
 A. 90° ; B. 30° ; C. 45° ; D. 60° .
 (0,5p) 3. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu $AB = 10$ cm și muchia laterală $VA = 5\sqrt{3}$ cm, măsura unghiului diedru format de planele (VBC) și (ABC) este de:
 A. 60° ; B. 45° ; C. 30° ; D. 90° .
 (0,5p) 4. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu latura bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm și înălțimea $VO = 2\sqrt{3}$ cm. Cotangenta unghiului diedru format de planele (VAC) și (ABC) este egală cu:
 A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$; C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

III. Scrieți rezolvările complete.**(4 puncte)**

- (1p) 1. Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă.
 a) Calculați măsura unghiului diedru format de planele $(A'AB)$ și $(A'AC)$.
 b) Dacă $D \in BC$ și $BD \equiv DC$, arătați că $(A'AD)$ este perpendicular pe (BCC') .



(1p) 2. În prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ se știe că $AB = 16$ cm. Dacă $D \in AC$ și $AD \equiv DC$, iar $B'D = 16\sqrt{3}$ cm, calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(B'AC)$ și (ABC) .

445

(1p) **3.** Fie $ABCA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Calculați valoarea sinusului unghiului diedru determinat de planele $(A'BC')$ și $(A'DC')$.

PARALLEL

(1p) 4. În tetraedrul regulat $SABC$, cu latura $AB = 12$ cm, calculați sinusul unghiului diedru determinat de planele (SAB) și (SAC) .

EDITUR

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul													
Nota													

15. PROBLEME DE MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN VIAȚA COTIDIANĂ

1. În figura 1 este reprezentată schematic secțiunea unui acoperiș. Grinda MN este fixată perpendicular pe planul planșeului ($ABCD$).

a) Stabiliți măsura unghiului format de grinda MB cu marginea planșeului, BC .

b) Calculați panta acoperișului (măsura unghiului format de planele (MBC) și (ABC), știind că $MB = 8$ m și $NB = 4$ m.

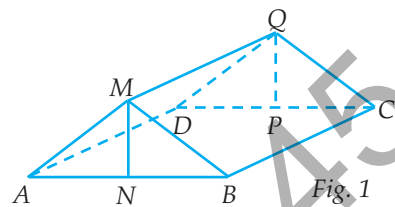


Fig. 1

2. În figura 2 este reprezentat schematic un careu din curtea unei tabere, cu dimensiunile $AB = 16$ m, $BC = 12$ m și în centrul căruia este ridicat un catarg $MO = 6$ m. Petru, care este situat în careu în punctul P , mijlocul lui AB , se întreabă dacă distanța de la vârful catargului la latura AD este mai mare decât distanța de la el la prietenul său, Nicu, situat în punctul N , mijlocul lui AD .

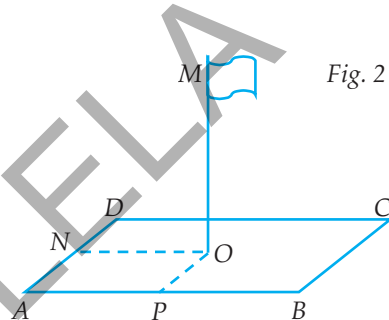


Fig. 2

Nicu își pune, la rândul lui, întrebarea dacă distanța de la el la Petru este mai mică decât distanța de la vârful catargului la latura AB . Ajutați-i pe cei doi copii să afle răspunsurile!

3. Un panou publicitar de forma dreptunghiului $ABCD$ din figura 3, cu dimensiunile $AB = 6$ m și $CB = 4$ m, este fixat vertical cu un cadru $DCNM$. Stabiliți care este unghiul sub care se îmbină grinda MN cu NC și, respectiv, cu MD . Știind că distanța dintre punctele B și N este de 3 m, aflați lungimea grinzii NC .

4. În figura 4 este reprezentată schematic o fereastră pe care proprietarul vrea să o deschidă sub un unghi de 30° . Fereastra este de 1,5 m lungime și 70 cm lățime. El vrea să îi fixeze un opritor AB . Verificați dacă opritorul este mai lung decât 37 cm.

5. În figura 5 este reprezentat schematic peretele unei clădiri, care a fost consolidat prin două console de lungimi egale: DE și CF . Știind că înălțimea peretelui este $BC = 3$ m și că distanța de la baza peretelui la piciorul consolei este de 4 m, calculați lungimea celor două console.

6. În figura 6 este reprezentată schematic o scenă pe care se află un actor în punctul B , situat la 2 m distanță de fundalul scenei MN . Un reflector este situat pe perete în punctul A , la o înălțime de 3 m. Calculați lungimea fasciculului de lumină AB , știind că $A'B' = 2\sqrt{3}$ m.

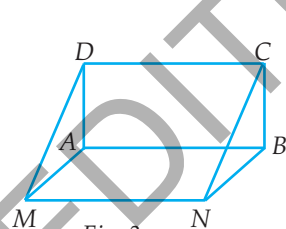


Fig. 3

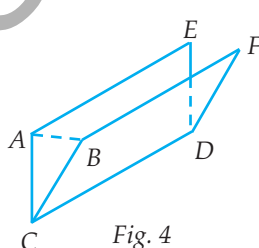


Fig. 4

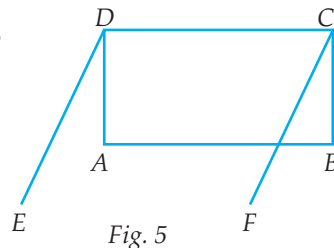


Fig. 5

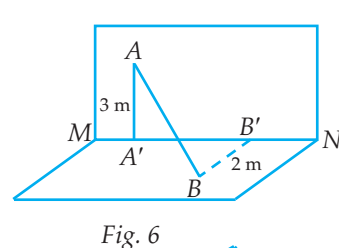


Fig. 6

7. În figura 7 este reprezentată schematic o scară cu lungimea de 4 m, sprijinită de peretele casei până la streșină. Peretele casei are 3,2 m înălțime. La ce distanță față de zidul casei se află piciorul scării?

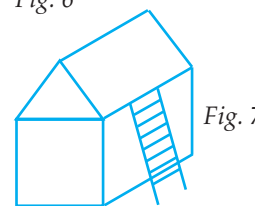


Fig. 7

TESTE RECAPITULATIVE

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 90 de minute.

TESTUL 1

A. Se scriu doar răspunsurile.

- (0,5p) 1. a) Rezultatul calculului $-3^0 + \sqrt{72} : \sqrt{18}$ este
- (0,5p) b) Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-3; 2] \cap (-5; 0)$ este egal cu
- (0,5p) c) Media geometrică a numerelor 0,12 și 0,(3) este
- (0,5p) 2. a) Rezultatul calculului $(x-3)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1)(x-1)$ este egal cu
- (0,5p) b) Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 3\}$ este $A =$
- (0,5p) c) Descompunerea în factori ireductibili a expresiei $(4x-5)^2 - 9x^2$ este
- (0,5p) 3. a) Cel mai mic număr natural, pentru care $\frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}$, este egal cu
- (0,5p) b) Valoarea numărului $a = |x+3| + |x-7|$, pentru $x \in [-3; 7]$, este
- (0,5p) c) Efectuând $(-5; 3] \cup [-3; 5)$, se obține intervalul
4. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, cu latura bazei $AB = 6$ cm și $AA' = 6\sqrt{3}$ cm.
- (0,5p) a) Lungimea segmentului AD' este de cm.
- (0,5p) b) Măsura unghiului format de AD' cu planul (ABC) este de°.
- (0,5p) c) Măsura unghiului format de AD' cu BB' este de°.

B. Se scriu rezolvările complete.

- (0,5p) 5. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația: $\frac{3x-2}{7} - \frac{2x-5}{5} > \frac{46-20x}{35}$.
- (0,5p) b) Stabiliți cărui interval aparțin numerele reale a , b și c , pentru care avem relația:
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-2b-3c) = 11.$$
- (0,5p) c) Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < \frac{6x+10}{2} < 20\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{2x+1}{3}\right| \leq 3\right\}$.
- Determinați mulțimile $A \cap B$ și $A \cup B$.
6. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată care are $AB = 10$ cm și $SO = 5\sqrt{2}$ cm, unde $SO \perp (ABC)$.
- (0,25p) a) Calculați măsura unghiului format de SA cu planul (SBD) .
- (0,25p) b) Calculați distanța de la O la planul (SBC) .
- (0,5p) c) Dacă M este mijlocul laturii BC și N este mijlocul muchiei SC , arătați că $(OMN) \parallel (SAB)$.
- (0,5p) d) Calculați măsura unghiului dintre dreptele MN și BD .

PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR

ALGEBRĂ

1. Determinați $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, astfel încât numărul:

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

să aparțină mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < \sqrt{11-6\sqrt{2}}\right\}$.

2. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a} + \frac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b} \in \mathbb{Z}$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 1$. Demonstrați că:

a) $\sqrt{a^4 + 4b^2} + \sqrt{b^4 + 4a^2} = 2;$

b) $-\sqrt{2} \leq a+b \leq \sqrt{2}.$

4. a) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a+b\sqrt{3} = c+d\sqrt{3}$. Atunci $a=c$ și $b=d$.

b) Arătați că nu există numerele raționale a, b, c, d , astfel încât: $1+\sqrt{3} = (a+b\sqrt{3})^2 + (c+d\sqrt{3})^2$.

5. Demonstrați că, oricare ar fi numerele raționale x, y, z , diferite două câte două, numărul $n \in \mathbb{Q}$, unde

$$n = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}.$$

6. Determinați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $a = \sqrt{4n^2 + 20n + 65}$ să fie număr natural.

7. Demonstrați că, dacă numerele întregi x, y, z verifică relația $xy + z(x-y) = y^2 + 7$, atunci $|x+z| = 8$ și $|x-2y-z| = 6$.

8. Arătați că, oricare ar fi $a, b, c \geq 0$, $a \geq b$ și $a \geq c$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - c^2 + 4ab} + \sqrt{a^2 - b^2 + 4c^2 + 4ac} \leq 2(a+b+c).$$

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \cdot b = 1$. Demonstrați inegalitatea $(a-3)^2 + (b-3)^2 \geq 7$.

10. Arătați că, dacă x, y, z sunt numere raționale nenule, astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, atunci numărul

$$N = \left(\frac{xy}{z} + 1\right) \left(\frac{yz}{x} + 1\right) \left(\frac{zx}{y} + 1\right)$$
 este nenegativ, iar $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$.

11. Fie numerele reale distincte a și b care au proprietățile: $a^2 + b \in \mathbb{Q}$ și $b^2 + a \in \mathbb{Q}$. Arătați că:

a) numerele $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ și $b = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ verifică proprietățile date;

b) dacă $a+b \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, atunci a și b sunt numere raționale;

c) dacă $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, atunci a și b sunt numere raționale.

GEOMETRIE

26. Pe planul triunghiului echilateral ABC de latură $2a$ se duc perpendicularele AM și d , $C \in d$. Fie $N \in AM$, astfel încât $AN = a$ și $MN = 2a$.

a) Justificați și calculați distanța de la A la planul (MBC) .

b) Justificați și calculați măsura unghiului format de planele (MBC) și (NBC) .

c) Câte puncte diferite $P_i \in d$ sunt, astfel încât $\triangle BMP_i$ să fie dreptunghic pentru orice $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$?

Calculați de fiecare dată lungimea segmentului $[CP_i]$.

O.L. Alba, 2011

27. Segmentele AB și CD sunt situate pe drepte necoplanare, M este mijlocul segmentului AB , iar $N \in CD$ astfel încât $CN = 3 \cdot ND$. Se notează cu X, Y, Z, T punctele $X \in CM$ cu $MX = 3 \cdot CX$, $Y \in AN$ cu $AN = 2 \cdot AY$, $Z \in MD$ cu $MZ = 3 \cdot ZD$, $T \in BN$ cu $BN = 2 \cdot BT$. Verificați coplanaritatea punctelor X, Y, Z, T .

O.L. Arad, 2011

28. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ se duc $AQ \perp A'B$, $Q \in A'B$, $CR \perp BC'$, $R \in BC'$ și $DP \perp BD'$, $P \in BD'$.

a) Arătați că $(AQP) \perp (CRP)$.

b) Dacă $QR \parallel (ABC)$, atunci $AB \equiv BC$.

prof. Sorin Peligrad, O.L. Argeș, 2011

29. În tetraedrul $ABCD$ se notează cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC , respectiv CD . Se știe că $\angle(AC, BD) = 90^\circ$.

a) Arătați că $\angle MNP = 90^\circ$.

b) Arătați că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

prof. Ion Roșu, O.L. Argeș, 2011

30. Pe planul triunghiului ABC , cu laturile $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$ și $AC = 1$, se ridică perpendiculara $AM = \sqrt{2}$.

a) Arătați că MC și BC sunt perpendiculare.

b) Aflați măsura unghiului dintre MC și (AMB) .

O.L. Bacău, 2011

31. Fie triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm și $AM \perp (ABC)$, cu $AM = 12\sqrt{3}$ cm.

Calculați:

a) distanța de la M la BC ;

b) distanța de la A la (MBC) ;

c) măsura unghiului diedru format de planele (ABC) și (MBC) .

O.L. Bihor, 2011

32. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara $MA \perp (ABC)$, $AB = AM = \sqrt{2}$ cm. Fie $E \in (BC)$, astfel încât $EC = 1$ cm.

a) Arătați că $BD \perp MC$.

b) Calculați distanța de la punctul M la dreapta DE .

c) Calculați distanța de la punctul A la planul (MCD) .

prof. Ioan Ioja, O.L. Bistrița-Năsăud, 2011

33. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Fie O centrul pătratului $ABCD$ și M mijlocul segmentului AO . Planul α conține punctul M și este paralel cu planul $(AB'D')$.

a) Demonstrați că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul α .

b) Dacă planul α intersectează dreptele $B'C'$ și $D'C'$ în punctele N , respectiv P , arătați că punctul M este egal depărtat de planele $(A'B'C')$ și (PNC) .

O.L. București, 2011

34. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, având muchia de lungime $a > 0$. Calculați $\angle(AD', A'B) + \angle(AD', A'C)$.

prof. Marius Șandru, RMCS nr. 3/2008, O.L. Caraș-Severin, 2011

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)



RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚĂLĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

TESTUL 1: 1. a) $2\sqrt{3}$; b) -12 ; c) $\frac{7\sqrt{2}}{5}$. 2. a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{-1, 4\}$; c) $S = \{8\}$; d) $S = \left\{\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right\}$; e) $S = \{-8, 2\}$. 3. $m_g = 6$.

4. a) $S = \{(4, -3)\}$; b) $S = \{(3, 2)\}$. 5. b) $AB = 3\sqrt{5}$; $BC = 2\sqrt{5}$; $AC = 5\sqrt{5}$; $AC = AB + BC \Rightarrow A, B, C$ – coliniare; c) $M(2; 5)$.

6. 420 lei. 7. a) $\mathcal{P} = 10(3 + \sqrt{3})$ cm; b) $\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{1}{4}$. 8. a) Dacă $\angle BDC = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \angle AOC = 60^\circ$, deci $\triangle AOC$ –

echilateral; $\mathcal{A}_{AOC} = 16\sqrt{3}$ cm².

TESTUL 2: 1. a) 36; b) $3\sqrt{3}$; c) $-2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$. 2. a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{7\}$; c) $S = \{-4, 2\}$; d) $S = \{-1, 6\}$; e) $S = \{-6, 2\}$. 3. 320 lei.

4. a) $S = \{(2, -3)\}$; b) $S = \{(3, 4)\}$. 5. $m_a = 5\sqrt{6}$; $m_g = 12$. 6. b) $AB = 5$, $AC = 5$; $BC = 5\sqrt{2}$. Se aplică reciproca teoremei lui

Pitagora. 7. a) $BC = 24$ cm; $DM = 6$ cm $\Rightarrow BD = 6$ cm; $AB = 12$ cm și $AC = 12\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{A}_{ABC} = 72\sqrt{3}$ cm² și $\mathcal{P}_{ABC} =$

$= 12(3 + \sqrt{3})$ cm; b) 25%. 8. a) $\mathcal{A}_{CMN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{MAN} - \mathcal{A}_{MBC} - \mathcal{A}_{MDC} = 950$ cm²; b) $MN = 50$ cm; d(C; MN) = 38 cm;

c) $\sin(\angle CNM) = \frac{19\sqrt{26}}{130}$.

TESTUL 3: 1. a) 4; b) 1; c) 128. 2. a) $S = \{2\}$; b) $S = \{4\}$; c) $S = \{1, -2\}$; d) $S = \left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$; e) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$. 3. 35 ani

(mama); 14 ani (fiul). 4. a) $S = \{(-2, -3)\}$; b) $S = \{(2, -1)\}$. 5. $a = 24$; $b = 6$; $m_a = 15$; $m_g = 12$. 6. b) $\mathcal{A}_{ABC} = 48$ (u²); $\mathcal{P}_{ABC} = 32$ (u).

7. a) Se arată că $\angle B = 60^\circ$. Dacă $CE \perp AB \Rightarrow CE = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 108\sqrt{3}$ cm²; b) Se calculează $\mathcal{A}_{BDC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADB} =$

$= 36\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow d(D; BC) = 6\sqrt{3}$ cm; c) Cum $DC \parallel AB$ și $DC = \frac{AB}{2}$, atunci CD este linie mijlocie în $\triangle MAB \Rightarrow MD =$

$= DA = 12$ cm și $MC = BC = 12$ cm, deci $\triangle MAB$ – echilateral; $\mathcal{A}_{MAB} = 144\sqrt{3}$ cm². 8. a) $\widehat{AC} = 60^\circ \Rightarrow \angle ABC = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = 10$ cm; $BC = 20\sqrt{3}$ cm; $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \mathcal{A}_{ABC}} \Rightarrow R = 20$ cm; b) $MA' = 30$ cm $\Rightarrow BA' = CA' = 20\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABA'C} =$

$= \frac{BC \cdot AA'}{2} = 400\sqrt{3}$ cm²; $\mathcal{P}_{ABA'C} = 40(\sqrt{3} + 1)$ cm.

TESTUL 4: 1. a) $-16\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $20\sqrt{2}$. 2. $a = \frac{4}{3}$; $b = \frac{4}{3}$; $m_g = \frac{4}{3}$. 3. a) $S = \{3\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \{-\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\}$; d) $S = \{-6, 2\}$;

e) $S = \{-6, 7\}$. 4. 36 ani; 12 ani; peste 12 ani. 5. a) $S = \{(-3, -4)\}$; b) $S = \{(2, 4)\}$. 6. a) $AB = AC = \sqrt{10}$ u; b) $\mathcal{P}_{ABC} =$

$= 2\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$ (u); c) $M(1; 0)$. 7. a) NP – linie mijlocie în $\triangle MDC \Rightarrow NP \parallel DC$. Se arată că $\triangle DMA \equiv \triangle CMB$ (CC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow MD \equiv MC \Rightarrow ND \equiv PC \Rightarrow DNPC$ – trapez isoscel; b) Dacă NP – linie mijlocie $\Rightarrow \frac{NP}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{MDC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{DNPC} = \frac{3}{4} \mathcal{A}_{MDC} \Rightarrow \mathcal{A}_{DNPC} = 81$ cm². 8. a) Cum $AN \perp CP$ și $CN = NP \Rightarrow \triangle APC$ – isoscel $\Rightarrow AC \equiv AP$. Analog,

$\triangle ABT$ – isoscel $\Rightarrow AB \equiv AT \Rightarrow \triangle APT$ – isoscel; b) Se arată că $\triangle BMC \equiv \triangle CNB$ (IU); c) Din $\triangle BMC \equiv \triangle CNB \Rightarrow \angle MBC \equiv$

$\equiv \angle NCB \Rightarrow \triangle BRC$ – isoscel $\Rightarrow BR \equiv RC$. Se arată că $\triangle ABR \equiv \triangle ACR$ (LLL) $\Rightarrow AR$ – bisectoarea $\angle BAC \Rightarrow AR$ –

bisectoarea $\angle PAT \Rightarrow AR \perp PT$.

d) $A \cup B = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty) \cup \{2, 3, 4\}$; $A \cap B = \{-1, 0, 6, 7\}$. **27.** a) $a > b$; b) $a < b$; c) $a > b$; d) $a < b$. **28.** a) $a = 8 \in \mathbb{N}$; b) $a = 16 \in \mathbb{N}$. **29.** a) $a = 8 \in \mathbb{N}$; b) $a = 10 \in \mathbb{N}$; c) $a = 6 \in \mathbb{N}$. **30.** a) $a = 14 \in \mathbb{N}$; b) $a = 16 \in \mathbb{N}$; $a = 4^2$. **31.** a) $A \cup B = (-5; 7)$; $A \cap B = [-3; 3]$; $A \setminus B = (3; 7)$; $B \setminus A = (-5; -3)$; b) $A \cup B = [-7; 9]$; $A \cap B = (-5; 5)$; $A \setminus B = [5; 9]$; $B \setminus A = [-7; -5]$; c) $A \cup B = (-6; 8)$; $A \cap B = [-4; 4]$; $A \setminus B = (-6; -4)$; $B \setminus A = (4; 8)$; d) $A \cup B = [-7; 6]$; $A \cap B = (-6; 3)$; $A \setminus B = [3; 6]$; $B \setminus A = [-7; -6]$. **32.** a) $A \cup B = (-7; 16)$; $A \cap B = (-6; 13)$; $A \setminus B = \emptyset$; $B \setminus A = (-7; -6] \cup [13; 16)$; b) $A \cup B = [-6; 3]$; $A \cap B = (-4; 3)$; $A \setminus B = \emptyset$; $B \setminus A = [-6; -4] \cup \{3\}$; c) $A \cup B = (-3; 9]$; $A \cap B = [2; 8)$; $A \setminus B = [8; 9]$; $B \setminus A = (-3; 2)$; d) $A \cup B = (-11; 12]$; $A \cap B = [-9; 4)$; $A \setminus B = (-11; -9)$; $B \setminus A = [4; 12]$; e) $A \cup B = (-9; 9]$; $A \cap B = [-6; 8)$; $A \setminus B = (-9; -6)$; $B \setminus A = [8; 9]$. **33.** a) $A \cup B = (-\infty; -2) \cup [4; +\infty)$; $A \cap B = (-\infty; -11] \cup (7; +\infty)$; $A \setminus B = [4; 7]$; $B \setminus A = (-11; -2)$; b) $A \cup B = (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$; $A \cap B = (-\infty; -7] \cup [4; +\infty)$; $A \setminus B = (-7; -4) \cup (3; 4)$; $B \setminus A = \emptyset$; c) $A \cup B = (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$; $A \cap B = (-\infty; -13) \cup (9; +\infty)$; $A \setminus B = [-13; -6]$; $B \setminus A = (6; 9]$. **34.** a) $A \cup B = [-8; 8)$; $A \cap B = (-5; 3]$; $A \setminus B = (3; 8)$; $B \setminus A = [-8; -5]$; b) $A \cup B = [-9; 11]$; $A \cap B = (-6; 6]$; $A \setminus B = [-9; -6]$; $B \setminus A = (6; 11)$; c) $A \cup B = (-\infty; -4) \cup (7; +\infty)$; $A \cap B = (-\infty; -10) \cup (9; +\infty)$; $A \setminus B = [-10; -4)$; $B \setminus A = (7; 9]$; d) $A \cup B = (-\infty; -3] \cup (3; +\infty)$; $A \cap B = (-\infty; -8) \cup [6; +\infty)$; $A \setminus B = (3; 6)$; $B \setminus A = [-8; -3]$. **35.** a) $a = 15$; b) $n = 21$; c) $n = 16$. **36.** a) $E = 5\sqrt{2} (|y| + |y - 1|)$. Cum $-3 \leq x \leq 4 \Rightarrow \frac{x+3}{7} \in [0; 1] \Rightarrow |y| = y$ și $|y - 1| = -y + 1 \Rightarrow E = 5\sqrt{2}$; b) $E = \sqrt{26} (|y| + |y - 1|)$; $E = \sqrt{26}$; c) $E = \sqrt{2} (|b - 1| + |b - 3|)$; $E = 2\sqrt{2}$. **37.** Cum $\sqrt{5(x-2)^2 + 4} \geq 2$, $\sqrt{(y+7)^2 + 1} \geq 1$ și $(z-5)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{5(x-2)^2 + 4} = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$; $\sqrt{(y+7)^2 + 1} = 1 \Rightarrow y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7$ și $z - 5 = 0$, deci $z = 5$. **38.** $E = 3(|x + 1| + |x - 2|)$; $E = 9$. **39.** a) $2 \in I$ și $2 \in J \Rightarrow 1 < m < 3$ și $\frac{10}{3} < n < \frac{17}{4} \Rightarrow m = 2$ și $n = 4$; b) $I \cap J = (1; 4)$; $I \cap J \cap \mathbb{N} = \{2, 3\}$.

Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1: 1. a) $(-5; 3)$; b) $[-1; 3)$; c) $(-3; 2]$; d) $[-5; +\infty)$; e) $\{1, 2, 3, 4\}$; f) $\{-3, -2, -1, 1\}$. 2. a) $A = (-4; 6)$; b) $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $[-4; 6] \cup \{8\}$. 3. $a = \frac{5}{18}$; $\frac{2}{9} < \frac{5}{18} < \frac{3}{9}$ (A). 4. $A \cap B \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $A \cup B \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 5. $a \in [-6; 4]$; $b \in [-3; 7]$; $c \in [-2; 8]$. **TESTUL 2:** 1. a) $[-7; 7]$; b) $(-3; 3)$; c) $[-3; 3]$; d) $[-6; +\infty)$; e) $\{1, 2, 3\}$; f) $\{-4, -3, -2, -1, 1, 2\}$. 2. a) $A = [-3; 5)$; b) 0; c) $[-3; 5] \cup \{6, 7\}$; d) $\{1, 2, 3, 4\}$. 3. $a = \frac{1}{4}$ și $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$. 4. Cum $a \in [-7; -1]$ și $b \in [2; 8] \Rightarrow a < b$. 5. $p = \sqrt{10} (|y| + |y - 1|) \Rightarrow p = \sqrt{10}$.

6. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, >, <$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

1. a) $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$; b) $x \in \{-2, -1\}$; c) $x \in \{-1, 0, 1\}$; d) $x \in \{1, 2\}$. 2. a) $x \in (-\infty; 10)$; b) $x \in (-\infty; 7]$; c) $x \in (-\infty; 4]$; d) $x \in (-\infty; 3]$; e) $x \in (-\infty; 5]$; f) $x \in [4; +\infty)$; g) $x \in (-\infty; -3]$; h) $x \in [6; +\infty)$; i) $x \in (-\infty; 6]$. 3. a) $x \in (-\infty; -11]$; b) $x \in (8; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; -5]$; d) $x \in [7; +\infty)$; e) $x \in (-\infty; 5]$; f) $x \in (-\infty; 2]$; g) $x \in (12; +\infty)$; h) $x \in (7; +\infty)$; i) $x \in (-\infty; -13]$. 4. a) $x \in (-\infty; 1)$; b) $x \in (-\infty; -2)$; c) $x \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; d) $x \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$; e) $x \in \left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$; f) $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; g) $x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$; h) $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$; i) $x \in (4; +\infty)$. 5. a) $x \in (-\infty; -5)$; b) $x \in (-\infty; -4)$; c) $x \in (-\infty; +15]$; d) $x \in (-6; +\infty)$; e) $x \in (-\infty; 23]$; f) $x \in (-\infty; 10)$; g) $x \in (-\infty; 16]$; h) $x \in (-\infty; -6]$. 6. a) $x \in (-\infty; 10]$; b) $x \in (13; +\infty)$; c) $x \in (1; +\infty)$; d) $x \in (-2; +\infty)$; e) $x \in [-6; +\infty)$; f) $x \in (1; +\infty)$. 7. a) $x \in (-\infty; 3]$; b) $x \in (-\infty; 2]$; c) $x \in (-\infty; 3)$; d) $x \in (-\infty; -1)$; e) $x \in [6; +\infty)$; f) $x \in (-\infty; -2]$. 8. a) $x \in \mathbb{R}$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x \in \mathbb{R}$. 9. a) $x \in (-\infty; 7)$; b) $x \in (-\infty; -13]$; c) $x \in (1; +\infty)$; d) $x \in (-13; +\infty)$. 10. a) $S = \{0, 1\}$; b) $S = \{-4, -3, -2, -1\}$; c) $S = \{-2, -1\}$. 11. a) $x \in (-\infty; -1]$; b) $x \in (10; +\infty)$; c) $x \in [1; +\infty)$; d) $x \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$; e) $x \in [-5; +\infty)$; f) $x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; g) $x \in (-\infty; -1)$. 12. a) $x \in [-2; 4]$; b) $x \in [-7; 1] \cup \{2\}$; c) $x \in (-3; 0) \setminus \{-1\}$; d) $x \in (-6; 4) \setminus \{3\}$; e) $x \in (1; 3) \setminus \{\sqrt{3}\}$; f) $x \in [-4; 1)$. 13. a) $x \in [1; 5] \cup \{-5\}$; b) $x \in (-1; 5) \setminus \{1\}$; c) $x \in (-5; 1) \setminus \{-1\}$; d) $x \in (-3; 5) \setminus \{3\}$; e) $x \in [1; 7] \setminus \{2\}$. 14. a) $x \in (-1; +\infty)$; b) $x \in (-1; +\infty)$; c) $x \in (2\sqrt{2} + 2; +\infty)$; d) $x \in (6 + \sqrt{2}; +\infty)$; e) $x \in (-\infty; 2\sqrt{3} - 3]$. 15. $A = \{-1, 1, 2, 3\}$. 16. $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. 17. $x \in \{3, 4\}$. 18. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. 19. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$; e) $\frac{3x+2}{2x+5}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$; f) $\frac{4x-3}{3x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$; g) $\frac{2x+3}{2x-1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$; h) $\frac{x-1}{x+1}$;
 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$; i) $\frac{2x-3}{2x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}$. 30. a) $\frac{x+1}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$; b) $\frac{2x-1}{2x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$; c) $\frac{3x-2}{2x-3}$;
 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$; d) $\frac{3x-2}{3x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$; e) $\frac{2x+5}{2x-1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$; f) $\frac{3x-2}{3x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$; g) $\frac{2x+3}{2x-1}$;
 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$; h) $\frac{3x+4}{2x+5}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}, 2\right\}$. 31. a) $E(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$; b) $A = \{-3, 3, 7\}$. 32. a) $E(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$; $F(x) = (x+2)(x-1)(x+1)$; b) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$, $\frac{E(x)}{F(x)} = \frac{x-2}{x-1}$; c) $A = \left\{-2, -1, \frac{3}{2}\right\}$. 33. a) $E(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)$; $F(x) = x(x-1)(x-3)(x+2)$; b) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 3\}$, $\frac{E(x)}{F(x)} = \frac{x+1}{x-3}$; c) $A = \{-1, 2, 4, 5, 7\}$.
34. a) $\frac{3x-1}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; b) $\frac{2x+3}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$; c) $\frac{5x+1}{3x+5}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$; d) $\frac{x-6}{3x-4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$; e) $\frac{5x+8}{x+3}$;
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$; f) 3; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$; g) $\frac{3x-4}{x+6}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$; h) $\frac{3x+1}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -2\}$. 35. a) $\frac{x-1}{x+7}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 1\}$;
b) $\frac{x-1}{x+6}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$; c) $\frac{x-1}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$; d) $\frac{x-2}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$; e) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$; f) 1; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$; g) $\frac{x-1}{x+9}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-9, 1\}$; h) $\frac{x+2}{x+8}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-8, -2\}$. 36. a) $\frac{x+2}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; b) $\frac{x+3}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$;
c) $\frac{x+2}{x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$; d) $\frac{x-1}{x+1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$; e) $\frac{x+1}{x+2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$; f) $\frac{x+4}{x-4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 4\}$.
37. a) $\frac{x-1}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$; b) $\frac{x^2+x-1}{x-1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; c) $\frac{x-2}{x-1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$; d) $\frac{x-1}{x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; e) $\frac{x-1}{x+1}$;
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; f) $\frac{x-2}{x-1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. 38. a) $\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}$; b) $\frac{2x^2+x-2}{2x^2+x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$; c) $\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x-2}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-1, \sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1\right\}$; d) $\frac{x^2+x+3}{x^2+x+4}$; e) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+4}$; f) $\frac{x^2-x+4}{x^2-x+1}$. 39. a) $\frac{x^2-x+1}{x^2-x+7}$; b) $\frac{x^2+x-1}{x^2+x+4}$;
c) $\frac{2x^2+x+4}{2x^2+x+3}$; d) $\frac{x^2-x-1}{x^2-x+2}$; e) $\frac{x^2-x+6}{x(x-1)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. 40. a) $x+2$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$; b) $\frac{x^2-x-3}{x-3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\}$;
c) x ; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; d) $\frac{x+1}{x-1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I: ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

1. a) plan; b) dreaptă; c) dreaptă; d) 6. 2. a) A; b) A; c) A; d) A. 3. AB, AC, AE, BC, BD, DE. 4. a) 6; b) 4; c) 6.
 5. a) o infinitate; b) o infinitate. 6. a) 8 drepte; b) $(MAB) \cap \alpha = AB$; $(DBC) \cap \alpha = BC$; $(MAC) \cap \alpha = AC$; c) $(BDC) \cap$
 $\cap (MAC) = DC$. 7. a) AB, AC, AD, BC, BD, DC; deci, 6 drepte; b) $BC = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{ABC}}{d(A, BC)} = 12$ cm; $\mathcal{A}_{BCD} = 90$ cm².
 8. a) $\mathcal{A}_{DAM} = 72\sqrt{5}$ cm²; b) $MN = 4\sqrt{15}$ cm. 9. Se arată că ΔMAD este dreptunghic, $\angle M = 90^\circ$; $\mathcal{A}_{MAD} = 18\sqrt{2}$ cm².
 10. Se arată că ΔMAN este dreptunghic, $\angle MAN = 90^\circ$; $\mathcal{A}_{MAN} = 36\sqrt{5}$ cm². 11. $\mathcal{A}_{MAD} = 24$ cm². 12. a) 6 drepte;
 b) 15 drepte. 13. a) 8 drepte; b) 10 drepte. 14. Dacă cele 5 puncte coplanare sunt coliniare, se determină 6 drepte.
 Dacă din cele 5 puncte, doar 4 sunt coliniare, atunci se determină 10 drepte. Nu se pot obține 9 drepte.

2. Determinarea planului

1. (ABC) , (ABD) , (ACD) , (BCD) . 2. a) A; b) A; c) F. 3. Din prima secundă. 4. a) (MAB) , (MAC) , (MAD) , (MBC) , (MBD) , (MCD) , (ABC) ; b) $(MAD) \cap (ABC) = AD$; $(MAC) \cap (MBD) = MO$; $(MAC) \cap (MBC) = MC$. 5. a) A; b) A; c) F; d) A; e) F. 6. a) (ABC) , (ABN) , (ABD) , (ACD) , (ACM) , (AMN) , (BCD) ; b) $(AMN) \cap (BCD) = MN$; $(ADC) \cap (AMN) = AN$; $(AMN) \cap (ABD) = AM$. 7. a) $(ABC) \cap \alpha = BC$; $M \in AD \subset (ABC)$; $M \in \alpha \Rightarrow M \in BC$; b) $\triangle MDC \sim \triangle MAB \Rightarrow MA = 48$ cm și $MB = 60$ cm; $\mathcal{P}_{MAB} = 132$ cm (figura 1). 8. a) $EF \cap \alpha = \{P\}$; $P \in EF \subset (ABC)$; $P \in \alpha$; cum $(ABC) \cap \alpha = BC \Rightarrow P \in BC$; b) $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ – dreptunghic, $\angle A = 90^\circ \Rightarrow EF = 10$ cm (cu teorema lui Pitagora în $\triangle AEF$); $\mathcal{P}_{BCFE} = 92$ cm (figura 2). 9. $(MQT) \cap (NRP) = RT$ (figura 3). 10. a) $M \in BC \subset (ABC)$ și $M \in \alpha$. Cum $(ABC) \cap \alpha = AD \Rightarrow M \in AD$ (figura 4); b) Se observă că DC este linie mijlocie în $\triangle MAB$, deci $AD = DM = 15\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{S}_{MAB} = 450\sqrt{3}$ cm². 11. Pot determina un plan sau maxim 7 plane. 12. a) MA ; MB ; MC ; MD ; ME ; MF ; AB ; AC ; AD ; AE ; AF ; BC ; BD ; BE ; BF ; CD ; CE ; CF ; DE ; DF ; EF ; b) 16 plane. 13. a) 5; b) 10.

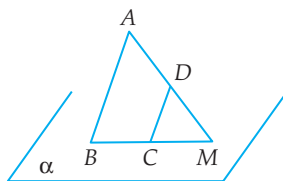


Fig. 1

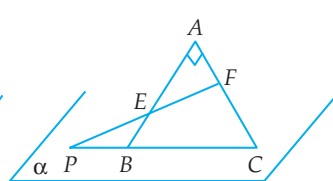


Fig. 2

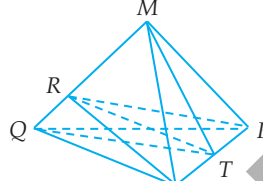


Fig. 3

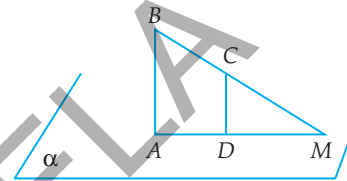


Fig. 4

3. Corpuri geometrice

3.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat

1. a) Tetraedru; (BCD) ; (ABC) , (ACD) , (ABD) ; AB , AC , AD ; b) Piramidă patrulateră; $(ABCD)$; (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SAD) ; SA , SB , SC , SD ; c) Piramidă hexagonală; $(ABCDEF)$; (VAB) , (VBC) , (VCD) , (VDE) , (VEF) , (VAF) ; VA , VB , VC , VD , VE , VF . 2. a) 48 cm; b) $64\sqrt{3}$ cm². 3. 400 cm². 4. 72 cm. 5. $144\sqrt{3}$ cm². 6. a) $\mathcal{S}_{VAB} = 12\sqrt{3}$ cm²; b) $VA + VB + VC = 12\sqrt{3}$ cm. 7. a) $24\sqrt{2}$ cm; b) 24 cm. 8. a) $VA = AB \Rightarrow \triangle VBC$ și $\triangle VDC$ – echilaterale $\Rightarrow BM = DM = 6\sqrt{3}$ cm. Deci $\triangle MBD$ – isoscel; b) $\mathcal{P}_{MBD} = 12(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci OM este linie mijlocie; $OM = \frac{VA}{2} = 6$ cm și $OM \perp BD$; $\mathcal{S}_{MBD} = \frac{BD \cdot OM}{2} = 36\sqrt{2}$ cm². 9. a) $OM = \frac{VA}{2} = 10$ cm $\Rightarrow VA = 20$ cm; $a_p = 16$ cm; b) 768 cm². 10. a) 108 cm²; b) $\triangle SMN$ – echilateral, $SM = SN = MN = 6$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{SMN} = 18$ cm și $\mathcal{S}_{SMN} = 9\sqrt{3}$ cm². 11. a) Da; b) $BC = 2CM$, unde $CM \perp AD$; $BC = 10\sqrt{3}$ cm. 12. a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 40$ cm; b) $\mathcal{S}_{VAC} = 50$ cm². 13. $18\sqrt{2}$ cm. 14. $\triangle VAC$ – dreptunghic; $\angle AVC = 90^\circ$ (se folosește reciproca teoremei lui Pitagora); $\mathcal{S}_{VAC} = 72$ cm². 15. $MN^2 = VM^2 + VN^2$, deci $\triangle MVN$ – dreptunghic, $\angle MVN = 90^\circ$; $\mathcal{S}_{MVN} = 64$ cm². 16. a) $a_p = 8$ cm; b) $\triangle MAB \equiv \triangle MAC$ (LUL) $\Rightarrow MB \equiv MC$. Cum $\mathcal{P}_{MBC} = 2BM + BC =$ minim, BC – constant $\Rightarrow BM$ – minim $\Rightarrow BM \perp VA$; $CM \perp VA$; $\mathcal{S}_{VAB} = \frac{VA \cdot BM}{2} \Rightarrow BM = 9,6$ cm, $\mathcal{P}_{MBC} = 31,2$ cm. 17. a) $BE = CE = 6\sqrt{3}$ cm; $\triangle BEC$ – isoscel; b) $EF = 6\sqrt{2}$ cm; c) $\mathcal{S}_{BEC} = \frac{BC \cdot EF}{2} = 36\sqrt{2}$ cm². 18. a) $l = R\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm; b) $a_p = 6\sqrt{6}$ cm; c) $324\sqrt{2}$ cm². 19. a) $\triangle SMN$ – echilateral $\Rightarrow SM = AB = MN = 12$ cm ($a_p = l$); $VA = 6\sqrt{5}$ cm; b) $\mathcal{P}_{SAC} = 12(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ cm; c) 288 cm². 20. a) $\triangle MCB \equiv \triangle MCD$ (LUL) $\Rightarrow MB \equiv MD$; $\mathcal{P}_{MBD} = 2MB + BD =$ minim $\Rightarrow BD$ – constant $\Rightarrow MB$ – minim $\Rightarrow BM \perp VC$; $a_p = 12\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{S}_{VBC} = \frac{BC \cdot a_p}{2} = \frac{VC \cdot BM}{2} \Rightarrow BM = 8\sqrt{2}$ cm; c) $\mathcal{P}_{MBD} = 28\sqrt{2}$ cm. 21. $AD = SD = 12\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{S}_{SAD} = 144\sqrt{2}$ cm². 22. Se desfășoară fața (VAC) , astfel încât să fie coplanară cu (ABC) . Suma $OP + PM$ este minimă când punctele M , P și O sunt coliniare. Avem $\triangle OPC \sim \triangle MPA$. Se obține $\frac{PC}{PA} = \frac{2}{3}$, adică $PC = 4$ cm (figura 1). 23. Se desfășoară fața (VDC) , astfel încât să fie coplanară cu (ABC) ; $AP + PM$ este minimă când punctele A , P și M sunt coliniare. Fie $MQ \perp DC$, $Q \in DC$; $\triangle MPQ \sim \triangle APD$, de unde $DP = \frac{3}{4}$ cm (figura 2).

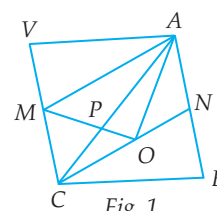


Fig. 1

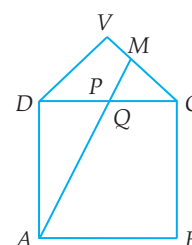


Fig. 2

Cuprins

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚĂLĂ	5
Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale	5
ALGEBRĂ	
Capitolul I: INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$	11
1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr.....	12
<i>Test de autoevaluare</i>	17
2. Reprezentarea pe axă. Ordonarea numerelor reale. Valoarea absolută. Aproximarea numerelor reale	19
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	24
<i>Test de autoevaluare</i>	25
3. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	27
4. Intervale în $\mathbb{R}$. Definiție. Reprezentare pe axă.....	28
5. Operații cu intervale	32
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	38
<i>Test de autoevaluare</i>	39
6. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $>$, $<$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	41
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	44
<i>Test de autoevaluare</i>	45
Capitolul II: CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$	47
A. Operații cu numere reale reprezentate prin litere	48
1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	48
2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	51
3. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a numerelor reale reprezentate prin litere	55
4. Ordinea efectuării operațiilor cu expresii algebrice	57
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	60
<i>Test de autoevaluare</i>	61
5. Formule de calcul prescurtat.....	63
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	68
<i>Test de autoevaluare</i>	69
6. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$	71
6.1. Metoda factorului comun	71
6.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat.....	73
6.3. Gruparea termenilor	77
6.4. Metode combinate	79
6.5. Maxime și minime. Inegalități algebrice.....	84
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	87
<i>Test de autoevaluare</i>	89
B. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	91
7. Amplificarea. Simplificarea	91
<i>Test de autoevaluare</i>	97

GEOMETRIE

Capitolul I: ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU	99
1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei	100
2. Determinarea planului	102
3. Corpuri geometrice.....	104
3.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat.....	104
3.2. Prisma dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul.....	107
3.3. Cilindrul circular drept. Conul circular drept.....	110
<i>Test de autoevaluare</i>	113
4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu, relația de paralelism în spațiu	115
5. Unghiuri cu laturile respectiv paralele. Unghiul a două drepte în spațiu. Drepte perpendiculare	117
6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan	119
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	123
<i>Test de autoevaluare</i>	125
7. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele	127
8. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă. Trunchiul de con circular drept	130
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	133
10. Perpendicularitate.....	134
10.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan.....	134
<i>Test de autoevaluare</i>	137
10.2. Înălțimea unei piramide. Înălțimea unui con circular drept.....	139
10.3. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme. Înălțimea cilindrului circular drept. Înălțimea trunchiului de piramidă. Înălțimea trunchiului de con	140
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	143
<i>Test de autoevaluare</i>	145
10.4. Plane perpendiculare.....	147
11. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan.....	149
12. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment.....	151
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	154
<i>Test de autoevaluare</i>	155
13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane	157
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	160
<i>Test de autoevaluare</i>	161
14. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței dintre două plane paralele	163
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	167
<i>Test de autoevaluare</i>	169
15. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	171
TESTE RECAPITULATIVE	172
PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR	177
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	181