

7

MATE[®]
2000⁺

consolidare

Anton Negrilă
Maria Negrilă

partea I

matematică

algebră • geometrie

Editura Paralela 45

Nume:

Prenume:

Clasă:

Școală:

--	--	--

--	--	--

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca

Tehnoredactare: Adriana Vlădescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

NEGRILĂ, ANTON

Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a /

Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Pitești : Paralela 45, 2026 –
2 vol.

ISBN 978-973-47-4463-3

Partea 1. – Pitești : Paralela 45, 2026. –

ISBN 978-973-47-4464-0

I. Negrilă, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2026

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul **aplicației MATE 2000+** este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!

Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

- * Inițiere (înțelegere)
- ** Consolidare (aplicare și exersare)
- *** Excelență (aprofundare și performanță)
- **** Supermate

Legendă

- PE** = portofoliul elevului
- PP** = portofoliul profesorului
- PE-PP** = portofoliul elevului - portofoliul profesorului

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚĂLĂ

PE TESTE CU EXERCII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE PENTRU PREGĂTIREA TESTĂRII ÎNȚĂLE

ALGEBRĂ

TESTUL 1

1. a) Se consideră numerele:

$$a = (-4) \cdot (+6) - [(-24) : (+3) - (-28) : (-7) - (+16) : (-8)] \text{ și}$$

$$b = [(-6) \cdot (+2) - (-5) \cdot (+3) - (-7) \cdot (-3)] : (-12 + 15).$$

Calculați $n = a - b$.

b) Se consideră numerele:

$$x = (-3) \cdot (+7) - [(-18) : (+3) - (+24) : (-6) + (-32) : (-4)] \cdot (-11 + 9) \text{ și}$$

$$y = [(-7) \cdot (+4) - (-8) \cdot (+3) - (-6) \cdot (-2)] : (-6 + 8).$$

Calculați $n = x + y$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $27 - 3(2x - 3) = 18;$

b) $2(3x + 4) - 15 = 11;$

c) $2(5x - 13) + 33 = 3(2x + 1) + 20;$

d) $3x + 5 - 2(x + 2) = 8 + 3(x - 1).$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $11 - 2(3x - 4) > 1;$

b) $2(2x + 1) + 13 \leq 3(x - 1) + 22;$

c) $17x + 19 \leq 6(2x + 5) + 2(x - 5) + 11.$

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $|x + 3| \leq 2;$

b) $|2x + 5| < 9;$

c) $2[3 \cdot |2x - 7| - 7] - 23 < 17.$

5. Determinați valorile întregi ale lui n , pentru care:

a) $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{Z};$

b) $\frac{3n+14}{n+2} \in \mathbb{Z};$

c) $\frac{4n+7}{2n-1} \in \mathbb{Z};$

d) $\frac{3n+8}{2n+1} \in \mathbb{Z}.$

6. Calculați:

a) $\left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \left(+\frac{8}{25}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) \cdot \left(-\frac{15}{16}\right);$

b) $\left(+\frac{16}{21}\right) \cdot \left(-\frac{35}{32}\right) - \left(-\frac{24}{49}\right) \cdot \left(+\frac{21}{32}\right);$

c) $\left(-\frac{5}{18} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right) - \left(-\frac{13}{24} + \frac{7}{18}\right) \cdot \left(-1\frac{5}{22}\right);$

d) $\left(-\frac{1}{10} + \frac{2}{15}\right) \cdot \left(-7\frac{1}{2}\right) + (-4) \cdot \left(-\frac{7}{20} + \frac{4}{15}\right).$

7. Numerele 377, 517 și 803, împărțite la același număr natural nenul n , dau câturile nenule și resturile egale cu 17, 13 și, respectiv, 11. Determinați valorile împărțitorului n .

8. Determinați cel mai mic număr natural n , care împărțit pe rând la 20, 24 și, respectiv, 28, se obțin câturile nenule, iar resturile egale cu 14, 18 și, respectiv, 22.

9. Determinați cifrele a și b , astfel încât următoarele relații să fie adevărate:

a) $\overline{a24b} : 12;$

b) $\overline{a68b} : 18;$

c) $\overline{7a4b} : 36.$

GEOMETRIE

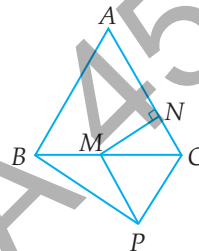
TESTUL 1

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$, iar $N \in AC$ și $BN \cap CM = \{P\}$. Arătați că:

- a) $BN \equiv CM$; b) $PM \equiv PN$; c) $AP \perp BC$.

2. În figura alăturată, triunghiurile ABC și PMC sunt echilaterale, punctul M este mijlocul laturii BC , iar punctul N este piciorul perpendicularei duse din M pe latura AC .

- a) Arătați că dreptele AB și CP sunt paralele.
b) Calculați măsura unghiului ABP .
c) Dacă pe semidreapta AB se ia un punct T , astfel încât punctul B să fie interior



segmentului AT , iar $BT = \frac{AB}{2}$, arătați că punctele T , M și N sunt coliniare.

3. Se consideră triunghiul ABC , iar punctul D este mijlocul laturii BC , astfel încât $AD \equiv BD \equiv CD$.

- a) Arătați că $\angle BAC = 90^\circ$. b) Dacă $\angle B = 2\angle C$, arătați că $BC = 2AB$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$, în care punctele D și E sunt mijloacele laturilor AC și AB . Știind că punctul M este simetricul punctului C față de E și N este simetricul punctului B față de D , demonstrați că:

- a) $BD \equiv CE$; b) $AM \equiv AN$; c) punctele M , A , N sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$ și $N \in AC$, iar $BN \cap CM = \{P\}$. Demonstrați că:

- a) $BN \equiv CM$; b) $\triangle BPC$ este isoscel;
c) semidreapta AP este bisectoarea unghiului BAC .

TESTUL 2

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $N \in AB$ și $P \in AC$, astfel încât $BN \equiv CP$, iar $BP \cap CN = \{M\}$. Arătați că:

- a) $BP \equiv CN$; b) $NP \parallel BC$; c) Triunghiul BMC este isoscel.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $\angle BAC = 90^\circ$, iar punctul D este mijlocul ipotenuzei BC . Se notează cu E simetricul punctului A față de punctul D . Arătați că:

- a) $AB \equiv CE$; b) $\angle ACE \equiv \angle BAC$; c) $AD = \frac{BC}{2}$.

3. În triunghiul ABC , BM și CN sunt înălțimi, $M \in AC$ și $N \in AB$. Pe semidreapta MB se ia punctul P , astfel încât $BP \equiv AC$, punctul B fiind interior segmentului PM , iar pe semidreapta NC se ia punctul T , astfel încât $CT \equiv AB$, punctul C fiind interior segmentului NT . Arătați că:

- a) $\angle ABP \equiv \angle ACT$; b) $AP \equiv AT$; c) $\angle PAT = 90^\circ$.

4. În triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$, se iau punctele M și N pe latura BC , astfel încât $BM \equiv MN \equiv NC$, punctele P și Q fiind situate pe laturile AB , respectiv AC , astfel încât $PB \equiv QC$, iar $PN \cap QM = \{T\}$. Arătați că:

- a) $AM \equiv AN$; b) $PN \equiv QM$; c) $AT \perp MN$.

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

PP

Competențe specifice

- C1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$
- C2. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
- C3. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
- C4. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
- C5. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
- C6. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

RĂDĂCINA PĂTRATĂ

PE-PP

1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT



- Numărul natural x se numește **pătrat perfect** dacă există numărul întreg a cu proprietatea că $x = a^2$, unde $a \in \mathbb{Z}$.
- Numărul $|a|$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului x și se notează cu $\sqrt{x}$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr întreg x .

OBSERVAȚIE: Dacă x este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este x , și anume $\sqrt{x}$ și $-\sqrt{x}$. Evident că numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{x^2} = |a|$.

• $x = a^2$ implică $\sqrt{x} = \sqrt{a^2} = |a|$.

• Dacă $a \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2} = a$.

EXAMPLE: $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = |10| = 10$; $\sqrt{64} = \sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$; $\sqrt{25x^2y^4} = \sqrt{(5xy^2)^2} = |5xy^2| = 5y^2|x|$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE

ÎNȚELEGERE ♦

1. Copiați și completați următorul tabel ($x \in \mathbb{Z}$):

x	-5	-3	-2	0			9	12
x^2					16	36		

2. a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mici decât 90.

b) Scrieți toate numerele pătrate perfecte cuprinse între 140 și 290.

c) Scrieți pătratele perfecte de trei cifre, mai mari ca 300.

3. Determinați numerele raționale care au pătratul egal cu:

a) 25;

b) 64;

c) 121;

d) 729;

e) 1296.

4. Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:

a) 36;

b) 64;

c) 1;

d) 169;

e) 324;

f) 529;

g) $2^8 \cdot 81$;

h) $49 \cdot 64 \cdot 5^2$;

i) $4^3 \cdot 5^6$;

j) $16^3 \cdot (-5)^4$;

k) $121 \cdot 169^3$.

5. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) 36; 4; 15; 56; 169; 190; 196; 225; 240; 256;

b) 13^2 ; $(-9)^4$; 3^8 ; $(-7)^5$; 18^3 ; $(-12)^{18}$; $(-21)^7$; $(-28)^6$;

c) 5^{8n} ; 7^{6n+4} ; 28^{n^4+1} ; 15^{n^2+n} ; 12^{n^2-n+6} ; $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Fie $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ și $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$.

a) Determinați elementele mulțimii B .

b) Determinați elementele mulțimii $C = \{z \mid z = \sqrt{y}, y \in B\}$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\sqrt{64} = 8$; b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$; c) $\sqrt{123^2} = 123$; d) $\sqrt{(-432)^2} = 432$;
 e) $\sqrt{49a^2} = 7a, a < 0$; f) $\sqrt{(-25a^2)^2} = 5a^2$; g) $\sqrt{(-64a)^4} = 8a^2$; h) $\sqrt{81a^8b^2} = 9a^4b, b < 0$.

8. Rezolvați ecuațiile:

- a) $x^2 = 36$; b) $x^2 = 1600$; c) $5x^2 = 245$; d) $-2x^2 = -72$;
 e) $x^2 + 9 = 265$; f) $x^2 - 14 = 155$; g) $-3x^2 + 175 = -257$; h) $-2x^2 + 27 = -101$;
 i) $(x - 3)^2 = 4$; j) $(x + 4)^2 = 9$; k) $25 - (x + 3)^2 = 9$; l) $-144 - (x - 5)^2 = -225$;
 (i) în mulțimea numerelor naturale;
 (ii) în mulțimea numerelor întregi.

9. Folosind formula $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, unde $a \neq 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, calculați:

- a) $\sqrt{x+1}$, unde $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{201}$; b) $\sqrt{2x+1}$, unde $x = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{249}$;
 c) $\sqrt{4x+1}$, unde $x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{359}$; d) $\sqrt{8x+1}$, unde $x = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{98}$;
 e) $\sqrt{35x+1}$, unde $x = 1 + 6^2 + 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{198}$; f) $\sqrt{63x+1}$, unde $x = 1 + 8^2 + 8^4 + 8^6 + \dots + 8^{2018}$.

10. Arătați că x este un număr natural pătrat perfect.

- a) $x = (1 + 2 + 3 + \dots + 98) + 49$; b) $x = 1 + 3 + 5 + \dots + 225$;
 c) $x = 1 + 3 + 5 + \dots + 2019$; d) $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 2018 + 1010$;
 e) $x = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 864 + 41616$; f) $x = 3(1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2017) - 1009 \cdot 2018$.

11. Calculați x și arătați că este pătratul unui număr natural, după care calculați $\sqrt{x}$:

- a) $x = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 98) + 99$; b) $x = 8(1 + 2 + 3 + \dots + 49) + 1225$;
 c) $x = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 648 - 324^2$; d) $x = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 224 + 16 \cdot 450$;
 e) $x = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 450 - 225^2$; f) $x = 3(1 + 3 + 5 + \dots + 99) - 5000$;
 g) $x = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100 - 25 \cdot 2$; h) $x = 1 + 2 + 3 + \dots + 120 + 2 \cdot 242$.

12. Calculați numărul natural x și arătați că este pătratul unui număr natural, după care calculați $\sqrt{x}$:

- a) $x - 9 = 8(9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{n-1}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; b) $x - 25 = 24(25 + 25^2 + 25^3 + \dots + 25^{n-1}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;
 c) $x - 16 = 15(16 + 16^2 + 16^3 + \dots + 16^{n-1}), n \in \mathbb{N}$; d) $x - 4 = 3(4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-2}), n \in \mathbb{N}$.

13. Arătați că numărul x este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde: $x = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$.

14. Se dau numerele:

$$a = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2017} + 2^{2019} \text{ și } b = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2016} + 2^{2018}.$$

Arătați că numărul $x = a + b + 1$ este un pătrat perfect.

15. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte, după care calculați $\sqrt{x}$:

- a) $x = 6 + 12 + 18 + \dots + 288$; b) $x = 4 + 8 + 12 + \dots + 196$; c) $x = 1 + 3 + 5 + \dots + 1001$;
 d) $x = 1 + 3 + 5 + \dots + 2021$; e) $x = 1203 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2404$.

16. Arătați că numerele de mai jos nu pot fi pătrate perfecte:

- a) $x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2001}$; b) $x = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2001}$.

17. a) Arătați că numărul $x = 1010 + 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2018$ este pătrat perfect și calculați $\sqrt{x}$.

b) Arătați că numărul $a = 432 \cdot 289 + 1 + 2 + 3 + \dots + 288$ este pătrat perfect și calculați $\sqrt{a}$.

c) Arătați că numărul $n = 361^2 - 2(1 + 2 + 3 + \dots + 360)$ este pătrat perfect și calculați $\sqrt{n}$.

d) Arătați că numărul $n = 6^3 + 20 + 21 + 22 + \dots + 37$ este pătrat perfect și rezolvați ecuația $x^2 = n$.

e) Arătați că numărul $n = 243^2 - (240^2 + 3 \cdot 240)$ este pătrat perfect și calculați $\sqrt{n}$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

18. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

- a) $x = 5n + 3$; b) $x = 15n + 8$; c) $x = 25n - 7$; d) $x = 10n + 2$;
e) $x = 6^n + 2$; f) $x = 10^n + 23$; g) $x = 31^n + 16$; h) $x = 25^n + 18$;
i) $x = 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + \dots + 8^{2017}$; j) $x = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2021}$.

19. Arătați că numărul $n = \sqrt{x9 \cdot \overline{x7}} + 1$ este număr natural, pentru orice cifră nenulă x .

20. Arătați că numărul $A = \sqrt{5^{4n+2} \cdot 9^{2n+2} + 25^{2n} \cdot 3^{4n+4} \cdot 24}$ este număr natural, oricare ar fi numărul natural n .

21. Fie numărul natural $a = 7^{2n} \cdot 576^{n+1} + 24^{2n} \cdot 49^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numărul $\sqrt{a}$ este natural par, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

22. Fie numărul natural $a = 5^{2n} \cdot 144^{n+1} + 12^{2n} \cdot 25^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numărul $\sqrt{a}$ este natural par, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

23. Efectuați:

- a) $\sqrt{14^2}$; $\sqrt{23^4}$; $\sqrt{(-35)^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{(-7)^4}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{(-a)^8}$; $\sqrt{a^6}$; $a \in \mathbb{Z}$;
b) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2}$; $\sqrt{16^2 \cdot 5^2}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$; $\sqrt{2^6 \cdot 5^2 \cdot 3^4}$; $\sqrt{18^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$; $\sqrt{12^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$.

24. Calculați:

- a) $\sqrt{(-2)^6 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2}$; b) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 7^2 \cdot 5^4}$; c) $\sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-7)^2}$;
d) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6 \cdot 2^4}$; e) $\sqrt{(-2)^4 \cdot (-14)^2 \cdot (-15)^2}$; f) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 7^2 \cdot (-2)^2}$;
g) $\sqrt{2^{10} \cdot 5^2}$; h) $\sqrt{(-2)^6 \cdot (-3)^4}$; i) $\sqrt{(-2)^8 \cdot (-3)^2 \cdot 5^2}$;
j) $\sqrt{5^2 \cdot 11^2 \cdot 3^4}$; k) $\sqrt{(-3)^6 \cdot (-2)^{10}}$; l) $\sqrt{(-7)^2 \cdot (-26)^2}$.

25. Calculați:

- a) $\sqrt{(-23)^2}$; b) $\sqrt{(-23)^4}$; c) $\sqrt{(-23)^6}$; d) $\sqrt{(-17)^8}$; e) $\sqrt{(-15)^2}$;
f) $\sqrt{(-36)^4}$; g) $\sqrt{(-48)^2}$; h) $\sqrt{(-12)^4}$; i) $\sqrt{(-2)^{24}}$; j) $\sqrt{2^{2018}}$;
k) $\sqrt{3^{2020}}$; l) $\sqrt{(-6)^{2018}}$; m) $\sqrt{(-7)^{2020}}$; n) $\sqrt{(-5)^{2016}}$.

26. Folosind descompunerea în produs de puteri de factori primi, calculați rădăcina pătrată:

- a) $\sqrt{576}$; $\sqrt{729}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{324}$; b) $\sqrt{400}$; $\sqrt{784}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{676}$;
c) $\sqrt{1600}$; $\sqrt{1296}$; $\sqrt{1764}$; $\sqrt{2025}$; d) $\sqrt{2500}$; $\sqrt{2304}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{5184}$.

27. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați:

- a) $\sqrt{3721}$; $\sqrt{1936}$; $\sqrt{4624}$; $\sqrt{9216}$; b) $\sqrt{7225}$; $\sqrt{2209}$; $\sqrt{7056}$; $\sqrt{3969}$;
c) $\sqrt{2116}$; $\sqrt{3481}$; $\sqrt{3844}$; $\sqrt{2916}$; d) $\sqrt{12769}$; $\sqrt{45369}$; $\sqrt{15129}$; $\sqrt{15876}$.

28. Calculați:

- a) $\sqrt{20449} + \sqrt{285156} - \sqrt{54289}$; b) $\sqrt{2916} + \sqrt{41616} - \sqrt{11664}$;
c) $\sqrt{229441} + \sqrt{301401} - \sqrt{546121}$; d) $\sqrt{467856} + \sqrt{264196} - \sqrt{826281}$.

29. Calculați:

- a) $\sqrt{6^3 \cdot 6}$; b) $\sqrt{11^4 \cdot 9}$; c) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 25}$; d) $\sqrt{196 \cdot 2^6 \cdot 81}$;
 e) $\sqrt{15^2 - 9^2 + 5^2}$; f) $\sqrt{72^2 - 71^2 + 5^2 + 1}$; g) $\sqrt{7(12^2 - 9^2)}$; h) $\sqrt{2^8(7^2 - 2^4 \cdot 3)}$.

30. Efectuați:

- a) $\sqrt{2^6(5^2 - 3^2)}$; b) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4 + 5^2 \cdot 3^2}$; c) $\sqrt{5^2 \cdot 17^2 - 2^6 \cdot 5^2}$; d) $\sqrt{13^2 - 5^2 + 9^2}$;
 e) $\sqrt{15^2 + 8^2}$; f) $\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}$; g) $\sqrt{18^2 + 24^2 + 40^2}$; h) $\sqrt{26^2 - 24^2}$.

31. Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{12^2 + 9^2}$; b) $\sqrt{15^2 - 9^2 + 16^2}$; c) $\sqrt{15^2 + 20^2}$; d) $\sqrt{30^2 - 24^2}$;
 e) $\sqrt{3^2 \cdot 5^2 + 2^6}$; f) $\sqrt{3^4 \cdot 13^2 - 3^4 \cdot 5^2}$; g) $\sqrt{2^6 \cdot 7^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2}$.

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ♦ ♦ ♦

32. Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{6 \cdot \sqrt{576}} + \sqrt{3 \cdot \sqrt{144}}$; b) $\sqrt{760 - \sqrt{961}} + \sqrt{1331 - \sqrt{1225}}$;
 c) $\sqrt{63 + 3 \cdot \sqrt{729}} + \sqrt{540 + 2 \cdot \sqrt{324}}$; d) $\sqrt{399240 + \sqrt{32902 + \sqrt{910116}}}$.

33. Calculați:

- a) $\sqrt{6911 - \sqrt{261850 - \sqrt{531441}}}$; b) $\sqrt{286594 - \sqrt{135920 + \sqrt{58081}}}$;
 c) $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{455625}}} + \sqrt{18\sqrt{24\sqrt{46656}}}$; d) $\sqrt{669 + \sqrt{75\sqrt{18\sqrt{16384}}}}$.

34. Calculați:

- a) $\sqrt{119010 - \sqrt{455025 - \sqrt{561001}}}$; b) $\sqrt{66673 - \sqrt{389963 - \sqrt{344569}}}$.

PE-PP SUPERMATE ♦ ♦ ♦ ♦

35. Determinați $x \in \mathbb{N}$, știind că:

- a) $\sqrt{1 \cdot 7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3 + \dots + 6 \cdot 7^{2019}} = 7^x$; b) $9\sqrt{3^{2018} - 2 \cdot 3^{2017} - 2 \cdot 3^{2016} - \dots - 2 \cdot 3 - 2} = 3^x$;
 c) $\sqrt{1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{2019}} = 3^x$; d) $\sqrt{2^{1980} - 2^{1979} - 2^{1978} - \dots - 2^{1002}} = 2^x$;
 e) $\sqrt{13 + 12 \cdot 13 + 12 \cdot 13^2 + 12 \cdot 13^3 + \dots + 12 \cdot 13^{2018} + 12 \cdot 13^{2019}} = 13^{2x}$.

36. Demonstrați că numărul $a = 5^{2n+1} \cdot 4^{3n+2} + 10^{2n+1} \cdot 2^{4n+1}$ este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}$.

37. Calculați $x \in \mathbb{N}$, știind că $\sqrt{3^{600} - 2 \cdot 3^{599} - 2 \cdot 3^{598} - 2 \cdot 3^{597} - \dots - 2 \cdot 3^{479} - 2 \cdot 3^{478}} = 3^x$.

38. Câte pătrate perfecte conțin mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 144\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 400\}?$$

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

PE-PP

1. MODULUL UNUI NUMĂR REAL. REPRESENTAREA PE AXĂ A NUMERELOR REALE. APROXIMĂRI ȘI ROTUNJIRI. ORDONĂRI



- Numerele care au partea zecimală infinită și neperiodică se numesc **numere iraționale**.

Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ și p nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{p}$ este număr irațional.

EXAMPLE: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{2018}$.

- **Reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale este mulțimea numerelor reale.

Se notează cu $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale și cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale.

Avem șirul de incluziuni: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$;

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- **Modulul** unui număr real x este: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

$|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

$|x| = |-x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

- Numim **axă** a numerelor reale o dreaptă, cu un punct fixat numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură.

Oricărui **număr real** îi corespunde **un singur punct** pe axa numerelor și, reciproc, oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un singur număr real.

Exercițiu: Vom arăta că numărul $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrație:

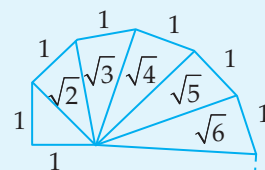
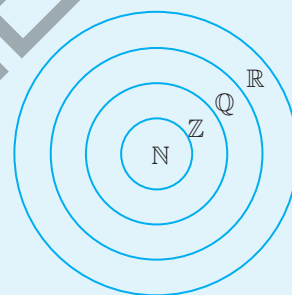
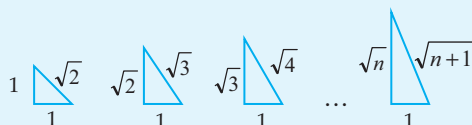
Presupunem că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}^*$ și $(m, n) = 1$, astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Rezultă că $m^2 = 2n^2$ (1), de unde 2 divide pe m , adică există $l \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m = 2l$ (2). Revenind la (1), găsim $2l^2 = n^2$, ceea ce conduce la 2 divide n , adică există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 2k$ (3). Din (2) și (3) obținem că $2 \mid (m, n)$, în contradicție cu ipoteza $(m, n) = 1$. Prin urmare, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- Numerele iraționale se reprezintă pe axă în două moduri:

(i) prin aproximare cu numere zecimale;

(ii) prin utilizarea compasului și a construcției următoare:



Spirala lui Arhimede

• Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci:

i) $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

ii) $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

• Fie x și y două numere reale astfel încât x este la **stânga** lui y pe axa numerelor.

Spunem că x este **mai mic** decât y și scriem $x < y$ sau spunem că y este mai mare decât x și scriem $y > x$.

Dacă $x < y$ sau $x = y$, spunem că x este mai mic sau egal cu y și scriem $x \leq y$ sau că y este mai mare sau egal cu x și scriem $y \geq x$.

Dacă $|x| < |y|$, atunci și $\sqrt{|x|} < \sqrt{|y|}$ și reciproc.

• **Partea întreagă** a unui număr real x , notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x .

EXAMPLE:

a) $[3,24] = 3$;

b) $[-2,87] = -3$.

• Fie x un număr real. Diferența $x - [x]$ se numește **partea fracționară** a lui x , notată $\{x\}$.

EXAMPLE:

a) $\{5,75\} = 5,75 - 5 = 0,75$;

b) $\{-5,75\} = -5,75 - (-6) = 6 - 5,75 = 0,25$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ♦

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-4 \in \mathbb{Z}$;

b) $-\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$;

c) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$;

d) $0 \notin \mathbb{N}$;

e) $-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} \in \mathbb{Q}$;

f) $\sqrt{18} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

g) $-\sqrt{64} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

h) $\frac{-32}{8} \in \mathbb{Z}$;

i) $\frac{3\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}$;

j) $\{3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$;

k) $\{-7\} \subset \mathbb{Z}$;

l) $\sqrt{11} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

m) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

n) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$;

o) $\left\{-\frac{1}{3}; 0, (6); -\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}; 1, 41(6); 1, 2(7)\right\} \subset \mathbb{Q}$;

p) $\left\{-\frac{3}{8}; -2, 91(6); 2, 3(8); \frac{-4\sqrt{25}}{\sqrt{9}}; \frac{5\sqrt{36}}{-\sqrt{49}}\right\} \not\subset \mathbb{Q}$.

2. Se consideră numerele: -7 ; -4 ; 6 ; $\frac{2}{3}$; $-\sqrt{64}$; $2,08(3)$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{12}$; $\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{(-18)^2}$; $-0,8(3)$; 2 ; 17 ;

$\sqrt{144}$; $-\sqrt{169}$. Precizați care dintre numerele de mai sus sunt:

a) numere naturale;

b) numere raționale;

c) numere întregi;

d) numere negative;

e) numere reale;

f) numere iraționale.

3. Fie mulțimea $A = \{x \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 125\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare numărul n , numărul corespunzător x să fie:

a) rațional;

b) irațional.

4. a) Reprezentați pe axă punctele: $A(\sqrt{4})$; $B\left(\sqrt{\frac{49}{4}}\right)$; $C\left(-\sqrt{\frac{128}{2}}\right)$; $D(-\sqrt{6}, 25)$.

b) Fie E, F, G, H simetricele punctelor A, B, C , respectiv D , față de originea axei. Determinați abscisele punctelor E, F, G, H și reprezentați pe axă aceste puncte.

c) Calculați abscisele punctelor M, N, P, Q , mijloacele segmentelor HB, GA, CE , respectiv FD și reprezentați-le pe axă.

d) Determinați lungimile segmentelor $|CG|, |EA|, |DH|, |QM|, |MN|, |PA|$.

5. Se dau numerele $\sqrt{125}; \sqrt{4,25}; \sqrt{245,64}; \sqrt{1200}; \sqrt{256,24}$.

a) Aproximați prin lipsă, la sutime, numerele de mai sus.

b) Aproximați prin adaos, la sutime, numerele de mai sus.

6. a) Determinați cel mai mare număr întreg mai mic sau egal decât:

$$-\sqrt{100}; \sqrt{18}; -\sqrt{5}; \sqrt{112}; -\sqrt{125}; \sqrt{1680}; -\sqrt{20}.$$

b) Determinați cel mai mic număr întreg mai mare sau egal decât:

$$\sqrt{24}; -\sqrt{227}; \sqrt{2400}; -\sqrt{16}; \sqrt{\frac{1000}{125}}; -\sqrt{20}; \sqrt{49}.$$

7. Încadrați fiecare număr real între două numere întregi consecutive:

a) $\square < -\sqrt{5} < \square;$

b) $\square < \sqrt{13} < \square;$

c) $\square < -\sqrt{7} < \square;$

d) $\square < \sqrt{27} < \square;$

e) $\square < -\sqrt{17} < \square;$

f) $\square < \sqrt{50} < \square.$

8. Considerăm mulțimea $A = \left\{ -\frac{3}{8}; -\sqrt{36}; 0,8(3); -\frac{4}{9}; -\sqrt{64}; \frac{-21}{-7}; 8,2; 5\sqrt{2}; -\sqrt{108}; \frac{\sqrt{81}}{6}; \frac{\sqrt{100}}{5}; \sqrt{1,7(7)}; \sqrt{18}; -\sqrt{\frac{16}{25}}; -\sqrt{0,(4)} \right\}$. Scrieți elementele mulțimilor: $A \cap \mathbb{N}; A \cap \mathbb{Z}; A \cap \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{Z}; A \setminus \mathbb{R}; A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

9. Considerăm mulțimea $A = \left\{ -\sqrt{25}; +\sqrt{64}; \frac{3}{2}; \frac{48}{12}; -0,8; \frac{\sqrt{81}}{3}; -0,5; 1,1(3); -\sqrt{(-2)^6 \cdot (-5)^2}; \sqrt{2^4 \cdot 3^4}; \sqrt{12}; -\sqrt{24}; +\sqrt{48}; -\sqrt{16} \right\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$$A \cap \mathbb{N}; A \cap \mathbb{Z}; A \cap \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{Q}; A \setminus \mathbb{R}; A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); A \setminus \mathbb{Z}; A \setminus \mathbb{N}.$$

10. Ordonați crescător numerele:

a) $-2\frac{1}{2}; -\sqrt{3}; -\sqrt{8}; -3,1; \sqrt{5}; 2; 2\frac{3}{4};$

b) $\sqrt{3}; -2; -0,(6); 0,1(6); -\sqrt{2}; \sqrt{0,09};$

c) $-1\frac{1}{5}; -\sqrt{12}; -\sqrt{\frac{144}{12}}; -4; -3; -1,(3);$

d) $\sqrt{12}; -3\frac{2}{3}; -2; 4; -\sqrt{5}; \sqrt{\frac{132}{11}}.$

11. Completați tabelul:

a	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{\frac{111}{13}}$	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$	$-\sqrt{16}$	$\sqrt{1,3}$	$-\sqrt{1,1(6)}$	$\sqrt{2\frac{1}{3}}$
$-a$									
$ a $									

12. Fie mulțimea $A = \left\{ \sqrt{36}; \sqrt{5\frac{1}{4}}; \sqrt{7\frac{1}{9}}; \sqrt{3\frac{1}{16}}; \sqrt{0,(4)}; \sqrt{4\frac{1}{4}}; \sqrt{3^2 \cdot 2^6} \right\}$.

Determinați mulțimile: $A \cap \mathbb{N}; A \cap \mathbb{Q}; A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

13. Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ \sqrt{5^2 \cdot 2^3}; \sqrt{6 + \frac{1}{4}}; \sqrt{3^2 + 4^2}; \sqrt{5 \frac{1}{9}}; \sqrt{3^4 \cdot 5^2}; \sqrt{11 + \frac{1}{9}}; \sqrt{16 + \frac{1}{5}} \right\}.$$

Determinați mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

14. Fie mulțimea $A = \left\{ -4; \sqrt{0, (1)}; \sqrt{12}; \frac{\sqrt{64}}{4}; \sqrt{20}; 3,8; -\frac{1}{4}; \frac{-27}{-9}; -\sqrt{18} \right\}$.

Determinați mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $A \setminus \mathbb{R}$; $A \setminus \mathbb{Q}$; $A \setminus \mathbb{Z}$.

15. Fie mulțimea $B = \left\{ \sqrt{0, (4)}; -6; \sqrt{48}; \frac{\sqrt{81}}{3}; 7; -2,4; -\frac{3}{8}; \frac{-32}{-8}; -\sqrt{32} \right\}$.

Determinați mulțimile: $B \cap \mathbb{Z}$; $B \cap \mathbb{N}$; $B \cap \mathbb{Q}$; $B \setminus \mathbb{Q}$; $B \setminus \mathbb{R}$; $B \setminus \mathbb{Z}$; $B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ♦ ♦

16. Calculați:

a) $|x| + 2x + 1 + |1 - x|$, dacă $x < 0$;

c) $-|x + 3| + \sqrt{(x - 1)^2} - |2x - 4|$, dacă $-3 < x < 1$.

b) $|x^2 + 1| + 5|x - 5| + 5x - 16 - \sqrt{x^4}$, dacă $0 < x < 5$;

17. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq \sqrt{x} < 6\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 27 \leq 3x^2 \leq 147\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq -\sqrt{x} \leq -2\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 15 \leq x^2 \leq 49\}.$$

18. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| = 6\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid |2x + 1| = 7\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 5| = 9\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect și } -6 < -\sqrt{x} < -1\};$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \left| x - 2\sqrt{3} \right| = \sqrt{3} \right\};$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \left| \frac{3x + 4}{2} \right| = 4 \right\};$$

19. Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{6}; -1\frac{2}{3}; -\sqrt{7}; 1\frac{1}{4}; -3\sqrt{2}; -3; -4,2$;

c) $6\sqrt{3}; -2\frac{1}{2}; -0,8(3); 3\sqrt{5}; 6; -\sqrt{6}; -3$;

b) $-\sqrt{2}; -3; 0,6; \sqrt{1\frac{7}{9}}; \sqrt{3}; 2; -\sqrt{8}; \sqrt{9}$;

d) $-4\frac{1}{2}; -3\sqrt{2}; -3; \sqrt{2, (7)}; 2; 0,54; \sqrt{3}$.

20. Calculați:

a) $\left| 2 - \frac{2}{3} \right|$;

b) $\left| -\frac{5}{6} + 1 \right|$;

c) $|2,25 - 7,25 + 0,65|$;

d) $|\sqrt{3} - 2|$;

e) $|\sqrt{6} - \sqrt{2}|$;

f) $|\sqrt{12} - \sqrt{18}|$;

g) $|3\sqrt{2} + 5 - 9|$;

h) $|\sqrt{6} - 6 + 8|$.

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆**21.** Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq \sqrt{x} < 4\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq -\sqrt{x} \leq -4\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 32 \leq 2x^2 \leq 98\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 15 \leq x^2 \leq 81\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq |x| < 5\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid |2x - 1| \leq 9\};$

g) $G = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \left| \frac{3x+5}{2} \right| = 4 \right\};$

h) $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 3| \leq 9\}.$

22. Arătați că numărul $a = \sqrt{1+3+5+7+\dots+2015+2017+2019}$ este rațional.**23.** Arătați că numărul:

a) $a = \sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2017 + 2018}$ este irațional;

b) $a = \sqrt{(1+3+5+7+\dots+2021) + 2022}$ este irațional.

24. Reprezentați pe axă elementele următoarelor mulțimi:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 5\};$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\};$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 6\};$

$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq |x| < 6\};$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\};$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}.$

25. Calculați:

a) $|x| + 3x + 2 + |2 - x|$, dacă $0 < x < 2$;

b) $|x^2 + 2| - \sqrt{x^4} + |x - 6| + 6x - 2$, dacă $0 < x < 6$;

c) $|x + 4| + \sqrt{(x-2)^2} - |2x - 6|$, dacă $-4 < x < 2$;

d) $|x + 3| + \sqrt{(x-1)^2} - |2x - 4|$, dacă $-3 < x < 1$.

26. Arătați că numerele de mai jos sunt iraționale:

a) $\sqrt{3};$

b) $\sqrt{5};$

c) $5\sqrt{2};$

d) $-4\sqrt{7}.$

27. Arătați că, în fiecare din cazurile de mai jos, numerele date sunt iraționale:

a) $x = \sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2021 + 2022};$

b) $x = \sqrt{(1+3+5+7+\dots+2023) + 2024}.$

28. Arătați că, în fiecare din cazurile de mai jos, numerele date sunt iraționale:

a) $x = \sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2023 + 2022};$

b) $x = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022 + 2023}.$

PE-PP SUPERMATE ◆ ◆ ◆ ◆**29.** Arătați că numerele de mai jos sunt iraționale:

a) $3 - \sqrt{2};$

b) $4 - 3\sqrt{2};$

c) $2\sqrt{3} + 5;$

d) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3};$

e) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}.$

30. Demonstrați că pentru orice număr natural n , următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{10n+8};$

b) $\sqrt{5n+3};$

c) $\sqrt{5^n+7};$

d) $\sqrt{10^n+2};$

e) $\sqrt{6^n+7};$

f) $\sqrt{11^n+2};$

g) $\sqrt{15n-7};$

h) $\sqrt{25n-8}.$

31. Determinați numerele raționale a și b pentru care are loc egalitatea:

$$a(6 + 4\sqrt{3}) + b(2 - 3\sqrt{3}) = 7 + 9\sqrt{3}.$$

32. Determinați numerele raționale a și b pentru care are loc egalitatea:

$$(a+3) + \sqrt{(2-\sqrt{6})^2} = 5 + \sqrt{6}(b+2).$$

33. Arătați că numărul $A = \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$ este număr rațional, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.



• **A rezolva** o ecuație de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$, în mulțimea $P \subseteq \mathbb{R}$, înseamnă a determina toate valorile $x_0 \in P$ pentru care propoziția $x_0^2 = a$ este adevărată.

• **Valorile** găsite, dacă există, se numesc **soluții** ale ecuației, iar mulțimea lor, notată de obicei cu S , se numește **mulțimea soluțiilor** ecuației. Dacă mulțimea P nu este precizată, se consideră $P = \mathbb{R}$.

Rezolvarea ecuației $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{Q}$, necesită analiza a trei cazuri:

1. Dacă $a < 0$, atunci $S = \emptyset$, deoarece $x^2 \geq 0 > a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Dacă $a = 0$, atunci ecuația devine $x^2 = 0$, având soluția unică $x = 0$. Deci $S = \{0\}$.

3. Dacă $a > 0$, atunci ecuația $x^2 = a$ se poate scrie sub forma $x^2 - a = 0$, adică $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$, având soluțiile: $x_1 = -\sqrt{a}$ și $x_2 = \sqrt{a}$, adică $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$. Sau: $x^2 = a$, $a > 0$, se mai poate scrie $|x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

Exerciții rezolvate:

• Ecuația $x^2 = 1 - \sqrt{4}$ nu are soluții, deoarece $1 - \sqrt{4} < 0$, deci $S = \emptyset$.

• Ecuația $7x^2 - 5 = 5(x + 1)(x - 1)$ este echivalentă cu $7x^2 - 5 = 5x^2 - 5$, de unde rezultă că $2x^2 = 0$, adică $x^2 = 0$, deci $S = \{0\}$.

• Ecuația $5x^2 - 45 = 0$ este echivalentă cu $x^2 = 9$, deci $S = \{-3, 3\}$. Această ecuație se poate rezolva și prin altă metodă: $5x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$, de unde se obține $x - 3 = 0$ sau $x + 3 = 0$, adică $x = 3$ sau $x = -3$, de unde $S = \{-3, 3\}$.

• $x^2 + 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4^2$, de unde rezultă că $x + 3 = 4$ sau $x + 3 = -4$ și se obțin soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$, deci $S = \{-7, 1\}$. Se poate rezolva și altfel: $(x + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $x + 7 = 0$, adică $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$.

• $9x^2 = 27 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow 9x^2 = 18 + 18\sqrt{2} + 9 \Leftrightarrow 9x^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 \Leftrightarrow 9x^2 = (3\sqrt{2} + 3)^2 \Leftrightarrow 9x^2 = 9(\sqrt{2} + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2} + 1$, adică $x = \sqrt{2} + 1$ sau $x = -\sqrt{2} - 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} + 1$ și $x_2 = -\sqrt{2} - 1$. $S = \{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1\}$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Precizați care dintre ecuațiile de mai jos admit pe $x = -2$ ca soluție:

a) $x^2 = 4$;

b) $3x^2 = 18$;

c) $(x - 3)^2 = 25$;

d) $2x^2 - 3 = 5$;

e) $(2x + 1)^2 = 27$;

f) $(2x - 3)^2 = 49$;

g) $x^3 - 8 = -3$;

h) $2x^2 - 9 = -1$.

2. A. Verificați dacă -3 este soluție a următoarelor ecuații:

a) $x^2 = 9$;

b) $7x^2 - 2 = 61$;

c) $(x - 1)^2 = 4$;

d) $(2x + 1)^2 = 49$.

B. Verificați dacă -2 este soluție a următoarelor ecuații:

a) $x^2 = 4$;

b) $5x^2 - 3 = 17$;

c) $(x + 1)^2 = 9$;

d) $(2x - 1)^2 = 25$.

$$\begin{array}{lllll}
 \text{c) } x^2 = 1\frac{7}{9}; & x^2 = 1\frac{11}{16}; & x^2 = 2\frac{7}{9}; & x^2 = 4\frac{11}{16}; & x^2 = 13\frac{4}{9}; \\
 \text{d) } (x-2)^2 = 324; & (x+1)^2 = 256; & (x+3)^2 = 121; & (x-4)^2 = 72; & \\
 \text{e) } x^2 = \sqrt{1296}; & x^2 = \sqrt{625}; & x^2 = \sqrt{2401}; & x^2 = \sqrt{4096}; & \\
 \text{f) } x^2 = \sqrt{15^2 + 20^2}; & x^2 = \sqrt{20^2 - 12^2}; & x^2 = \sqrt{45^2 - 27^2}. & &
 \end{array}$$

13. Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \frac{25x^2}{3} = 0, (6); & \text{b) } \sqrt{3}x^2 - \sqrt{75} = 0; & \text{c) } \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2} = 0; \\
 \text{d) } \sqrt{5}x^2 - \sqrt{245} = 0; & \text{e) } 16x^2 = \sqrt{441}; & \text{f) } 25x^2 - \sqrt{729} = 0.
 \end{array}$$

PE APLICARE ȘI EXERSARE ♦ ♦

14. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia dintre ecuațiile de mai jos:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \sqrt{3}x^2 - \sqrt{243} = 0; & \text{b) } \sqrt{6}x^2 = \sqrt{96}; & \text{c) } \sqrt{2}x^2 = \sqrt{162}; & \text{d) } 2x(x-2) = 2(9-2x); \\
 \text{e) } x(x+2) = 2(x+8); & \text{f) } x(x-4) = 4(4-x); & \text{g) } x(x-1) = 4-x; & \text{h) } 2(x^2-48) = x^2-24; \\
 \text{i) } 2x^2-15 = x^2+21; & \text{j) } x^2+4^2 = 5^2; & \text{k) } 13^2-x^2 = 5^2. &
 \end{array}$$

15. Determinați soluțiile următoarelor ecuații:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \frac{x^2+4x}{8} = \frac{2x+8}{4}; & \text{b) } \frac{x-2}{3} = \frac{27}{x-2}; & \text{c) } \frac{x-\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{x-\sqrt{3}}; \\
 \text{d) } \frac{x^2+4x-3}{4} = \frac{x^2+5x+3}{5}; & \text{e) } \frac{x-2\sqrt{2}}{8} = \frac{4}{x-2\sqrt{2}}; & \text{f) } \frac{x}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2x}.
 \end{array}$$

16. Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } (2x-5)^2 = 9; & \text{b) } (2x-3)^2 = 25; & \text{c) } (2x+7)^2 = 81; & \text{d) } (2x-1)^2 = 49; \\
 \text{e) } 3(2x+5)^2 = 27; & \text{f) } 3(2x-7)^2 = 75; & \text{g) } 4(2x+1)^2 = 36; & \text{h) } 2(2x+3)^2 = 162; \\
 \text{i) } 3(2x-1)^2 = 147; & \text{j) } 2(2x+3)^2 = 98. & &
 \end{array}$$

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ♦ ♦ ♦

17. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia dintre ecuațiile de mai jos:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 3(x+3)^2 - 38 = 109; & \text{b) } 4(x-4)^2 + 13 = 157; & \text{c) } 6(x-2)^2 - 29 = 25; \\
 \text{d) } 5(x+4)^2 + 22 = 342; & \text{e) } 2(2x-1)^2 + 21 = 71; & \text{f) } 3(2x-7)^2 - 32 = 43; \\
 \text{g) } 4(2x+3)^2 - 63 = 133; & \text{h) } 2(2x-5)^2 + 29 = 191. &
 \end{array}$$

18. Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } (x+\sqrt{2})^2 = 8; & \text{b) } (x-\sqrt{3})^2 = 27; & \text{c) } (x+2\sqrt{2})^2 = 32; & \text{d) } (x-3\sqrt{3})^2 = 48; \\
 \text{e) } (x-2\sqrt{2})^2 = 50; & \text{f) } (x+3\sqrt{3})^2 = 75; & \text{g) } (x+4\sqrt{2})^2 = 72; & \text{h) } (x-4\sqrt{3})^2 = 27; \\
 \text{i) } (x-4\sqrt{2})^2 = 98; & \text{j) } (x+5\sqrt{2})^2 = 18. & &
 \end{array}$$

19. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia dintre ecuațiile de mai jos:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } (2x+\sqrt{2})^2 = 162; & \text{b) } (2x-5\sqrt{3})^2 = 27; & \text{c) } (2x+3\sqrt{3})^2 = 147; \\
 \text{d) } (2x-3\sqrt{2})^2 = 98; & \text{e) } (2x+5\sqrt{2})^2 = 162; & \text{f) } (2x-3\sqrt{3})^2 = 243; \\
 \text{g) } (2x+3\sqrt{2})^2 = 50; & \text{h) } (2x-7\sqrt{2})^2 = 242; & \text{i) } (2x+5\sqrt{3})^2 = 147.
 \end{array}$$

20. Rezolvați ecuațiile:

a) $2(x + \sqrt{3})^2 = 24$;

b) $3(x - \sqrt{2})^2 = 96$;

c) $2(\sqrt{8} - x)^2 = 64$;

d) $3(x + \sqrt{12})^2 = 144$;

e) $2(\sqrt{18} - x)^2 = 100$;

f) $3(x + \sqrt{27})^2 = 225$;

g) $2(x + \sqrt{32})^2 = 144$;

h) $3(x - \sqrt{48})^2 = 81$;

i) $2(x - \sqrt{12})^2 = 150$.

21. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia dintre ecuațiile de mai jos.

a) $3(x - 2\sqrt{2})^2 - 8 = 88$;

b) $2(x + 3\sqrt{3})^2 + 25 = 241$;

c) $4(x + 4\sqrt{3})^2 - 41 = 67$;

d) $2(x - 5\sqrt{3})^2 + 39 = 333$;

e) $3(x + 7\sqrt{3})^2 - 62 = 82$;

f) $4(x - 3\sqrt{2})^2 + 49 = 337$;

g) $5(x - 6\sqrt{2})^2 + 43 = 133$;

h) $3(x - 4\sqrt{2})^2 - 82 = 68$.

PE-PP SUPERMATE ♦ ♦ ♦ ♦

22. Arătați că, dacă numerele reale pozitive x, y, z verifică relația $x + y + z = 2$, atunci numărul $n = \sqrt{(xy + 2z)(yz + 2x)(zx + 2y)}$ este număr rațional.

23. Rezolvați ecuația $x + y + z + 8 = 2(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-2} + 3\sqrt{z-3})$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$, cu $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$.

24. Determinați numerele reale x, y, z pentru care următoarea egalitate este adevărată:

$$\sqrt{x+50} + \sqrt{y+100} + \sqrt{z+150} = \frac{x+y+z+312}{4},$$

unde $x \geq -50, y \geq -100, z \geq -150$.

PE-PP 9. PROBLEME DE MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN VIAȚA COTIDIANĂ

1. Suprafața unei curți de formă dreptunghiulară, cu lungimea de trei ori mai mare decât lățimea, este de 1323 m^2 .

Știind că se împrejmuieste terenul cu un gard format din patru rânduri de sârmă, ce lungime are colacul de sârmă care trebuie folosit?

2. Pe un perete cu dimensiunile de 4 m lungime și 2,7 m lățime trebuie amplasată o fereastră în formă de pătrat, care are suprafața egală cu 30% din suprafața peretelui.

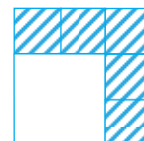
Care trebuie să fie dimensiunile ferestrei?

3. Un teren de sport are aria de 324 m^2 și formă de pătrat.

Cu cât trebuie să se mărească latura terenului pentru ca aria să se mărească cu 576 m^2 ?

4. Un pătrat cu aria de 729 cm^2 este împărțit în pătrate ca în figura alăturată.

Care este aria pătratului alb? Dar latura sa?



5. Suprafața unei sufragerii în formă de pătrat este egală cu suma suprafețelor a două dormitoare în formă de pătrat cu latura de 3 m și, respectiv, 4 m.

Pentru a acoperi sufrageria cu mochetă, ce suprafață de mochetă trebuie cumpărată?

6. O încăpere în formă de pătrat are aria egală cu cea a unui teren dreptunghiular având dimensiunile 12,8 m și 5 m. Ea trebuie acoperită cu dale pătrate având latura de 0,4 m.

Câte dale trebuie cumpărate pentru a acoperi podeaua încăperii?

- Timp de lucru 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

TESTUL 1

Subiectul I

(3 puncte)

(0,5p) 1. Valorile reale ale lui x pentru care $3x^2 + 2 = 50$ sunt:

- a) $\{-4; 4\}$; b) $\{-3; 3\}$; c) $\{-2; 2\}$; d) $\{3; 4\}$.

(0,5p) 2. Dacă $\frac{3x^2}{64} = \frac{27}{4}$, atunci valorile reale ale lui x sunt:

- a) $\{-12; 12\}$; b) $\{-6; 6\}$; c) $\{-4; 4\}$; d) $\{-3; 3\}$.

(0,5p) 3. Mulțimea soluțiilor ecuației $(2x + 5)^2 = 121$ este:

- a) $\{-8; 2\}$; b) $\{-8; 3\}$; c) $\{-4; 3\}$; d) $\{-4; 2\}$.

(0,5p) 4. Valorile reale ale lui x pentru care $x^2 = (2 - \sqrt{5})^2$ sunt:

- a) $\{-\sqrt{5}; -5\}$; b) $\{-\sqrt{2}, -2\}$; c) $\{\sqrt{2} - 3; 3 - \sqrt{2}\}$; d) $\{2 - \sqrt{5}; \sqrt{5} - 2\}$.

(0,5p) 5. Valorile reale ale lui x pentru care $\frac{1}{16}x^2 = 0,25$ sunt:

- a) $\{-5; 5\}$; b) $\{-4; 4\}$; c) $\{-3; 3\}$; d) $\{-2; 2\}$.

(0,5p) 6. Mulțimea soluțiilor ecuației $(2x - \sqrt{3})^2 = 27$ este:

- a) $\{-3\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$; b) $\{-2\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$; c) $\{-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}$; d) $\{-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$.

Subiectul al II-lea

(2 puncte)

(0,5p) 1. Mulțimea soluțiilor ecuației $\frac{5x - 10}{9} = \frac{20}{x - 2}$ este:

- a) $\{-6; -4\}$; b) $\{-6; 4\}$; c) $\{-4; 8\}$; d) $\{4; 6\}$.

(0,5p) 2. Mulțimea soluțiilor ecuației $3(x - 2)^2 - 5 = 43$ este:

- a) $\{-6; -2\}$; b) $\{-6; 2\}$; c) $\{-2; 6\}$; d) $\{2; 6\}$.

(0,5p) 3. Mulțimea soluțiilor ecuației $3(2x + 3)^2 - 16 = 59$ este:

- a) $\{-4; -3\}$; b) $\{-4; -1\}$; c) $\{-4; 1\}$; d) $\{3; 4\}$.

(0,5p) 4. Mulțimea soluțiilor ecuației $(2x - \sqrt{2})^2 = 18$ este:

- a) $\{-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$; b) $\{\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$; c) $\{-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$; d) $\{\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$.

Subiectul al III-lea

(4 puncte)

(2p) 1. Rezolvați ecuația: $3(2x + 3\sqrt{3})^2 - 79 = 146$.(2p) 2. Rezolvați ecuația: $12(x + 1)^2 = (6 + 2\sqrt{3})^2$.

PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR

1. a) Dacă a și b sunt numere raționale cu proprietatea că $a\sqrt{3} - b\sqrt{5} = 0$, demonstrați că $a = b = 0$.

b) Determinați toate perechile de numere raționale $(x; y)$ care verifică egalitatea:

$$\sqrt{3(x+1)^2} - 2\sqrt{3} = |y+1| \cdot \sqrt{5} - |\sqrt{3} - \sqrt{5}|.$$

2. Fie numărul $x = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^4} + \dots + \sqrt{2^{2018}} + \sqrt{2^{2019}}$ și $y = 2^{1010} - \sqrt{2}$. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{x}{y}$.

3. Numerele întregi a și b verifică relația $3a + 4b = 100$. Determinați cea mai mică valoare posibilă pe care o poate lua numărul $|a - b|$.

4. Numerele naturale nenule a, b, c verifică relația $\frac{2a}{3b+4c} = \frac{3b}{4c+2a} = \frac{4c}{2a+3b}$. Determinați valorile lui a, b, c , știind că $7a - 6b - 5c = 2019$.

5. Se consideră numerele $x = \sqrt{6 - \sqrt{35}}$ și $y = \sqrt{6 + \sqrt{35}}$. Calculați $(x - y)^2$ și $(x - y + \sqrt{10})^{2020}$.

6. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot x \right\}$.

7. Determinați numerele raționale a și b pentru care $\frac{a}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} - \frac{b}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$.

9. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, d , astfel încât $a + b + c + d = 1010$.

Arătați că $\sqrt{a(b+c+d)} + \sqrt{b(a+c+d)} + \sqrt{c(a+b+d)} + \sqrt{d(a+b+c)} \leq 2020$.

10. a) Dacă $0 < x < 2y < 5$, arătați că numărul $a = \sqrt{(x-2y)^2} + \sqrt{(x+2y-16)^2} + \sqrt{4x^2}$ este pătrat perfect.

b) Demonstrați că nu există x și y numere întregi, astfel încât $|x - 3y + 4| + |x + 3y - 4| < 2$.

11. Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z pentru care $x + y + z = 1346$.

Arătați că $\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} \leq 2019$.

12. Determinați valorile naturale nenule ale lui n pentru care $\frac{2\sqrt{n} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{n}} \in \mathbb{Z}$.

13. Arătați că, dacă x, y, z sunt numere raționale nenule pentru care $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, atunci numărul

$$A = \left(\frac{xy}{z} + 1 \right) \left(\frac{yz}{x} + 1 \right) \left(\frac{xz}{y} + 1 \right) \text{ este nenegativ, iar } \sqrt{A} \in \mathbb{Q}.$$

GEOMETRIE

Capitolul I

PATRULATERE

PP

Competențe specifice

- C1. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date
- C2. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
- C3. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
- C4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulate
- C5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
- C6. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulate



DEFINIȚII:

1. Poligonul cu patru laturi se numește **patrulater**.
2. Un patrulater se numește **convex** dacă dreapta suport a oricăreia dintre laturi nu separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.
3. Un patrulater se numește **concav** dacă există o dreaptă suport a unei laturi care separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

TEOREMĂ: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Măsurile unghiurilor A , B și C ale triunghiului ABC sunt proporționale cu numerele 4, 5 și 3. Perpendiculara în C pe BC intersectează paralela prin A la BC în punctul D . Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.
2. În patrulaterul convex $ABCD$ se știe că $\angle B = 2 \cdot \angle A$, $\angle C = 3 \cdot \angle A$ și $\angle D = 2 \cdot \angle B$.
 - a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
 - b) Arătați că diagonala AC nu poate fi congruentă cu latura AB .
3. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt proporționale cu 3, 4, 5 și, respectiv, 6.
4. Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui patrulater convex este 170° . Știind că patrulaterul are trei unghiuri congruente, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
5. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$, știind că suma măsurilor unghiurilor B și D este 150° , suma măsurilor unghiurilor A , B și C este 295° și diferența măsurilor unghiurilor A și C este 20° .
6. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 3, 5, 7 și 9.
7. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 1, 2, 3 și 4.
8. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$ ale cărui unghiuri verifică egalitățile:
 $\angle C = \frac{2}{3} \angle B$; $\angle D = \frac{1}{6} \angle B$; $\angle A = 1\frac{1}{4} \angle C$.
9. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că sunt invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,25; 0,125 și, respectiv, 0,(1).

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

10. Triunghiul ABC isoscel are $\angle A = 36^\circ$ și $AB \equiv AC$. Știind că BD este bisectoarea unghiului ABC , $D \in AC$, și E este mijlocul laturii AB , calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $BCDE$.
11. În triunghiul ABC , $AD \perp BC$, $D \in BC$, și $\angle C = 40^\circ$. Se știe că $BH \perp AM$, $HM \parallel AC$, unde $H \in AD$, și că punctul M este mijlocul segmentului DC . Calculați măsurile patrulaterului $ACMN$, unde $MH \cap AB = \{N\}$.

12. În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle A = 40^\circ$, măsura unghiului B este de $2\frac{3}{5}$ ori mai mare decât măsura unghiului A , iar măsura unghiului C este egală cu media aritmetică a primelor două unghiuri. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

13. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$, știind că măsura unghiului B este dublul măsurii unghiului A , măsura unghiului C este egală cu $\frac{3}{8}$ din măsura unghiului B , iar $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$.

14. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$, știind că măsurile unghiurilor A , B , C sunt proporționale cu 4, 5 și 6, iar măsurile lui C și D sunt invers proporționale cu 0,5 și 0,(3).

15. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex care are toate unghiurile congruente.

16. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$ în care măsura unghiului A este media aritmetică a celorlalte trei măsuri, măsura unghiului B este media aritmetică a măsurilor unghiurilor C și D , iar măsura unghiului C este jumătate din măsura unghiului D .

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

17. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$, știind că:

$$\sphericalangle A = 1,25 \cdot \sphericalangle C; \sphericalangle C = 0,(6) \cdot \sphericalangle B \text{ și } \sphericalangle D = 0,1(6) \cdot \sphericalangle B.$$

18. Măsurile unghiurilor A , B și C ale triunghiului ABC sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$.

Paralela prin A la latura BC intersectează perpendiculara în C pe BC în punctul M . Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCM$.

19. În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle A = 75^\circ$, iar măsurile unghiurilor B , C și D sunt invers proporționale cu numerele: $0,1(6)$; $\frac{1}{4}$ și $0,(1)$. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

20. În patrulaterul convex $ABCD$ se dau: $\sphericalangle BAD = 110^\circ$, $\sphericalangle ABC = 110^\circ$, $\sphericalangle ADB = 29^\circ$ și $\sphericalangle BDC = 56^\circ$. Calculați măsurile unghiurilor DBC , ABD , ADC , C .

21. În patrulaterul convex $MNPQ$ se știe că $NP = 2MN$, triunghiul MQP este isoscel, triunghiul MNP este dreptunghic, $\sphericalangle MQP = 100^\circ$ și $\sphericalangle PMN = 90^\circ$. Calculați măsurile unghiurilor QMN , MNP și, respectiv, QPN .

22. Fie $MNPQ$ un patrulater convex. Perimetrul triunghiului MNQ este egal cu 72 cm și $P_{QNP} = 74$ cm. Aflați lungimea diagonalei NQ , știind că $P_{MNPQ} = 82$ cm.

23. Patrulaterul convex $MNPQ$ are perimetrul egal cu 120 cm. Triunghiul MNP are perimetrul egal cu 82 cm. Știind că diagonala $MP = 24$ cm, aflați perimetrul triunghiului MQP .

24. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $MNPQ$ în care măsura unghiului N este media aritmetică a măsurilor unghiurilor M și P , măsura unghiului P este media aritmetică a unghiurilor N și Q , iar măsura unghiului N este egală cu patru cincimi din măsura unghiului P .

PE-PP SUPERMATE ◆ ◆ ◆ ◆

25. În patrulaterul convex $MNPQ$, unghiurile M și P sunt drepte. Pe laturile MQ și PQ se iau punctele T și R , astfel încât $MT \equiv PR$ și $\sphericalangle MTN \equiv \sphericalangle NRP$. Arătați că:

a) $MQ \equiv PQ$;

b) QN este bisectoarea unghiului MQP .

26. În patrulaterul convex $MNPQ$ avem două perechi de laturi consecutive congruente: $MN \equiv NP$ și $PQ \equiv QM$. Demonstrați că:

a) NQ este bisectoarea unghiurilor MNP și MQP ;

b) $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$;

c) $MP \perp NQ$.

Observație: Un patrulater $MNPQ$ ca cel din problema 26 se numește **zmeu**.



1. **Aria unui triunghi** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi a și înălțimea corespunzătoare ei h : $\mathcal{A} = \frac{a \cdot h}{2}$.
2. Dacă în triunghiul ABC se notează $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$, atunci aria triunghiului este dată de **formula lui Heron**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (semiperimetrul triunghiului).}$$

PROPRIETATEA MEDIANEI

Orice mediană împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente (au ariile egale).

OBSERVAȚII:

- **Aria triunghiului** se calculează cu una dintre formulele:

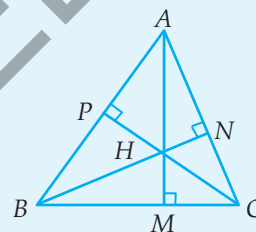
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{AC \cdot BN}{2} = \frac{AB \cdot CP}{2}.$$

(Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă.)

- Dacă triunghiul este dreptunghic, $\angle BAC = 90^\circ$, putem folosi formula:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}, \text{ unde } AB \text{ și } AC \text{ sunt catetele triunghiului.}$$

- Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$, de unde, folosind și formula anterioară, rezultă că $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.



3. **Aria unui paralelogram** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi a și înălțimea corespunzătoare ei h .

$$\mathcal{A} = a \cdot h$$

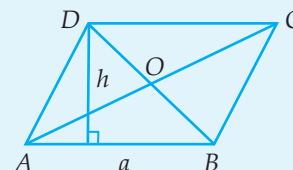
$$\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{AOD} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB}.$$

4. **Aria unui dreptunghi** este egală cu produsul dintre lungimea L și lățimea l ale sale: $\mathcal{A} = L \cdot l$.

6. **Aria unui romb** este egală cu semiprodusul dintre lungimile diagonalelor sale: $\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

5. **Aria unui pătrat** este egală cu pătratul lungimii laturii sale l : $\mathcal{A} = l^2$.

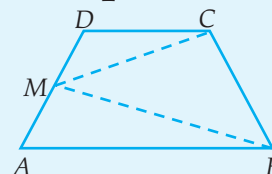
7. **Aria unui trapez** este egală cu semiprodusul dintre suma lungimilor bazelor B , b și lungimea înălțimii h a trapezului: $\mathcal{A} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$.



OBSERVAȚIE: Dacă $ABCD$ este trapez, $AB \parallel CD$, $AM \equiv DM$, $M \in AD$, atunci $\mathcal{A}_{MBC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD}$.

DEFINIȚII:

1. Distanța dintre două drepte paralele este distanța de la un punct al uneia la cealaltă.
2. Înălțimea unui trapez este distanța dintre dreptele ce conțin bazele.
3. Două suprafețe care au ariile egale se numesc *echivalente*.



ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ♦

1. Calculați:

- aria unui triunghi cu lungimea bazei egală cu 60 cm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 3,5 dm;
- aria unui paralelogram cu lungimea unei laturi egală cu 180 mm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 6 cm;
- aria unui dreptunghi cu lungimile laturilor 24 cm și 1,5 dm;
- aria unui pătrat cu latura de 0,025 m;
- aria unui romb cu lungimile diagonalelor egale cu 18 cm și 24 cm.

2. Calculați:

- aria unui romb cu latura de 30 cm și înălțimea de 28,8 cm;
- aria unui trapez cu înălțimea de 15 cm și lungimea liniei mijlocii egală cu 18 cm;
- aria unui trapez dreptunghic având lungimile bazelor egale cu 16 cm și 25 cm, iar lungimile laturilor neperalele egale cu 12 cm și, respectiv, 15 cm;
- aria patrulaterului $ABCD$, cu $AC = 28$ cm, $BD = 35$ cm și $AC \perp BD$.

3. În triunghiul oarecare ABC se duc $AM \perp BC$, $M \in BC$, și $BN \perp AC$, $N \in AC$.

- Dacă $AC = 18$ cm, $BN = 12$ cm, $AM = 9$ cm, calculați BC și $\mathcal{A}_{ABC}$.
- Dacă $AC = 15$ cm, $BN = 12$ cm, $BC = 20$ cm, calculați AM și $\mathcal{A}_{ABC}$.
- Dacă $AM = 6$ cm, $AC = 18$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 72$ cm², calculați BC și BN .

4. În triunghiul dreptunghic ABC , $\angle A = 90^\circ$, se duce $AD \perp BC$, $D \in BC$.

- Dacă $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $AD = 7,2$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și BC .
- Dacă $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $AD = 9,6$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și BC .
- Dacă $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm, $AD = 12$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și AB .
- Dacă $AD = 14,4$ cm, $AB = 18$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 216$ cm², calculați AC și BC .
- Dacă $AC = 24$ cm, $BC = 40$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 384$ cm², calculați AB și AD .

5. În paralelogramul $ABCD$ se notează $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathcal{A}_{AOB} = 216$ cm², calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.

6. Calculați aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu lungimea ipotenuzei de 20 cm.

7. Fie $ABCD$ un dreptunghi.

- Dacă $AB = 15,6$ cm și $BC = 10$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.
- Dacă $\mathcal{A}_{ABCD} = 432,5$ cm², $AB = 17,3$ cm, calculați BC .
- Dacă $\mathcal{A}_{ABCD} = 225$ cm², $AB = 12,5$ cm, calculați BC .
- Dacă $AB = 24$ cm și $BC = 15$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.
- Dacă $BC = 7,5$ cm și $\mathcal{A}_{ABCD} = 93,75$ cm², calculați AB .

8. În triunghiul ABC , AM este mediană, $M \in BC$. Știind că $\mathcal{A}_{ABC} = 168$ cm² și $AB = 21$ cm, calculați:

- distanța de la punctul C la dreapta AB ;
- aria triunghiului ACM .

9. Calculați aria unui romb cu diagonala mică de 12 cm și diagonala mare egală cu triplul diagonalei mici.

10. Calculați aria unui dreptunghi în fiecare dintre cazurile de mai jos:

- perimetrul dreptunghiului este de 150 cm și lățimea este un sfert din lungime;
- perimetrul dreptunghiului este de 126 cm și lățimea are 40% din lungime.

20. În triunghiul echilateral ABC , latura $AB = 12\sqrt{3}$ cm, punctul M este simetricul punctului C față de latura AB , punctul P este mijlocul laturii BC , iar $PM \cap AB = \{N\}$.

a) Calculați aria patrulaterului $AMBC$.

b) Calculați lungimea segmentului MN .

c) Calculați aria triunghiului CNP .

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

21. În triunghiul MNP , MQ este mediana dusă la latura NP . Știind că $\angle MNQ = 48^\circ$ și $MN = 12$ cm, aflați:

a) aria triunghiului MNP ;

b) distanța de la P la MN .

22. În triunghiul ABC , $\angle B = 30^\circ$, $BC = 12$ cm și $AB = 8$ cm. Calculați:

a) aria triunghiului ABC ;

b) distanța de la C la latura AB .

23. În triunghiul ABC , AM este mediană, $M \in BC$, iar MN este înălțime în $\triangle AMC$, $N \in AC$. Știind că $AC = 28$ cm și $MN = 2,5$ dm, calculați aria triunghiului ABC .

24. Demonstrați că într-un triunghi oarecare centrul de greutate împarte triunghiul în trei triunghiuri echivalente.

25. În triunghiul ABC , $AB = 26$ cm, $BC = 28$ cm și $AC = 30$ cm, iar $AD \perp BC$, $D \in BC$, cu $AD = 24$ cm.

a) Aflați aria triunghiului ABC .

b) Aflați distanța de la punctul B la latura AC .

c) Știind că I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , aflați raza cercului înscris.

26. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB \equiv AC$ și $D \in BC$ un punct oarecare. Demonstrați că suma distanțelor de la punctul D la laturile AB și AC este constantă, oricare ar fi poziția lui D .

27. În pătratul $ABCD$ cu latura egală cu 12 cm, se iau punctele $M \in AB$ și $N \in BC$, astfel încât $AM = BN = 9$ cm.

a) Demonstrați că $AN \equiv DM$.

b) Dacă $AN \cap DM = \{T\}$, calculați măsura unghiului DTN .

c) Calculați aria patrulaterului $DTNC$.

28. În paralelogramul $ABCD$, $AB = 24$ cm, $\angle ADC = 135^\circ$ și $AD \perp BD$. Calculați:

a) lungimea diagonalei AC ;

b) aria paralelogramului $ABCD$.

29. În triunghiul MNP , $MN = 15$ cm, $MP = 18$ cm și $NP = 21$ cm. Știind că $NQ \perp MP$, $Q \in MP$, calculați:

a) aria triunghiului MNP ;

b) lungimea segmentului NQ ;

c) aria triunghiului MNQ ;

d) distanța de la punctul Q la dreapta NP .

30. În triunghiul ABC , $\angle BAC = 75^\circ$ și $\angle ABC = 45^\circ$, iar $AC = 8\sqrt{3}$ cm. Știind că $AD \perp BC$, $D \in BC$, calculați:

a) lungimea înălțimii AD ;

b) perimetrul triunghiului ABC ;

c) aria triunghiului ABC .

31. În dreptunghiul $MNPQ$, $MN = 24$ cm, $NP = 18$ cm, iar punctele $R \in PQ$ și $S \in MQ$ astfel încât $RP = 18$ cm și $QS = 12$ cm. Calculați:

a) aria triunghiului RSN ;

b) distanța de la punctul S la dreapta RN .

32. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD \equiv BC \equiv DC$ și $\angle DAB = 60^\circ$, iar linia mijlocie MN a trapezului este egală cu 18 cm, unde $M \in AD$ și $N \in BC$. Calculați:

a) perimetrul trapezului $ABCD$;

b) lungimea diagonalei AC ;

c) aria trapezului $ABCD$;

d) distanța de la punctul N la dreapta AD .

46. În paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, diagonala $AC = 12$ cm, iar $S_{AOB} = 36$ cm². Calculați:
- aria paralelogramului $ABCD$;
 - distanța de la punctul B la dreapta AC .
47. În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, avem $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = 14$ cm, $AD = 8$ cm și $\angle ABC = 45^\circ$. Calculați:
- lungimea bazei mici CD ;
 - aria trapezului $ABCD$;
 - aria triunghiului BCD .
48. În rombul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, $AC > BD$, avem $BD = 30$ cm și latura $AB = 25$ cm. Calculați:
- lungimea diagonalei AC ;
 - aria rombului $ABCD$;
 - distanța de la punctul D la dreapta AB .
49. În triunghiul MNP , $MQ \perp NP$, $Q \in NP$. Fie $R \in MQ$, astfel încât $MR = 8$ cm. Știind că $NP = 12,5$ cm, calculați aria patrulaterului $MNRP$.
50. Calculați aria unui paralelogram cu lungimea unei laturi de 480 mm și înălțimea corespunzătoare de 0,12 m.
51. Calculați aria unui romb având latura de 15 m și înălțimea de 80 dm.
52. Calculați aria rombului $ABCD$ al cărui perimetru este egal cu 96 cm și care are măsura unghiului BAD egală cu 30° .
53. Calculați aria unui dreptunghi cu semiperimetrul de 60 cm și lățimea un sfert din lungime.
54. Calculați aria unui trapez dreptunghic cu baza mică de 12 cm, baza mare de 2,4 dm și înălțimea de 8 cm.
55. Calculați aria unui trapez cu înălțimea de 2,4 dm și suma bazelor de 560 mm.
56. Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD \equiv BC$, are diagonalele AC și BD perpendiculare, $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 24$ cm și $CD = 16$ cm. Dacă linia mijlocie MN a trapezului, cu $M \in AD$ și $N \in BC$, intersectează diagonalele AC și BD în punctele P și Q , calculați:
- înălțimea trapezului $ABCD$;
 - aria trapezului $ABCD$;
 - lungimea segmentului PQ .
57. Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD \equiv BC$, are $AB = 30$ cm, $CD = 18$ cm, $AD = BC = 10$ cm, iar punctul M este mijlocul laturii BC . Calculați:
- înălțimea trapezului $ABCD$;
 - aria trapezului $ABCD$;
 - distanța de la punctul M la dreapta AD .
58. În pătratul $ABCD$, cu latura $AB = 30$ cm, punctul N este mijlocul laturii DC , iar punctul $M \in AD$, astfel încât $DM = \frac{2}{3}AD$. Calculați:
- aria pătratului $ABCD$;
 - aria triunghiului BMN ;
 - distanța de la punctul B la dreapta MN .

PE

APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ♦ ♦ ♦

59. În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, avem $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $BC = 20$ cm, $CD = 12$ cm și $\angle ABC = 60^\circ$. Calculați:
- lungimea segmentului AD ;
 - aria trapezului $ABCD$;
 - distanța de la punctul A la dreapta BC .

82. În pătratul $ABCD$ cu $AB = 20$ cm, punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC , respectiv CD , iar $BN \cap AM = \{P\}$ și $BN \cap AD = \{Q\}$.

- Arătați că $AM \perp BN$.
- Calculați aria triunghiului APQ .
- Calculați aria patrulaterului $PMCN$.

83. În rombul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $AC = 36$ cm, $BD = 12\sqrt{3}$ cm, iar $DE \perp AB$, $E \in AB$. Dacă $DE \cap AO = \{H\}$, atunci:

- arătați că $BH \perp AD$;
- calculați aria triunghiului FBC , unde $\{F\} = BH \cap AD$.

84. În triunghiul ABC , punctul M este situat pe latura BC astfel încât $7CM = 3BM$. Știind că aria triunghiului ABC este egală cu 120 cm^2 și $AB = 14$ cm, calculați:

- aria triunghiului ACM ;
- distanța de la punctul M la dreapta AB .

85. În triunghiul ABC , unghiul C are măsura egală cu 30° , punctul D este mijlocul laturii AC , $BC = 12$ cm și $AC = 10$ cm. Dacă punctul E este simetricul punctului B față de punctul D , atunci:

- arătați că patrulaterul $ABCE$ este paralelogram;
- calculați aria patrulaterului $ABCE$;
- calculați valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{CDE}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

86. În triunghiul dreptunghic ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, iar punctele M și N sunt mijloacele catetelor AB , iar respectiv AC .

- Arătați că triunghiul MDN este dreptunghic.
- Calculați valoarea raportului dintre aria patrulaterului $AMDN$ și aria triunghiului ABC .

87. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, $\angle BOC = 60^\circ$, punctul M este mijlocul laturii AB , $DM \cap BC = \{E\}$, $AB \cap OE = \{G\}$, iar $AC = 12$ cm.

- Calculați perimetrul și aria dreptunghiului $ABCD$.
- Stabiliți natura patrulaterului $ADBE$ și calculați perimetrul acestuia.
- Arătați că dreptele CG și AE sunt perpendiculare.

88. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = DC = BC = 20$ cm, $AC \perp BC$, $AD \cap BC = \{M\}$ și punctul N este mijlocul bazei AB .

- Calculați perimetrul și aria trapezului $ABCD$.
- Arătați că DN este perpendiculară pe AC .
- Arătați că MN , AC și BD sunt concurente.

PE-PP SUPERMATE ♦ ♦ ♦ ♦

89. Fie $ABCD$ un pătrat în care $AC \cap BD = \{O\}$, unde M este mijlocul lui AB , iar $AC \cap DM = \{N\}$. Dacă $\mathcal{A}_{ABCD} = 432 \text{ cm}^2$, aflați aria triunghiului MNO .

90. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, în care $AB \equiv BC$ și $CD = 2BC$. Dacă P este mijlocul lui CD și $AC \cap BP = \{E\}$, iar $BD \cap AP = \{F\}$ și $\mathcal{A}_{AFB} = 84\sqrt{3} \text{ cm}^2$, atunci:

- arătați că triunghiul ADC este dreptunghic;
- calculați aria triunghiului BEC .



Nume _____

Clasa _____

TEST DE AUTOEVALUARE

- Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 100 de minute.

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.**(3 puncte)**

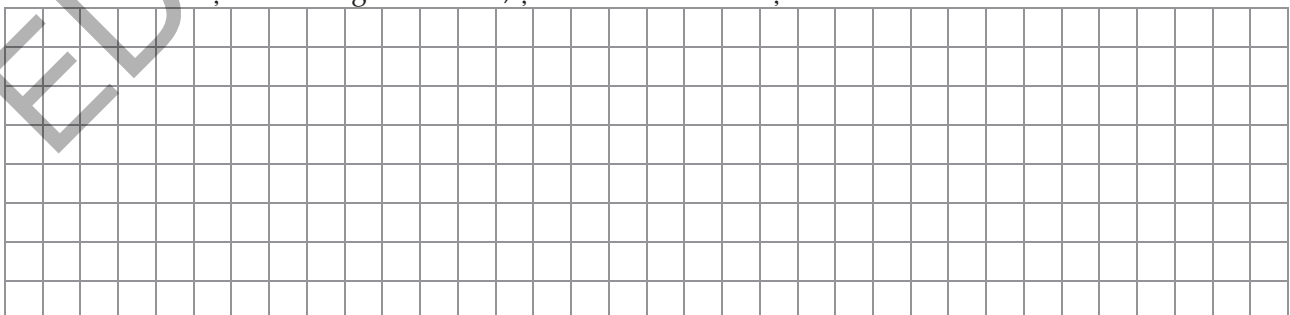
- (0,5p) 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $\angle A = 90^\circ$, cu $AB = 12$ cm și $AC = 16$ cm. Aria triunghiului ABC este egală cu cm^2 .
- (0,5p) 2. Aria unui triunghi dreptunghic isoscel având lungimea ipotenuzei egală cu 40 cm este egală cu cm^2 .
- (0,5p) 3. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 40$ cm și $AD = 18$ cm, iar $\angle CBA = 150^\circ$. Aria paralelogramului este egală cu cm^2 .
- (0,5p) 4. Un romb $ABCD$ are $AC = 48$ cm și $BD = 36$ cm. Aria rombului este egală cu cm^2 .
- (0,5p) 5. Un pătrat cu perimetrul egal cu 72 cm are aria egală cu cm^2 .
- (0,5p) 6. Un trapez isoscel ortodiagonal (cu diagonalele perpendiculare) având bazele egale cu 24 cm și 16 cm are aria egală cu cm^2 .

II. Încercuiți răspunsul corect.**(2 puncte)**

- (0,5p) 1. Un trapez dreptunghic $ABCD$, cu bazele AB și CD , are $AB > CD$. Știind că $\angle A = 90^\circ$, $AB = 24$ cm, $CD = 16$ cm, iar $AD = 12$ cm, aria trapezului este egală cu:
A. 180 cm^2 ; B. 200 cm^2 ; C. 220 cm^2 ; D. 240 cm^2 .
- (0,5p) 2. Un triunghi dreptunghic ABC , $\angle A = 90^\circ$, are $\angle C = 15^\circ$, iar mediana AM , $M \in BC$, are lungimea egală cu 24 cm. Aria triunghiului dreptunghic ABC este egală cu:
A. 260 cm^2 ; B. 280 cm^2 ; C. 288 cm^2 ; D. 300 cm^2 .
- (0,5p) 3. Un dreptunghi are perimetrul egal cu 104 m, iar lățimea este $\frac{4}{9}$ din lungimea dreptunghiului. Aria acestui dreptunghi este egală cu:
A. 540 m^2 ; B. 576 m^2 ; C. 584 m^2 ; D. 600 m^2 .
- (0,5p) 4. Un pătrat are perimetrul egal cu perimetrul unui dreptunghi având lungimea egală cu 48 m, iar lățimea egală cu $\frac{5}{12}$ din lungimea dreptunghiului. Aria pătratului este:
A. 1156 m^2 ; B. 1180 m^2 ; C. 1200 m^2 ; D. 1216 m^2 .

III. Scrieți rezolvările complete.**(4 puncte)**

- (1p) 1. În triunghiul ABC , BE și CF sunt mediane, $E \in AC$ și $F \in AB$, iar $BE \perp CF$ și $BE \cap CF = \{G\}$. Calculați aria triunghiului ABC , știind că $CF = 36$ cm și $BE = 27$ cm.



(1p) **2.** Trapezul ortodiagonal $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, are diagonalele $AC = 135$ cm și $BD = 96$ cm. Calculați aria trapezului ortodiagonal.

4450

(1p) **3.** Lungimea și lățimea unui dreptunghi sunt direct proporționale cu numerele 0,8(3) și 0,375. Știind că perimetrul dreptunghiului este egal cu 116 cm, calculați aria sa.

PARALLEL

(1p) 4. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $CD = 2AD$, iar $P \in CD$ astfel încât $PD \equiv PC$. Arătați că aria paralelogramului este egală cu produsul $AP \cdot BP$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul II

CERCUL

PP

Competențe specifice

- C1. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
- C2. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
- C3. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
- C4. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
- C5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări
- C6. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri

2. TRIUNGHI ȘI PATRULATER ÎNSCRISE ÎNTR-UN CERC



DEFINIȚIE: Un patrulater este înscris într-un cerc dacă vârfurile sale sunt puncte conciclice. Patru puncte se numesc **conciclice** dacă se află situate pe același cerc.

OBSERVAȚIE: Patrulaterul înscris într-un cerc este patrulater convex.

DEFINIȚIE: Un patrulater este circumscris unui cerc dacă laturile sale sunt tangente la cerc.

TEOREMĂ: Dacă un patrulater convex este înscris într-un cerc, atunci orice unghi determinat de o diagonală și o latură este congruent cu unghiul determinat de cealaltă diagonală cu latura opusă primei laturi și reciproc.

TEOREMĂ: Un patrulater convex înscris într-un cerc are unghiurile opuse suplementare.

OBSERVAȚII:

- Spunem că un triunghi este înscris într-un cerc dacă vârfurile sale aparțin cercului. În acest caz spunem că cercul este circumscris triunghiului. Dacă notăm cu S aria triunghiului ABC și $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, avem relația $R = \frac{abc}{4S}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .
- Centrul cercului circumscris unui triunghi se află la intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului.
- Un patrulater se numește inscriptibil dacă vârfurile sale sunt conciclice. Altfel spus, un patrulater este inscriptibil dacă poate fi înscris într-un cerc.

Condiții de inscriptibilitate:

1. Un patrulater convex este inscriptibil **dacă și numai dacă unghiurile opuse ale patrulaterului sunt suplementare.**
2. Un patrulater convex este inscriptibil **dacă și numai dacă unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sunt congruente.**

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. În triunghiul ABC cu $\angle A = 80^\circ$ și $\angle C = 40^\circ$, bisectoarele AM , BN și CP intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M , N și P . Calculați măsurile arcelor $\widehat{BM}$, $\widehat{CM}$, $\widehat{CN}$, $\widehat{AN}$, $\widehat{AP}$ și $\widehat{BP}$.
2. Punctele M , N , P aparțin cercului $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât $\angle MNP = 60^\circ$.
 - a) Aflați măsura arcului $\widehat{MNP}$.
 - b) Dacă punctele T și S aparțin arcului mare $\widehat{MP}$ și, respectiv, arcului mic $\widehat{MP}$, calculați măsurile unghiurilor MTP și, respectiv, MSP .
3. Fie A , B , C trei puncte pe un cerc $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât $\angle ABC = 60^\circ$. Dacă $AD \perp BC$, $D \in \mathcal{C}(O, R)$, și $\widehat{DC} = 80^\circ$, calculați $\angle ACB$ și $\widehat{BD}$.

4. În triunghiul ABC , $\sphericalangle A = 70^\circ$ și $\sphericalangle B = 50^\circ$.

a) Bisectoarele AD , BE și CF intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele D , E și F . Calculați măsurile arcelor $\widehat{BD}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{CE}$, $\widehat{AE}$, $\widehat{BF}$ și $\widehat{AF}$.

b) Înălțimile triunghiului ABC , AM , BN și CP , intersectează cercul circumscris triunghiului ABC , în punctele M , N și P . Calculați măsurile arcelor $\widehat{AP}$, $\widehat{BP}$, $\widehat{BM}$, $\widehat{CM}$, $\widehat{CN}$ și $\widehat{AN}$.

5. În cercul circumscris triunghiului ABC , diametrul care trece prin B este perpendicular pe bisectoarea unghiului C . Dacă $\sphericalangle C = 80^\circ$, calculați:

a) măsurile arcelor $\widehat{BC}$ și $\widehat{AC}$;

b) măsurile unghiurilor A și B .

6. Fie A , B , C trei puncte pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât arcele $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$ să fie invers proporționale cu numerele $0,25$, $0,2$ și $0,(3)$. Înălțimea AD , $D \in BC$, a triunghiului ABC intersectează cercul în M , iar bisectoarea unghiului C intersectează cercul în N . Demonstrați că:

a) $BC \equiv MN \equiv CN$;

b) $BN \equiv CM$.

7. În triunghiul ABC , înălțimile duse din vârfurile A , B , C intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele D , E și, respectiv, F . Știind că $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $\sphericalangle C = 40^\circ$, determinați măsurile arcelor mici $\widehat{AE}$, $\widehat{AF}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{CE}$ și $\widehat{CF}$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

8. Pe un cerc se consideră punctele distincte A , B , C , D (în această ordine), în sensul mișcării acelor de ceasornic, astfel încât $\widehat{AB} = 140^\circ$, $\widehat{BC} = 60^\circ$ și $\widehat{CD} = 120^\circ$. Calculați:

a) măsurile arcelor $\widehat{AD}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{DAB}$ și $\widehat{ABC}$;

b) măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$;

c) măsurile unghiurilor formate de diagonale cu laturile patrulaterului.

9. Patrulaterul $ABCD$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât latura AB subîntinde un arc de 60° , latura CD subîntinde un arc de 120° , iar diagonala $BD = 12$ cm corespunde unui unghi la centru de 120° . Calculați:

a) măsura unghiului AMD , unde $AC \cap BD = \{M\}$;

b) perimetrul triunghiului BCD .

10. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, se iau punctele M și N , astfel încât $\widehat{MN} = 80^\circ$, iar punctul P se află în exteriorul cercului. Știind că $PM \cap \mathcal{C}(O, R) = \{R\}$, $PN \cap \mathcal{C}(O, R) = \{T\}$, iar $\widehat{RT} = 140^\circ$, determinați măsurile unghiurilor MTN , RNT , MSN și MPN , unde $MT \cap RN = \{S\}$.

11. Fie A , B , C trei puncte pe cercul de centru O și rază R , astfel încât $\sphericalangle A = 50^\circ$ și $\sphericalangle B = 60^\circ$. Determinați măsurile unghiurilor AOB , BOC și COA .

12. În triunghiul ABC , cu $\sphericalangle A = 60^\circ$ și $\sphericalangle B = 40^\circ$, bisectoarele duse din vârfurile A , B , respectiv C intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele D , E , respectiv F . Calculați măsurile arcelor $\widehat{AE}$, $\widehat{AF}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{BE}$, $\widehat{CE}$ și $\widehat{CF}$.

13. Triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O și rază R . Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , știind că $0,5 \cdot \widehat{AB} = 0,(3) \cdot \widehat{BC}$ și $\widehat{AC} = 0,(3) \cdot \widehat{BC}$.

14. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, se consideră punctele A , B , C și D (în această ordine), în sensul mișcării acelor de ceasornic, astfel încât $0,(3) \cdot \sphericalangle DAB = 0,2 \cdot \sphericalangle ABC = 0,1(6) \cdot \sphericalangle BCD = 0,25 \cdot \sphericalangle CDA$. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

15. În $\mathcal{C}(O, R)$ este înscris triunghiul ABC , astfel încât $3 \cdot \angle A = 2 \cdot \angle B$ și $4 \cdot \angle B = 3 \cdot \angle C$. Calculați măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{AC}$.

16. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, se iau punctele A, B, C, D (în această ordine), în sensul de mișcare al acelor de ceasornic, astfel încât unghiurile patrulaterului $ABCD$ satisfac relațiile: $3 \cdot \widehat{AB} = 4 \cdot \widehat{BC}$; $\widehat{AD} = 2 \cdot \widehat{BC}$ și $6 \cdot \widehat{CD} = 5 \cdot \widehat{AD}$. Calculați:

a) măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{AD}$;

b) măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

17. În cercul circumscris triunghiului MNP , diametrul care trece prin vârful P al triunghiului este perpendicular pe bisectoarea unghiului N . Știind că $\angle N = 70^\circ$, determinați măsurile arcelor $\widehat{MN}$ și $\widehat{NP}$.

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ♦ ♦ ♦

18. Prin mijlocul E al arcului $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC , se duce coarda EF paralelă cu AB , $F \in \mathcal{C}(O, R)$. Demonstrați că arcele $\widehat{AFC}$ și $\widehat{ECF}$ sunt congruente.

19. Fie $ABCD$ un patrulater convex, astfel încât laturile sale să fie tangente la cerc. Demonstrați că $AB + CD = AD + BC$.

20. Pe tangenta în M la cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele N și P simetrice față de punctul M . Segmentele ON și OP intersectează cercul în punctele A și, respectiv, B . Știind că $\angle NOP = 120^\circ$, arătați că:

a) $AB \parallel NP$;

b) patrulaterul $AOBM$ este romb.

21. Demonstrați că simetricele ortocentrului unui triunghi față de mijloacele laturilor triunghiului se află pe cercul circumscris triunghiului.

22. În triunghiul ABC se consideră înălțimile BM , $M \in AC$, și CN , $N \in AB$, și H ortocentrul triunghiului. Fie P punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului ABC . Demonstrați că patrulaterul $HBPC$ este paralelogram.

23. Demonstrați că simetricele ortocentrului unui triunghi față de laturile triunghiului se află pe cercul circumscris triunghiului.

24. Se consideră triunghiul ABC . Demonstrați că mediatoarea laturii AB și bisectoarea unghiului ACB se intersectează într-un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC .

25. Pe un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ se iau punctele P și Q de o parte și de alta a diametrului MN . Dreapta NQ intersectează tangenta în M la cerc în punctul T . Demonstrați că $\angle NPQ \equiv \angle MTN$.

26. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$, diametrul AB intersectează coarda CD în punctul E . Știind că OD este perpendiculară pe AB , arătați că triunghiul FCE este isoscel, unde F este punctul de intersecție a dreptei AB cu tangenta în C la cerc.

27. Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC . AI se intersectează cu cercul circumscris triunghiului în D . Arătați că triunghiul BDI este isoscel.

PE-PP SUPERMATE ♦ ♦ ♦ ♦

28. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, se iau punctele M și N de o parte și de alta a diametrului AB . Dreptele AM și BN se intersectează în punctul P , iar dreptele BM și AN se intersectează în punctul Q . Demonstrați că dreapta AB este perpendiculară pe dreapta PQ .

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA FINALĂ

- Se acordă 1 punct din oficiu.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 120 de minute.

TESTUL 1

Subiectul I

(3 puncte)

- (0,5p) 1. Rezultatul calculului $\sqrt{(-2)^6 \cdot 3^2} - \sqrt{(-2)^4 \cdot 3^2}$ este egal cu:
a) 4; b) 6; c) 8; d) 12.
- (0,5p) 2. Calculând $\sqrt{2^4 + \sqrt{3^4}}$, se obține:
a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.
- (0,5p) 3. Rezultatul calculului $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ este:
a) -1; b) 1; c) $\sqrt{3}$; d) 2.
- (0,5p) 4. Calculând $\sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2} - \sqrt{(-2)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2}$, se obține:
a) 10; b) 20; c) 30; d) 40.
- (0,5p) 5. Rezultatul calculului $\sqrt{6 \cdot \sqrt{576}} - \sqrt{3 \cdot \sqrt{144}}$ este egal cu:
a) 6; b) 8; c) 9; d) 12.
- (0,5p) 6. Numerele întregi x pentru care $2x^2 - 11 = 7$ sunt:
a) $x \in \{-4; 4\}$; b) $x \in \{-3; 3\}$; c) $x \in \{-2; 2\}$; d) $x \in \{2; 3\}$.

Subiectul al II-lea

(3 puncte)

- (0,5p) 1. Un dreptunghi are lungimea egală cu 15 cm și lățimea egală cu 8 cm. Aria dreptunghiului este egală cu:
a) 110 cm²; b) 112 cm²; c) 118 cm²; d) 120 cm².
- (0,5p) 2. În paralelogramul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, aria triunghiului AOB este egală cu 36 cm². Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu:
a) 108 cm²; b) 132 cm²; c) 144 cm²; d) 160 cm².
- (0,5p) 3. În rombul $ABCD$ cu diagonala $BD = 16$ cm și măsura unghiului ABC egală cu 120°, lungimea laturii AB este egală cu:
a) 12 cm; b) 16 cm; c) 18 cm; d) 20 cm.
- (0,5p) 4. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, diagonala $AC = 16$ cm, iar unghiul AOB este egal cu 120°. Perimetrul triunghiului AOD este egal cu:
a) 16 cm; b) 18 cm; c) 20 cm; d) 24 cm.
- (0,5p) 5. În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, $AD = 8$ cm, iar $CD = 6$ cm. Lungimea bazei mari AB este egală cu:
a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 18 cm.
- (0,5p) 6. În rombul $ABCD$, măsura unghiului BAD este egală cu 45°. Măsura unghiului ADC este egală cu:
a) 75°; b) 90°; c) 120°; d) 135°.

Subiectul al III-lea**(3 puncte)**

- (0,5p) **1.** Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $x^2 = a$, unde $a = \sqrt{12^2 + 2^8} - \sqrt{12^2 + 3^4} + \sqrt{(-2)^4}$.
- (0,5p) **2.** Determinați valoarea numărului real $a = 2\sqrt{216} + \sqrt{12}(\sqrt{48} - 2\sqrt{18}) - \sqrt{18}(\sqrt{32} - \sqrt{12})$.
- (0,5p) **3.** Calculați: $\left(\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right) \cdot 2\sqrt{6} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \cdot 3\sqrt{6}$.
- (0,5p) **4.** În paralelogramul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, punctele M și N aparțin laturilor AB , respectiv CD astfel încât $AM \equiv CN$. Demonstrați că:
- a)** $OM \equiv ON$; **b)** punctele M, O, N sunt coliniare.
- (0,5p) **5.** În triunghiul ABC , BD este mediană, cu $D \in AC$, iar EF este linie mijlocie, $E \in AB$ și $F \in BC$. Știind că $EF \cap BD = \{O\}$, demonstrați că:
- a)** $OB \equiv OD$; **b)** $OE \equiv OF$.
- (0,5p) **6.** În dreptunghiul $ABCD$ ($AB > BC$) se iau punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ și $Q \in DA$ astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$, iar $MP \cap NQ = \{O\}$. Demonstrați că:
- a)** $OM \equiv OP$; **b)** $ON \equiv OQ$.

TESTUL 2**Subiectul I****(3 puncte)**

- (0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{(-3)^4 \cdot (-2)^2} - \sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2}$ este egal cu:
- a)** 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 6.
- (0,5p) **2.** Calculând $\sqrt{2^2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3}$, se obține:
- a)** 4; **b)** 6; **c)** 8; **d)** 12.
- (0,5p) **3.** Rezultatul calculului $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$ este:
- a)** 1; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** 2; **d)** 3.
- (0,5p) **4.** Calculând $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$, se obține:
- a)** 1; **b)** $\sqrt{3}$; **c)** 2; **d)** 3.
- (0,5p) **5.** Rezultatul calculului $\sqrt{50} - \sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$ este:
- a)** $-\sqrt{2}$; **b)** 0; **c)** $\sqrt{2}$; **d)** $2\sqrt{2}$.
- (0,5p) **6.** Numerele întregi x pentru care $3x^2 - 7 = 5$ sunt:
- a)** $x \in \{-4; 4\}$; **b)** $x \in \{-3; 3\}$; **c)** $x \in \{-2; 2\}$; **d)** $x \in \{2; 3\}$.

Subiectul al II-lea**(3 puncte)**

- (0,5p) **1.** Un trapez are linia mijlocie egală cu 13 cm, iar lungimea bazei mici egală cu 8 cm. Lungimea bazei mari este egală cu:
- a)** 12 cm; **b)** 14 cm; **c)** 16 cm; **d)** 18 cm.

TESTE RECAPITULATIVE

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 100 de minute.

TESTUL 1

- (1p) 1. Arătați că numărul x este număr natural pătrat perfect, unde:

$$x = \sqrt{3 \cdot 0, (3)} + \sqrt{30 \cdot 0, 0(3)} + \sqrt{300 \cdot 0, 00(3)} + \sqrt{3000 \cdot 0, 000(3)}.$$

- (2p) 2. Calculați $a \cdot b$ și $\frac{a}{b}$, unde:

$$a = \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{98} - \sqrt{18} - \sqrt{8} \text{ și } b = \sqrt{147} - \sqrt{108} + \sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{12}.$$

- (1p) 3. Calculați valoarea numărului real:

$$a = \sqrt{(\sqrt{8} - 4)^2} + \sqrt{(\sqrt{18} - 6)^2} + 5\sqrt{(1 - \sqrt{8})^2} + \sqrt{(\sqrt{50} - 8)^2}.$$

- (1p) 4. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv AD . Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram.

- (2p) 5. Fie $ABCD$ un pătrat în care punctul E este mijlocul laturii AB , iar $F \in AD$ astfel încât $AF = 16$ cm și $AE = 12$ cm.

a) Calculați aria triunghiului CEF .

b) Dacă $EF = 20$ cm, calculați distanța de la punctul C la dreapta EF .

- (2p) 6. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele A, B, C și D (în această ordine) în sensul mișcării acelor de ceasornic, astfel încât arcele de cerc $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ și $\widehat{AD}$ sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 6, respectiv 5. Calculați:

a) măsurile arcelor $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$, respectiv $\widehat{AD}$.

b) măsurile unghiurilor A, B, C , respectiv D .

TESTUL 2

- (1p) 1. Arătați că numărul x este pătratul unui număr rațional, unde:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \left[\sqrt{3 \cdot 0, (592)} + \sqrt{30 \cdot 0, 0(592)} + \sqrt{300 \cdot 0, 00(592)} + \sqrt{3000 \cdot 0, 000(592)} \right].$$

- (2p) 2. Calculați $a \cdot b$ și $\frac{a}{b}$, unde:

$$a = \sqrt{12} - \sqrt{147} + \sqrt{27} - \sqrt{48} - \sqrt{75} \text{ și } b = \sqrt{128} - \sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{32} - \sqrt{8}.$$

- (1p) 3. Calculați valoarea numărului real:

$$a = \sqrt{(4 - 2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(4\sqrt{5} - 9)^2} + \sqrt{(6\sqrt{5} - 14)^2} + 4\sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2}.$$

- (1p) 4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care punctele $M \in AB, N \in BC, P \in CD$ și $Q \in AD$, astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$. Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

- (2p) 5. În paralelogramul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$, aria triunghiului BOC este egală cu 72 cm^2 .

a) Aflați aria paralelogramului $ABCD$.

b) Dacă $AC = 48$ cm, aflați distanța de la punctul B la diagonală AC .

PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR

1. Considerăm pătratul $ABCD$ și punctele $E \in BC$, $F \in DC$. Dacă $\angle BAE = 15^\circ$ și $\angle DAF = 30^\circ$, determinați $\angle AEF$.

Gazeta Matematică nr. 7-8-9/2011

2. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AC \perp BD$. Fie E mijlocul diagonalei AC . Paralela prin E la BD intersectează pe AB în M . Demonstrați că:

a) triunghiul AMC este isoscel;

b) $ME = \frac{BD}{2}$ și $CM = \frac{AB + CD}{2}$.

O.L. Alba 2016

3. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, punctul $T \in DC$, $AT \perp CD$, iar punctul M este mijlocul lui AC . Dacă $MT \parallel BD$, demonstrați că $ABCD$ este trapez isoscel.

O.L. Prahova 2018

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care înălțimea AD și mediana BM au aceleași lungimi ($D \in BC$, $M \in AC$), iar $\{G\} = AD \cap BM$. Arătați că $GM = AG - GD$.

O.L. Prahova 2018

5. Fie ABC un triunghi oarecare, iar M și D mijloacele segmentelor AB , respectiv BC . Dacă $E \in AD$ astfel încât $AD = 4 \cdot ED$, iar $ME \cap BC = \{N\}$, demonstrați că:

a) $ME \equiv EN$;

b) $DN \equiv NC$.

O.L. Ilfov 2016

6. În triunghiul isoscel ABC cu $AB \equiv AC$ și $\angle BAC = 120^\circ$, punctele M și N sunt mijloacele laturilor AC , respectiv BC . Fie $MP \perp BC$, $P \in BC$, și $MP \cap AB = \{Q\}$. Demonstrați că $AQMN$ este romb.

O.L. Mureș 2016

7. Fie paralelogramul $ABCD$ astfel încât $3DB = 2DA$ și $\angle ADB = 60^\circ$. Arătați că $AC = 2AB$.

Gazeta Matematică nr. 10/2016

8. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB \equiv AC$ și $\angle BAC > 60^\circ$. Considerăm punctul $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv AC$. Demonstrați că semidreapta AD și mediatoarea segmentului DC se intersectează pe bisectoarea unghiului exterior triunghiului ABC cu vârful în C .

Gazeta Matematică nr. 9/2018

9. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel cu baza BC . Perpendicularele în punctul A pe AB , respectiv AC intersectează dreapta BC în E , respectiv F .

Dacă $EN \perp AC$, $N \in AC$, $FM \perp AB$, $M \in AB$, și $EN \cap FM = \{P\}$, demonstrați că:

a) $AEPF$ și $ABPC$ sunt rombur;

b) $MNST$ este dreptunghi, unde $\{T\} = PB \cap AF$ și $\{S\} = PC \cap AE$.

Gazeta Matematică nr. 10/2017

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)



RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚĂLĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

ALGEBRĂ

TESTUL 1. 1. a) $a = -14$; $b = -6$; $n = -8$; b) $x = -9$; $y = -8$; $n = -17$. 2. a) $S = \{3\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \{4\}$; d) $S = \{-2\}$. 3. a) $x \in \{0, 1, 2\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 4. a) $x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$; b) $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. 5. a) $n \in \{-10, -4, -2, 0, 2, 8\}$; b) $n \in \{-10, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 6\}$; c) $n \in \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$; d) $n \in \{-7, -1, 0, 6\}$.

6. a) $\frac{7}{20}$; b) $-\frac{43}{84}$; c) $-\frac{25}{48}$; d) $\frac{1}{12}$. 7. $377 = an + 17$, $17 < n$; $517 = bn + 13$, $13 < n$; $803 = cn + 11$, $11 < n \Rightarrow 360 = an$,

$504 = bn$, $792 = cn$, $n > 17 \Rightarrow n \mid (360; 504; 792) \Rightarrow n \mid 72 \Rightarrow n \in \{18, 24, 36, 72\}$. 8. $n = 20a + 14$, $n = 24b + 18$, $n = 28c + 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 6 = 20(n + 1)$, $n + 6 = 24(b + 1)$, $n + 6 = 28(c + 1) \Rightarrow [20; 24; 28] \mid n + 6 \Rightarrow n = 840k - 6$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru $k = 1$ se obține

$n = 834$. 9. a) $12 \mid \overline{a24b}$, $a \neq 0 \Rightarrow 3 \mid \overline{a24b}$, $4 \mid \overline{a24b}$, $(3; 4) = 1$; din $3 \mid \overline{a24b} \Rightarrow 3 \mid a + b + 6 \Rightarrow a + b + 6 = \mathcal{M}_3$; din $4 \mid \overline{a24b} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \{0, 4, 8\}$; $b = 0 \Rightarrow a + 6 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{3, 6, 9\}$; $b = 4 \Rightarrow a + 10 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{2, 5, 8\}$; $b = 8 \Rightarrow a + 14 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{1, 4,$

$7\}$; $(a, b) \in \{(3, 0), (6, 0), (9, 0), (2, 4), (5, 4), (8, 4), (1, 8), (4, 8), (7, 8)\}$; b) $(a, b) \in \{(4, 0), (2, 2), (9, 4), (2, 6), (5, 8)\}$;

c) $(a, b) \in \{(7, 0), (3, 4), (8, 8)\}$. 10. a) $a = 12x$, $b = 12y$, $(x; y) = 1$, $x < y$, $xy = 42$. Am folosit $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$. $x = 1 \Rightarrow y =$

$= 42 \Rightarrow a = 12$, $b = 504$; $x = 2 \Rightarrow y = 21 \Rightarrow a = 24$, $b = 252$; $x = 3 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow a = 36$, $b = 168$; b) $a - b = \{120, 240, 480, 1560\}$.

11. a) Fie $d \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $d = (9n + 17; 12n + 23) \Rightarrow d \mid 9n + 17$ și $d \mid 12n + 23 \Rightarrow d \mid 36n + 68$ și $d \mid 36n + 69 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1 \Rightarrow (9n + 17; 12n + 23) = 1 \Rightarrow$ fracția este ireductibilă; b), c), d) Analog a). 12. $A = 12^n \cdot 68 = 4 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid A$.

13. $A = 4^n \cdot 42 = 2 \cdot 21 \cdot 4^n \Rightarrow 21 \mid A$.

TESTUL 2. 1. a) $a = -12$; $b = -9$; $n = +6$; b) $x = -24$; $y = -18$; $n = -6$. 2. a) $S = \{5\}$; b) $S = \{-7\}$; c) $S = \{4\}$; d) $S = \{4\}$. 3. a) $x \in \{-6,$

$-5, -4, -3, -2\}$; b) $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. 4. a) $-\frac{13}{20}$; b) $-\frac{7}{18}$; c) $\frac{7}{16}$; d) $\frac{7}{6}$. 5. a) $n \in \{-9, -5, -3,$

$-2, 0, 1, 3, 7\}$; b) $n \in \{-14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 10\}$; c) $n \in \{-17, -3, -2, 0, 1, 3, 4, 18\}$; d) $n \in \{-18, -4, -3, -1, 0, 2,$

$3, 17\}$. 6. $n \in \{18, 36\}$. 7. $(a, b) \in \{(12, 360), (24, 180), (36, 120), (60, 72)\}$. 8. $n = 426$. 9. a) $(a, b) \in \{(0, 2), (3, 2), (6, 2),$

$(9, 2), (2, 6), (5, 6), (7, 6)\}$; b) $(a, b) \in \{(8, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 6), (0, 8), (9, 8)\}$; c) $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (5, 4), (1, 8)\}$;

d) $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (4, 5)\}$. 10. a) $x = 54$, $y = 72$, $z = 108$, $t = 36$; b) $a = 56$, $b = 84$, $c = 126$; c) $a = 24$, $b = 72$, $c = 96$.

11. a) $A = 16^n \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid A$; b) $A = 30^n \cdot 11 \Rightarrow 11 \mid A$; c) $a = 102 \cdot 12^n = 6 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid a$.

TESTUL 3. 1. a) $a = -12$; $b = -6$; $n = 2$; b) $x = -21$; $y = -12$; $n = -9$. 2. a) $S = \{2\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \{7\}$; d) $S = \{-4\}$. 3. a) $x \in \{0, 1,$

$2, 3, 4\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 4. a) $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $x \in \{-5, -4, -3, -2\}$;

c) $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$. 5. a) $A = \{3, 4, 5, 8, 11, 20\}$; $B = \{0, 1, 3, 5, 9, 21\}$; $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 20, 21\}$; $A \cap B = \{3, 5\}$;

$A \setminus B = \{4, 8, 11, 20\}$; $B \setminus A = \{0, 1, 9, 21\}$; b) $A = \{-7, -2, -1, 1, 2, 3, 8\}$; $B = \{-11, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 10\}$; $A \cap B = \{-2, -1, 1, 3\}$;

$A \cup B = \{-11, -7, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 8, 10\}$; $A \setminus B = \{-7, 2, 8\}$; $B \setminus A = \{-11, -4, 0, 10\}$. 6. a) $\frac{5}{18}$; b) $\frac{4}{27}$; c) $-\frac{4}{15}$; d) $-\frac{4}{9}$.

7. a) $(a, b) \in \{(12, 252), (36, 84), (84, 36), (252, 12)\}$; $\min(a + b) = 120$; b) $n \in \{1273, 2533, 3793\}$. 8. a) $(x, y) \in \{(2, 4), (5, 7),$

$(7, 9)\}$; b) $(x, y) \in \{(3, 2)\}$; c) $x \neq 0$; $(x, y) \in \{(4, 2), (6, 4), (8, 6)\}$; d) $x \neq 0$; $(x, y) \in \{(4, 0), (9, 5)\}$. 9. a) $(a, b) \in \{(2, 0), (5, 0), (8, 0),$

$(1, 4), (4, 4), (7, 4), (0, 8), (3, 8), (6, 8), (9, 8)\}$; b) $(a, b) \in \{(1, 0), (4, 0), (7, 0), (2, 5), (5, 5), (8, 5)\}$; c) $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0),$

$(7, 2), (5, 4), (3, 6), (1, 8)\}$; d) $(a, b) \in \{(7, 0), (3, 4)\}$; e) $(a, b) \in \{(2, 0), (6, 5)\}$. 10. a) $N = 13 \cdot 2^n \Rightarrow 13 \mid N$; b) $A = 88 \cdot 15^n =$

$= 8 \cdot 11 \cdot 15^n \Rightarrow 11 \mid A$. 11. $n \in \{16, 20, 40, 80\}$. 12. 300 de lei. 13. $a = 60$; $b = 32$. 14. Fie $d \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $d = (4n + 7;$

$10n + 17) \Rightarrow d \mid 4n + 7$ și $d \mid 10n + 17 \Rightarrow d \mid 20n + 35$ și $d \mid 20n + 34 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (4n + 7; 10n + 17) = 1 \Rightarrow$ fracția este

ireductibilă. La fel se demonstrează și pentru celelalte două fracții.

d) $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ (LLL) $\Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM \Rightarrow AM$ – bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow AM$ – înălțime în $\triangle ABC \Rightarrow AM \perp BC$. Din $AM \perp FG$ și $AM \perp BC \Rightarrow BC \parallel FG$. 4. a) $AD \perp BC \Rightarrow \sphericalangle DAC = 30^\circ$; în $\triangle AHF$: $AE \perp HF$ și $HE \equiv EF \Rightarrow \triangle AHF$ – isoscel; cum $\sphericalangle HAE = \sphericalangle FAE = 30^\circ \Rightarrow \triangle AHF$ – echilateral $\Rightarrow HF = AH \Rightarrow 2EF = AH \Rightarrow EF = \frac{AH}{2}$; b) În $\triangle AFC$: $AE = EC \Rightarrow FE$ – mediană; $FE \perp AC \Rightarrow FE$ – înălțime $\Rightarrow \triangle AFC$ – isoscel; c) În $\triangle CFH$: CE – mediană și înălțime $\Rightarrow \triangle CFH$ – isoscel; dar $\sphericalangle FCH = 60^\circ \Rightarrow \triangle CFH$ – echilateral $\Rightarrow CF = CH = BH$. 5. a) $\triangle ABD$ – isoscel și $BF \perp AD \Rightarrow AF = FD \Rightarrow$ în $\triangle AHD$, HF – mediană și înălțime $\Rightarrow \triangle AHD$ – isoscel ($HA \equiv HD$); b) În $\triangle ACE$ isoscel, $CG \perp AE \Rightarrow AG = GE \Rightarrow$ în $\triangle AHE$, HG – mediană și înălțime $\Rightarrow \triangle AHE$ – isoscel $\Rightarrow HA \equiv HE$. Deci $HD \equiv HE \Rightarrow \sphericalangle HDE = \sphericalangle HED$ (1); c) $\triangle HBD \equiv \triangle HBA$ (LLL) $\Rightarrow \sphericalangle HDB \equiv \sphericalangle HAB$ (2); $\triangle HCA \equiv \triangle HCE$ (LLL) $\Rightarrow \sphericalangle HEC \equiv \sphericalangle HAC$ (3). Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \sphericalangle HAB \equiv \sphericalangle HAC \Rightarrow AH$ – bisectoarea $\sphericalangle BAC$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I: MULȚIMEA NUMERELOR REALE

RĂDĂCINA PĂTRATĂ

1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

1.

x	-5	-3	-2	0	± 4	± 6	9	12
x^2	25	9	4	0	16	36	81	144
2. a) 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; b) 144; 169; 196; 225; 256; 289; c) 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961. 3. a) ± 5 ; b) ± 8 ; c) ± 11 ; d) ± 27 ; e) ± 36 . 4. a) $2^2 \cdot 3^2$; b) 2^6 ; c) 1 nu este prim; d) 13^2 ; e) $2^2 \cdot 3^4$; f) 23^2 ; g) $2^8 \cdot 3^4$; h) $7^2 \cdot 2^6 \cdot 5^2$; i) $2^6 \cdot 5^6$; j) $2^{12} \cdot 5^4$; k) $11^2 \cdot 13^6$. 5. a) 36; 4; 169; 196; 225; 256; b) 13^2 ; $(-9)^4$; 3^8 ; $(-12)^{18}$; $(-28)^6$; c) 5^{8n} ; 7^{6n+4} ; 15^{n^2+n} ; 12^{n^2-n+6} ; $n > 1, n \in \mathbb{N}$. 6. a) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$; b) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 7. a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) F; g) F; h) F. 8. (i) a) 6; b) 40; c) 7; d) 6; e) 16; f) 13; g) 12; h) 8; i) $x \in \{1; 5\}$; j) $x \in \emptyset$; k) $x \in \{1\}$; l) $x \in \{14\}$; (ii) a) ± 6 ; b) ± 40 ; c) ± 7 ; d) ± 6 ; e) ± 16 ; f) ± 13 ; g) ± 12 ; h) ± 8 ; i) $x \in \{1; 5\}$; j) $x \in \{-7; -1\}$; k) $x \in \{-7; 1\}$; l) $x \in \{-4; 14\}$. 9. a) 2^{101} ; b) 3^{125} ; c) 5^{180} ; d) 3^{50} ; e) 6^{100} ; f) 8^{1010} . 10. a) 70^2 ; b) 113^2 ; c) 1010^2 ; d) 1010^2 ; e) $2^6 \cdot 3^2 \cdot 17^2$; f) 1009^2 . 11. a) 99; b) 105; c) 18; d) 180; e) 15; f) 50; g) 50; h) 88. 12. a) $x = 9^n$; $\sqrt{x} = 3^n$; b) $x = 25^n$; $\sqrt{x} = 5^n$; c) $x = 16^{n+2}$; $\sqrt{x} = 4^{n+2}$; d) $x = 4^{n+3}$; $\sqrt{x} = 2^{n+3}$. 13. $x = 36^2 \cdot 12^{2n}$. 14. $x = 2^{2020} = (2^{1010})^2$. 15. a) $x = 49 \cdot 144 = (7 \cdot 12)^2 = 84^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 84$; b) $x = 49 \cdot 100 = (7 \cdot 10)^2 = 70^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 70$; c) $x = 501^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 501$; d) $x = 1011^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1011$; e) $x = 1203^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1203$. 16. a) $x = 2 + 15(2^2 + 2^6 + \dots + 2^{1998}) \Rightarrow u(x) = 2 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$; b) $x = 3 + 40(3^2 + 3^6 + \dots + 3^{1998}) \Rightarrow u(x) = 3 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$. 17. a) $x = 1010^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1010$; b) $a = 289 \cdot 576 \Rightarrow \sqrt{a} = 408$; c) $n = 361 \Rightarrow \sqrt{n} = 19$; d) $n = 729 = 27^2$; $x^2 = 27^2 \Rightarrow |x| = 27 \Rightarrow x \in \{-27, 27\}$; e) $n = 729 = 27^2 \Rightarrow \sqrt{n} = 27$. 18. a) $u(x) \in \{3, 8\}$; b) $u(x) \in \{3, 8\}$; c) $u(x) \in \{3, 8\}$; d) $u(x) = 2$; e) $u(x) = 8$; f) $u(x) = 3$; g) $u(x) = 7$; h) $u(x) = 3$; i) $x = 8 + 585(8^2 + 8^6 + \dots + 8^{2014}) \Rightarrow u(x) = 8 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$; j) $x = 7 + 400(7^2 + 7^6 + \dots + 7^{2018}) \Rightarrow u(x) = 7 \Rightarrow x \neq \text{p.p.}$. 19. $n = 10x + 8, n \in \mathbb{N}, \forall x$ cifră nenulă. 20. $A = \sqrt{49 \cdot 25^{2n} \cdot 9^{2n+2}} = 7 \cdot 25^n \cdot 9^{n+1}$. 21. $a = 625 \cdot 49^n \cdot 24^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 25 \cdot 7^n \cdot 24^n = \text{nr. par}$. 22. $a = 13^2 \cdot 5^{2n} \cdot 12^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 13 \cdot 5^n \cdot 12^n = \text{nr. par}$. 23. a) 14; 23^2 ; 35; 3^3 ; 7^2 ; $|a|$; a^2 ; a^4 ; $|a^3|$; b) $2^2 \cdot 3$; $16 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 18$; $5 \cdot 3^2 \cdot 12$. 24. a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$; b) $2 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$; d) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; e) $2^2 \cdot 14 \cdot 15$; f) $2 \cdot 7 \cdot 3^2$; g) $2^5 \cdot 5$; h) $2^3 \cdot 3^2$; i) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$; j) $3^2 \cdot 5 \cdot 11$; k) $2^5 \cdot 3^3$; l) $7 \cdot 26$. 25. a) 23; b) 23^2 ; c) 23^3 ; d) 17^4 ; e) 15; f) 36^2 ; g) 48; h) 12^2 ; i) 2^{12} ; j) 2^{1009} ; k) 3^{1010} ; l) 6^{1009} ; m) 7^{1010} ; n) 5^{1008} . 26. a) 24; 27; 25; 18; b) 20; 28; 21; 26; c) 40; 36; 42; 45; d) 50; 48; 56; 72. 27. a) 61; 44; 68; 96; b) 85; 47; 84; 63; c) 46; 59; 62; 54; d) 113; 213; 123; 126. 28. a) 444; b) 150; c) 289; d) 289. 29. a) 6^2 ; b) $3 \cdot 11^2$; c) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; d) $2^3 \cdot 14 \cdot 9$; e) 13; f) 13; g) 21; h) 2^4 . 30. a) 2^5 ; b) 5^2 ; c) 75; d) 15; e) 17; f) 25; g) 50; h) 10. 31. a) 15; b) 20; c) 25; d) 18; e) 17; f) 108; g) 70. 32. a) 18; b) 63; c) 36; d) 63^2 ; e) 42; f) 31. 33. a) 80; b) 535; c) 51; d) 27. 34. a) 344; b) 257. 35. a) 1010; b) 2; c) 1010; d) 501; e) 505. 36. $a = (10 \cdot 40^n)^2$. 37. 239. 38. Card $A = 13$, card $B = 39$.

2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ

1. $B = \left\{ \frac{4}{9}, \frac{9}{64}, 64; 1; \frac{25}{9}, \frac{16}{9}, \frac{49}{36}, \frac{25}{144}, \frac{49}{144} \right\}$.

$= \frac{3(3^{1010} - 1)(3^{1010} + 1)}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}(3^{1010} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow z = 3^{1010} + 1 - 1 = 3^{1010} = (3^{505})^2$. **18.** $a \in \{-10; 4\}$; $b \in \{-3; -1\}$. **19.** $\overline{ab} = 81$. **20.** a) $E^2(x) = 64 \Rightarrow |E(x)| = 8 \Rightarrow |x + 3| = 8 \Rightarrow x \in \{-11; 5\}$; b) $a \in \{-2; -1\}$. **21.** Egalitatea din enunț se poate scrie: $(a - 1 - 2\sqrt{a - 1} + 1) + (b - a - 2\sqrt{b - a} + 1) + (c - b - 2\sqrt{c - b} + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a - 1} - 1)^2 + (\sqrt{b - a} - 1)^2 + (\sqrt{c - b} - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 2; b = 3; c = 4$. **22.** $x = 7; y = 4$. **23.** $2\sqrt{a - 4} = \sqrt{4(a - 4)} \leq \frac{4 + a - 4}{2} = \frac{a}{2}$; $3\sqrt{b - 9} = \sqrt{9(b - 9)} \leq \frac{9 + b - 9}{2} = \frac{b}{2}$; $4\sqrt{c - 16} = \sqrt{16(c - 16)} \leq \frac{16 + c - 16}{2} = \frac{c}{2}$. Deci $2\sqrt{a - 4} + 3\sqrt{b - 9} + 4\sqrt{c - 16} \leq \frac{a + b + c}{2}$. Egalitatea are loc pentru $a = 8; b = 18; c = 32$. **24.** $a + 2 \geq 2\sqrt{2a}$; $2b + 3 \geq 2\sqrt{6b}$; $3c + 4 \geq 2\sqrt{12c} \Rightarrow (a + 2)(2b + 3)(3c + 4) \geq 96\sqrt{abc} = 96 \cdot \frac{1}{6} = 16$. Inegalitatea este strictă, deoarece egalitățile $a = 2$, $2b = 3$, $3c = 4$ și $36abc = 1$ nu sunt îndeplinite simultan. *Observație:* Poate fi înlocuită ipoteza $36abc = 1$ cu $abc = 4$ și concluzia cu $(a + 2)(2b + 3)(3c + 4) \geq 192$. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow a = 2$, $2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$, $3c = 4 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$. **25.** Se notează $|x_1 - x_2| = 2|x_2 - x_3| = 3|x_3 - x_4| = \dots = 2019|x_{2019} - x_{2020}| = 2020|x_{2020} - x_1| = k$, de unde rezultă că $x_1 - x_2 = \pm k$; $x_2 - x_3 = \pm \frac{k}{2}$; $x_3 - x_4 = \pm \frac{k}{3}$; ...; $x_{2019} - x_{2020} = \pm \frac{k}{2019}$; $x_{2020} - x_1 = \pm \frac{k}{2020}$. Prin însumare se obține $k \left(\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \dots \pm \frac{1}{2019} \pm \frac{1}{2020} \right) = 0 \Rightarrow k = 0$. Deci numerele sunt egale. **26.** $a = 2\sqrt{3}$; $b = \sqrt{3}$; $c = 3$; $P = 3(\sqrt{3} + 1)$. **27.** $a(a - 1) + |b + 2| + (c^2 - 4)^2 \geq 0$, deoarece $a(a - 1) \geq 0$, $|b + 2| \geq 0$; $(c^2 - 4)^2 \geq 0$. Deci $a = 1$; $b = -2$; $c = 2$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I: PATRULATERE

1. Patrulatere convexe

1. $\sphericalangle A = 105^\circ$; $\sphericalangle B = 75^\circ$; $\sphericalangle C = 90^\circ$; $\sphericalangle D = 90^\circ$. **2.** a) $\sphericalangle A = 36^\circ$; $\sphericalangle B = 72^\circ$; $\sphericalangle C = 108^\circ$; $\sphericalangle D = 144^\circ$; b) Se folosește metoda reducerii la absurd și se ajunge la $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD = 36^\circ$ (fals). **3.** $\sphericalangle A = 60^\circ$; $\sphericalangle B = 80^\circ$; $\sphericalangle C = 100^\circ$; $\sphericalangle D = 120^\circ$. **4.** Notăm cu a măsura celor trei unghiuri congruente (în grade) și cu b măsura celui alt unghi; atunci $3a + b = 360^\circ$; *Cazul I.* $a + b = 170^\circ$, de unde se obține $a = 95^\circ$ și $b = 75^\circ$. *Cazul II.* Dacă $2a = 170^\circ$, atunci $a = 85^\circ$ și $b = 105^\circ$. **5.** $\sphericalangle A = 115^\circ$; $\sphericalangle B = 85^\circ$; $\sphericalangle C = 95^\circ$; $\sphericalangle D = 65^\circ$. **6.** $\sphericalangle A = 45^\circ$; $\sphericalangle B = 75^\circ$; $\sphericalangle C = 105^\circ$; $\sphericalangle D = 135^\circ$. **7.** $\sphericalangle A = 36^\circ$; $\sphericalangle B = 72^\circ$; $\sphericalangle C = 108^\circ$; $\sphericalangle D = 144^\circ$. **8.** $\sphericalangle A = 112^\circ 30'$; $\sphericalangle B = 135^\circ$; $\sphericalangle C = 90^\circ$; $\sphericalangle D = 22^\circ 30'$. **9.** $\sphericalangle A = 45^\circ$; $\sphericalangle B = 60^\circ$; $\sphericalangle C = 120^\circ$; $\sphericalangle D = 135^\circ$. **10.** $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72^\circ$; $\sphericalangle D = 126^\circ$ și $\sphericalangle E = 90^\circ$. **11.** $\sphericalangle A = \sphericalangle N = 90^\circ$; $\sphericalangle M = 140^\circ$. **12.** $\sphericalangle B = 104^\circ$; $\sphericalangle C = 72^\circ$; $\sphericalangle D = 144^\circ$. **13.** $\sphericalangle A = 80^\circ$; $\sphericalangle B = 160^\circ$; $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 60^\circ$. **14.** $\sphericalangle A = 60^\circ$; $\sphericalangle B = 75^\circ$; $\sphericalangle C = 90^\circ$; $\sphericalangle D = 135^\circ$. **15.** 90° . **16.** $\sphericalangle A = 90^\circ$; $\sphericalangle B = 90^\circ$; $\sphericalangle C = 60^\circ$; $\sphericalangle D = 120^\circ$. **17.** $\sphericalangle A = 112^\circ 30'$; $\sphericalangle B = 135^\circ$; $\sphericalangle C = 90^\circ$; $\sphericalangle D = 22^\circ 30'$. **18.** $\sphericalangle AMC = 90^\circ$; $\sphericalangle MAB = 140^\circ$; $\sphericalangle B = 40^\circ$; $\sphericalangle BCM = 90^\circ$. **19.** $\sphericalangle A = 75^\circ$; $\sphericalangle B = 90^\circ$; $\sphericalangle C = 60^\circ$; $\sphericalangle D = 135^\circ$. **20.** $\sphericalangle C = 55^\circ$; $\sphericalangle ADC = 85^\circ$; $\sphericalangle DBC = 69^\circ$; $\sphericalangle ABD = 41^\circ$. **21.** $\sphericalangle QMN = 130^\circ$; $\sphericalangle MNP = 60^\circ$; $\sphericalangle QPN = 70^\circ$. **22.** $NQ = 32$ cm. **23.** $\mathcal{P}_{MQP} = 86$ cm. **24.** $\sphericalangle M = 60^\circ$; $\sphericalangle N = 80^\circ$; $\sphericalangle P = 100^\circ$; $\sphericalangle Q = 120^\circ$. **25.** a) $\triangle NMT \equiv \triangle NPR$ (CU) $\Rightarrow NT \equiv NR$; $MN \equiv PN$; $\triangle NMQ \equiv \triangle NPQ$ (IC) $\Rightarrow MQ \equiv PQ$; b) $\sphericalangle MQN \equiv \sphericalangle PQN \Rightarrow QN$ - bisectoarea $\sphericalangle MQP$. **26.** a) $\triangle MNQ \equiv \triangle PNQ$ (LLL) $\Rightarrow \sphericalangle MQN \equiv \sphericalangle PQN$ și $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PNQ$; b) Din congruența de la punctul a) $\Rightarrow \sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$; c) $\triangle MNP$ - isoscel (ipoteză) ($MN = PN$). Cum $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle PNQ \Rightarrow QN$ - bisectoarea $\sphericalangle MNP \Rightarrow NQ$ - înălțime $\Rightarrow NQ \perp MP$.

2. Paralelogramul

2. 16 cm. **3.** 31 cm. **4.** 144 cm. **5.** 60 cm. **6.** $MR \equiv QS = a$ și $RQ = MS = b$; $2(a + b) = 36,8 \Rightarrow a + b = 18,4$; $\triangle RNQ$ și $\triangle SQP$ echilaterale $\Rightarrow MN = a + b = 18,4$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{MNP} = 3(a + b) = 55,2$ cm. **7.** a) $\sphericalangle A = 36^\circ$; $\sphericalangle B = 72^\circ$; $\sphericalangle C = 108^\circ$; $\sphericalangle D = 144^\circ$; b) $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = 72^\circ \Rightarrow \triangle AED$ - isoscel; c) unghiurile alăturate sunt suplementare, deci au laturile paralele două câte două. **8.** $BC = 6$ cm. **9.** $AB = 32$ cm. **10.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 48$ cm. **11.** a) $\sphericalangle A = 80^\circ$; $\sphericalangle B = 100^\circ$; b) $\sphericalangle A = 72^\circ$; $\sphericalangle D = 108^\circ$; c) $\sphericalangle B = 105^\circ$; $\sphericalangle C = 75^\circ$; d) $\sphericalangle C = 72^\circ$; $\sphericalangle D = 108^\circ$. **12.** $AD \perp AC$; $DC = 2AD \Rightarrow \sphericalangle ACD = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle BCD = 120^\circ$. **13.** Se demonstrează că

$= 40^\circ$; $\widehat{ADC} = 150^\circ$; $\widehat{BCD} = 170^\circ$; $\widehat{ABC} = 210^\circ$; $\widehat{BAD} = 190^\circ$; b) $\sphericalangle A = 85^\circ$; $\sphericalangle B = 75^\circ$; $\sphericalangle C = 95^\circ$; $\sphericalangle D = 105^\circ$; c) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = 55^\circ$; $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = 30^\circ$; $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 75^\circ$; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 20^\circ$. 4. $\sphericalangle AOC = 80^\circ$; $\sphericalangle A = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC = 75^\circ$; $\sphericalangle B = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = 40^\circ$; $\sphericalangle C = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = 65^\circ$.

TESTUL 5. 1. $O \in AD \Rightarrow AD$ – diametru $\Rightarrow 3 \widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{BC} = \widehat{AB} = 60^\circ$; cum $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \Rightarrow \begin{matrix} BC \parallel AD \\ AB \equiv CD \end{matrix} \Rightarrow \Rightarrow ABCD$ – trapez isoscel; b) $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA$; cum $\sphericalangle BAD = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle CDA = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = 120^\circ$; c) $AD = 16$ cm; cum $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ și $\triangle COD$ – echilaterale $\Rightarrow AB = BC = CD = 8$ cm; $h_{\text{trapez}} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(AD + BC) h_{\text{trapez}}}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 48\sqrt{3}$ cm²; $\mathcal{L}_{BCD} = \frac{16\pi}{3}$ cm. 2. a) $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle AOC \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{BC} \equiv \widehat{AC} \Rightarrow AB \equiv BC \equiv AC \Rightarrow \triangle ABC$ – echilateral; b) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = 108\sqrt{3}$ cm²; c) În $\triangle ABC$, $OC \cap AB = \{E\} \Rightarrow CE \perp AB$; $\sphericalangle CEB = 90^\circ$; $CE^2 = BC^2 - BE^2 = 12^2 - 6^2 = 36 \Rightarrow CE = 6$ cm. Dar O este și centru de greutate în $\triangle ABC \Rightarrow OA = \frac{2}{3} \cdot CE \Rightarrow \Rightarrow OA = 4$ cm; d) $\mathcal{A}_{\text{cerc}} = \pi R^2 = 144\pi$ cm². 3. a) $\widehat{BD} = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOD = \widehat{BD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BOD$ – echilateral $\Rightarrow OB = OD = BD = 18$ cm $\Rightarrow R = 18$ cm; $\mathcal{A}_{\text{cerc}} = \pi R^2 = 324\pi$ cm²; b) Cum AB și CD sunt diametre $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ \Rightarrow ACBD$ – dreptunghi; $BD = 18$ cm, iar $BC^2 = DC^2 - BD^2 = 36^2 - 18^2 \Rightarrow BC = 18\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{ACBD} = BD \cdot BC = 324\sqrt{3}$ cm²; c) $\mathcal{L}_{BC} = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ ($n = 120^\circ$) $\Rightarrow \mathcal{L}_{BC} = 12\pi$ cm. 4. a) $\sphericalangle BAC = 90^\circ \Rightarrow BC$ – diametru $\Rightarrow \sphericalangle BEC = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; b) $R = \frac{BC}{2}$; $\widehat{AB} = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle ACB = 30^\circ$. Dacă $AB = l \Rightarrow BC = 2l \Rightarrow AC = l\sqrt{3} \Rightarrow l\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \Rightarrow l = 8 \Rightarrow AB = 8$ cm și $BC = 16$ cm $\Rightarrow R = 8$ cm; $\mathcal{A}_{\text{cerc}} = 64\pi$ cm²; c) $\sphericalangle BAD = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{CE} = 120^\circ$. Deci $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle EBC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$; $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ECB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$; d) $\mathcal{A}_{BEC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = 64\sqrt{3}$ cm².

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA FINALĂ

TESTUL 1. I. 1. d). 2. c). 3. b). 4. c). 5. a). 6. b). **II. 1.** d). 2. c). 3. b). 4. d). 5. b). 6. d). **III. 1.** $x \in \{-3; 3\}$. 2. $6\sqrt{6}$. 3. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$. 4. a) $\triangle AOM \equiv \triangle CON$ (LUL) $\Rightarrow OM \equiv ON$; b) Din a) $\Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle CON$ și A, O, C – coliniare $\Rightarrow M, O, N$ – coliniare. 5. a) În $\triangle ABC$: ED – linie mijlocie $\Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow ED \parallel BF$ și $ED = BF = \frac{BC}{2} \Rightarrow BFDE$ – paralelogram $\Rightarrow OB \equiv OD$; b) Din a) rezultă că $OE \equiv OF$. 6. a) $\triangle QAM \equiv \triangle NCP$ (CC) $\Rightarrow QM \equiv CP$ (1); $\triangle MBN \equiv \triangle PDQ$ (CC) $\Rightarrow MN \equiv PQ$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MNPQ$ – paralelogram; cum $PM \cap NQ = \{O\} \Rightarrow OM \equiv OP$; b) Din a), rezultă că $ON \equiv OQ$.

TESTUL 2. I. 1. d). 2. b). 3. a). 4. a). 5. b). 6. c). **II. 1.** d). 2. d). 3. b). 4. d). 5. c). 6. c). **III. 1.** $x = 60^{2n} \cdot 13^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 60^n \cdot 13 \in \mathbb{N}$, număr par. 2. a) $a = \sqrt{5} + 1$; $b = \sqrt{5} - 1$; b) $m_s = 2$. 3. $a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. 4. a) $\triangle ADF \equiv \triangle CMD$ (LUL) $\Rightarrow DF \equiv DM$; b) $\sphericalangle EBN = 360^\circ - (180^\circ + \sphericalangle ABC) = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$; $\triangle EBN \equiv \triangle BAD$ (LUL) $\Rightarrow BD \equiv EN$. 5. a) $\sphericalangle ADC = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60^\circ$; cum $\sphericalangle ACB = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle DAC = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC \Rightarrow AC$ – bisectoarea $\sphericalangle BAD$; b) $\triangle ADC$ – isoscel ($\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DCA = 30^\circ$) $\Rightarrow DC = AD = 8$ cm $\Rightarrow BC = 8$ cm și $AB = 16$ cm. Deci $\mathcal{P}_{ABCD} = 40$ cm. 6. a) $\sphericalangle B = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle C = 30^\circ$; $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle CBM = 30^\circ \Rightarrow \triangle MBC$ – isoscel ($MB \equiv MC$) cum $MN \perp BC \Rightarrow BN = CN$. Cum $NP \parallel AB \Rightarrow NP \perp AC$, iar $NQ \parallel AC \Rightarrow NQ \perp AB$. Deci: $\sphericalangle QAP = \sphericalangle APN = \sphericalangle AQN = 90^\circ \Rightarrow AQNP$ – dreptunghi; b) Deoarece $BN = CN$ (demonstrat) $\Rightarrow AN$ – mediană, deci $AN = \frac{BC}{2}$. Cum $AQNP$ – dreptunghi $\Rightarrow QP = AN$ (diagonale) $\Rightarrow QP = AN = \frac{BC}{2}$.

Cuprins

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚIALĂ	5
Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale	5
Algebră	5
Geometrie	11
ALGEBRĂ	
Capitolul I: MULȚIMEA NUMERELOR REALE	14
Rădăcina pătrată	15
1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect	15
<i>Test de autoevaluare</i>	19
2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ	21
<i>Test de autoevaluare</i>	27
Mulțimea numerelor reale	29
1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări	29
Recapitulare și sistematizare prin teste	34
2. Reguli de calcul cu radicali	35
2.1. Produsul radicalilor	35
2.2. Câtul radicalilor	35
2.3. Scoaterea factorilor de sub radical	36
2.4. Introducerea factorilor sub radical	37
3. Operații cu numere reale	39
<i>Test de autoevaluare</i>	47
4. Raționalizarea numitorului unei fracții	49
Exerciții recapitulative. Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor	56
5. Formule de calcul prescurtat	59
6. Media geometrică a două numere reale nenegative	60
Exerciții recapitulative. Media aritmetică și media geometrică ale numerelor reale	63
7. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	64
Recapitulare și sistematizare prin teste	65
<i>Test de autoevaluare</i>	69
8. Ecuații de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$	71
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	74
Recapitulare și sistematizare prin teste	75
PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR	79
GEOMETRIE	
Capitolul I: PATRULATERE	81
1. Patrulater convexe	82
2. Paralelogramul	84
Recapitulare și sistematizare prin teste	87
<i>Test de autoevaluare</i>	89
3. Linia mijlocie în triunghi	91
Recapitulare și sistematizare prin teste	94
4. Dreptunghiul	95
<i>Test de autoevaluare</i>	99

5. Rombul	101
Test de autoevaluare	103
6. Pătratul	105
Recapitulare și sistematizare prin teste	107
Test de autoevaluare	109
7. Centrul de simetrie și axe de simetrie pentru poligoanele studiate	111
8. Trapezul	113
9. Linia mijlocie în trapez	115
Test de autoevaluare	117
10. Aria triunghiului și aria patrulaterului	119
11. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	128
Recapitulare și sistematizare prin teste	129
Test de autoevaluare	131
Capitolul II: CERCUL	133
1. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc	135
2. Triunghi și patrulater înscrise într-un cerc	139
3. Poligoane regulate înscrise într-un cerc	142
4. Lungimea cercului și aria discului	143
Recapitulare și sistematizare prin teste	147
Test de autoevaluare	149
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA FINALĂ	151
TESTE RECAPITULATIVE	157
PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR	159
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	161