

6

MATE[®]
2000⁺

consolidare

Maria Zaharia
Dan Zaharia

partea I

matematică

algebră • geometrie

Editura Paralela 45

Nume:

Prenume:

Clasă:

Școală:

--	--	--

--	--	--

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 7326/29.10.2024.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca

Tehnoredactare: Adriana Vlădescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

ZAHARIA, MARIA

Matematică : algebră, geometrie : clasa a VI-a /

Maria Zaharia, Dan Zaharia. – Pitești : Paralela 45, 2026 – 2 vol.

ISBN 978-973-47-4461-9

Partea 1. – Pitești : Paralela 45, 2026. –

ISBN 978-973-47-4462-6

I. Zaharia, Dan

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2026

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebită plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul **aplicației MATE 2000+** este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!

Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

- * Inițiere (înțelegere)
- ** Consolidare (aplicare și exersare)
- *** Excelență (aprofundare și performanță)
- **** Supermate

Legendă

- PE** = portofoliul elevului
- PP** = portofoliul profesorului
- PE-PP** = portofoliul elevului - portofoliul profesorului

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚIALĂ

PP Competențe generale și specifice (conform programei clasei a V-a)

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

PE 1. EXERCII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Calculați:

- a) $(3^{102} : 3^{72} + 2^2 \cdot 2^{25} - 2025^0) : (27^{10} + 8^9 - 18^2 : 324);$
- b) $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^3 \cdot 2^{42} - 2^{46} + [3^{150} : 3^{45} - (3^7)^{15}] + 16\};$
- c) $1^{2025} - 2025^0 + 3^2 - 2^3 + 2026^1 - 2025^1 + 0^{2030};$
- d) $[(2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) : (2^0 + 2^2 + 2^4 + 3^2)] \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3).$

2. Verificați dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte, știind că n este număr natural:

- a) $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n;$
- b) $y = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1;$
- c) $z = 100 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99);$
- d) $t = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024).$

3. Calculați ultima cifră a numărului:

- a) $x = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 5^{2026};$
- b) $y = 2^{2027} + 3^{2028} + 5^{2029} + 6^{2030};$
- c) $z = 2025^{2033} + 2026^{2033} + 2027^{2033} + 2028^{2033};$
- d) $t = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2030}.$

4. a) Transformați fracțiile ordinare $\frac{17}{4}, \frac{11}{3}, \frac{43}{15}$ și $\frac{71}{330}$ în fracții zecimale.

b) Transformați fracțiile zecimale 1,9(3), 3,08(3), 5,28 și 0,1(23) în fracții ordinare ireductibile.

5. a) Aflați numerele care împărțite la 5 dau câtul cu o unitate mai mare decât restul.

b) Calculați câtul și restul împărțirii numărului de forma $\overline{abab}$ la $\overline{ab}$.

c) Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 12 să dea restul 4 și împărțite la 18 să dea restul 8.

d) Calculați restul împărțirii numărului $70a + 37$ la 7, la 10 și la 14.

6. a) Efectuați calculele:

- a) $1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} : 2;$
- b) $5,4 - 1\frac{8}{25} \cdot 3, (3);$
- c) $(0,5)^2 + 0,(6) - 0,1(6);$
- d) $1,41 \cdot 10^2 : 0,3;$
- e) $1,1^2 + 0,9^2 : 0,3^3;$
- f) $1,21 \cdot (2,3 - 1,2) : 1,1^3.$

7. a) Transformați din baza 10 în baza 2 numerele: 29, 31, 47 și 135.

b) Transformați din baza 2 în baza 10 numerele: $1101_{(2)}, 10111_{(2)}, 1011101_{(2)}$ și $11100101_{(2)}.$

8. Determinați cifrele x și y , știind că $\overline{2,xy} + \overline{7,yx} = 9,99.$

- Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

TESTUL 1

I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(2 puncte)

- (0,5p) 1. Numărul cu $(2^2)^3$ mai mic decât 179 este
- (0,5p) 2. Suma numerelor naturale care împărțite la 3 dau câtul 6 este egală cu
- (0,5p) 3. Camelia a cumpărat 3 stilouri și 5 creioane, pentru care a plătit 70 de lei. Ionuț a cumpărat 5 stilouri și 3 creioane de același fel, pentru care a plătit 106 lei. Un stilou a costat
- (0,5p) 4. Lățimea unui dreptunghi reprezintă 75% din lungimea dreptunghiului. Dacă lungimea dreptunghiului este de 20 m, atunci perimetrul dreptunghiului este de

II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(2 puncte)

- (0,5p) 1. Rezultatul calculului $2^3 - 5^0 + 187 : 17$ este egal cu:
 A. 14; B. 18; C. 19; D. 20.
- (0,5p) 2. Media aritmetică a numerelor 3,75 și 4,25 este egală cu:
 A. 3,90; B. 4; C. 4,05; D. 4,10.
- (0,5p) 3. Frația $\frac{32}{2^n}$ este echiunitară pentru n egal cu:
 A. 16; B. 8; C. 5; D. 7.
- (0,5p) 4. Dintre fracțiile zecimale 2,2(3), 2,(23), 2,22 și 2,23 cea mai mare este fracția:
 A. 2,(23); B. 2,23; C. 2,2(3); D. 2,22.

III. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

(2 puncte)

Desenați șase puncte distincte două câte două.

A

B

- (0,5p) 1. Cel mai mare număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... a) 6;
- (0,5p) 2. Cel mai mic număr de drepte care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... b) 10;
- (0,5p) 3. Dacă exact cinci dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se obțin unind punctele date două câte două este egal cu ... c) 8;
- (0,5p) 4. Dacă exact patru dintre puncte sunt coliniare, atunci numărul dreptelor care se pot obține unind punctele date două câte două este egal cu ... d) 1;
- e) 15.

IV. Scrieți rezolvările complete.

(3 puncte)

- (1p) 1. Împărțind numărul natural nenul a la numărul natural nenul b , se obțin câtul 2 și restul 7. Arătați că numărul $4a - 8b - 1$ este cubul unui număr natural.
- (1p) 2. Calculați $2,3 + \{5 + 0,1 \cdot [100 \cdot 0,01 + 5,2 \cdot (17 - 1,2 : 0,1)]\}$.
- (1p) 3. Scrieți toate numerele de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 5, știind că $x = y + 1$.

ALGEBRĂ

Capitolul

MULȚIMI

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

PP Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$

- Recunoașterea unor mulțimi finite sau infinite (mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale pare/impare, mulțimea cifrelor unui număr, mulțimea divizorilor/multiplilor unui număr natural)
- Definirea unor mulțimi folosind diagrame și/sau enumerare de elemente
- Recunoașterea unor numere prime
- Identificarea, dintr-o mulțime de numere, a unui număr compus
- Identificarea unui divizor al unui număr dat
- Scrierea unui număr natural de două cifre ca produs de puteri de numere prime, prin observare directă
- Scrierea mulțimii divizorilor unui număr natural folosind descompunerea în produs de numere prime
- Recunoașterea unor perechi de numere prime între ele

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n , 3 și 9 în $\mathbb{N}$

- Recunoașterea și exemplificarea de elemente care aparțin/nu aparțin unei mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor
- Recunoașterea și exemplificarea de mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor; mulțimi care sunt sau nu în relație de incluziune
- Identificarea unor numere naturale care se divid cu 2, 5, 10^n , 3 sau 9, utilizând criteriile de divizibilitate
- Scrierea unui număr natural ca produs de puteri de numere prime folosind descompunerea în factori primi
- Selectarea dintr-o enumerare dată a numerelor naturale prime/compuse

UNITATEA: MULȚIMI

PE-PP

1. MULȚIMI: DESCRIERE, NOTAȚII, REPREZENTĂRI. RELAȚIA DINTRE UN ELEMENT ȘI O MULȚIME. MULȚIMI NUMERICE ȘI MULȚIMI NENUMERICE



• **Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite elementele mulțimii. Mulțimile se notează, de regulă, cu litere mari: $A, B, C, \dots$, iar elementele mulțimilor se notează cu litere mici, cu numere, cu anumite simboluri.

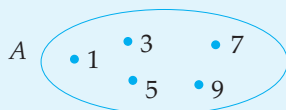
• Mulțimile pot fi definite în trei moduri:

1. Enumerând toate elementele mulțimii între acolade

EXEMPLU: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

2. Enumerând toate elementele mulțimii în interiorul unei linii curbe închise, numită diagramă Venn-Euler

EXEMPLU:



3. Enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii (proprietate pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu se află în mulțime)

EXEMPLU: $A = \{x \mid x \text{ este o cifră impară}\}$.

Citim: mulțimea A este mulțimea tuturor elementelor x , cu proprietatea că x este cifră impară.

• Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi x aparține mulțimii A . Dacă x nu este element al mulțimii A , atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi x nu aparține mulțimii A .

EXEMPLU: Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, atunci $1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A$ și $0 \notin A, 2 \notin A, 6 \notin A, 11 \notin A$.

OBSERVAȚIE: Într-o mulțime fiecare element este scris o singură dată.

EXEMPLU: Mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *matematica* este: $M = \{m, a, t, e, i, c\}$.

• Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu simbolul $\emptyset$.

EXEMPLU: Mulțimea consoanelor din cuvântul *eu*.

• Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită **mulțimea numerelor naturale** și se notează cu $\mathbb{N}$. Scriem: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}$.

• Mulțimea numerelor naturale diferite de zero se numește **mulțimea numerelor naturale nenule** și se notează cu $\mathbb{N}^*$. Scriem: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}$.

• Dacă toate elementele unei mulțimi sunt numere, atunci mulțimea se numește **mulțime numerică**.

EXEMPLU: $C = \{2, 7, 11\}$. Mulțimea C are ca elemente doar numere, $2 \in C, 7 \in C, 11 \in C$, și astfel mulțimea C este o mulțime numerică.

• Dacă o mulțime conține cel puțin un element care nu este număr, atunci mulțimea se numește **mulțime nenumerică**.

EXEMPLU: $D = \{m, a, t, e\}$. Mulțimea D conține literele din care este alcătuit cuvântul *mate*. Mulțimea D este o mulțime nenumerică.

- O mulțime care are n elemente, unde n este un număr natural, se numește **mulțime finită**. Numărul de elemente ale unei mulțimi M se numește **cardinalul mulțimii M** și se notează **card M** .

EXAMPLE:

- Mulțimea vidă ($\emptyset$) este o mulțime finită și notăm $\text{card } \emptyset = 0$.
- Mulțimea $E = \{0, 4, 7, 15\}$ este o mulțime finită și notăm $\text{card } E = 4$.

- O mulțime care nu are un număr finit de elemente se numește **mulțime infinită**.

EXAMPLE:

- Mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor naturale nenule sunt mulțimi infinite.
- Dreapta, semidreapta, segmentul, considerate ca mulțimi de puncte, sunt mulțimi infinite.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

- Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:
 - bibliotecă*;
 - cinematecă*;
 - actualități*.
- Scrieți mulțimea cifrelor din care este format numărul:
 - 43257;
 - 524123;
 - 17230415;
 - 425730.
- Scrieți mulțimea numerelor naturale:
 - mai mici sau egale cu 4;
 - cuprinse între 6 și 14.
- Scrieți mulțimea cifrelor:
 - pare;
 - impare.
- Fie mulțimile: $A = \{1, 3, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - $2 \in A$;
 - $3 \notin A$;
 - $2 \notin B$;
 - $1^{2005} \in A$;
 - $4 \in A$ și $4 \in B$;
 - $1 \in A$ sau $7 \in B$.
- Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;	$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;	$D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.
- Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - $3 \in \{0, 1, 3\}$;
 - $2 \notin \{1, 4, 5\}$;
 - $4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$;
 - $0 \in \emptyset$;
 - $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3^{14}\}$;
 - $10 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}$.
- Indicați propozițiile false:
 - $2 \in \{1, 7, 3\}$;
 - $7^0 \in \{1, 3, 9\}$;
 - $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
 - $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$;
 - $0 \in \emptyset$;
 - $0 \notin \emptyset$.
- Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele acestora:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$;	$B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$;
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$;	$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

10. Fie $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și precizați cardinalul mulțimii B .

11. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}$;

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\}$;

c) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}$;

d) $\{2^2, 2^1 + 3^0, 5^0, 2^1\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

12. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x \leq 32\}$;

$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x^3 \leq 64\}$.

13. Aflați cardinalul mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2025\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1957\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 10\}$;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$;

$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 14\}$;

$F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 2026\}$.

14. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12 \text{ și } x^2 \geq 9\}$;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

15. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 < 7\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ și } x \leq 3^3 - 2\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}$;

$D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\}$;

$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect și } x \text{ are ultima cifră } 3\}$; $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2^{x+1} = 32\}$.

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

16. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$.

17. Scrieți elementele mulțimilor de mai jos. Ce observați?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}$.

18. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{1ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}$;

$D = \{x \mid x = \overline{ab} \text{ și } \overline{ab} + \overline{ba} = 88\}$.

PE-PP SUPERMATE ◆ ◆ ◆ ◆

19. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan proprietățile:

a) $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă mulțimea formată din toate elementele mulțimilor A și B ;

b) fiecare mulțime are câte două elemente;

c) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

20. Se dă mulțimea A formată din numere naturale, cu proprietățile:

a) $9 \in A$;

b) dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$;

c) dacă $7x + 4 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătați că $6 \in A$.

UNITATEA: DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

PE-PP

1. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE. DESCOMPUNEREA NUMERELOR NATURALE ÎN PRODUS DE PUTERI DE NUMERE PRIME



Fie a și b două numere naturale. Spunem că a este **divizibil cu b** dacă există un număr natural c , astfel încât $a = b \cdot c$.

Notăm $a : b$ și citim a este **divizibil cu b** sau notăm $b | a$ și citim b **divide pe a** .

În ambele situații, a este un **multiplu al lui b** , respectiv b este un **divizor al lui a** .

Dacă a **nu este divizibil cu b** , scriem $a \nmid b$ și dacă b **nu divide pe a** , scriem $b \nmid a$.

EXAMPLE:

- Pentru numerele naturale 12 și 3 avem că **12 este divizibil cu 3** și scriem $12 : 3$, deoarece există numărul natural 4, astfel încât $12 = 3 \cdot 4$. Mai putem scrie $3 | 12$ și citim **3 divide 12**. Spunem că **12 este multiplu al lui 3**, respectiv **3 este un divizor al lui 12**.

- Pentru numerele naturale 12 și 7 nu există un număr natural n , astfel încât $12 = 7 \cdot n$, motiv pentru care **12 nu este divizibil cu 7** și scriem $12 \nmid 7$, respectiv **7 nu divide pe 12** și scriem $7 \nmid 12$. Deci **12 nu este un multiplu al lui 7** și **7 nu este un divizor al lui 12**.

OBSERVAȚII:

- Orice număr natural este divizibil cu el însuși ($a : a$, oricare ar fi numărul natural a ; în particular $0 : 0$).
- Numărul 0 este multiplul oricărui număr natural ($0 : a$, oricare ar fi numărul natural a).
- Numărul 0 **nu** este divizorul niciunui număr natural nenul.
- Orice număr natural este divizibil cu 1 ($a : 1$).

REȚINEM!

- Pentru a și b două numere naturale, cu $b \neq 0$, **b divide pe a** ($b | a$) sau **a este divizibil cu b** ($a : b$) dacă împărțind pe a la b , obținem restul 0.
- Dacă împărțind pe a la b , restul este diferit de 0, atunci b nu divide pe a ($b \nmid a$), respectiv a nu este divizibil cu b ($a \nmid b$).

DIVIZORI PROPRII, DIVIZORI IMPROPRII

Orice număr natural, cu excepția lui 1, are cel puțin doi divizori: pe 1 și pe el însuși, numiți **divizori improprii**. Ceilalți divizori ai numărului, dacă există, se numesc **divizori proprii**.

EXEMPLU: Mulțimea divizorilor numărului 12, notată D_{12} , scrisă prin enumerarea elementelor, este $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ și, scrisă cu ajutorul unei proprietăți caracteristice, este $D_{12} = \{d \in \mathbb{N} \mid 12 : d\}$.

Divizorii improprii ai lui 12 sunt 1 și 12, iar **divizorii proprii** sunt 2, 3, 4, 6.

Un număr natural care are exact doi divizori se numește **număr prim**.

EXAMPLE: Numerele naturale 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sunt numere prime.

Un număr natural care are cel puțin trei divizori se numește **număr compus**.

EXAMPLE: Numerele naturale 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 sunt numere compuse.

REȚINEM!

- Numerele naturale 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse.
- Singurul număr prim și par este 2. Orice număr natural par de forma $2p$, cu $p > 1$, are cel puțin trei divizori: 1, p , $2p$, deci este număr compus.
- Dacă numărul natural n , $n \geq 2$, este **număr prim**, atunci acesta are doar **divizori improprii**, pe 1 și pe n .
- Dacă numărul natural n , $n \geq 2$, are numai **divizori improprii**, atunci n este număr prim.
- Dacă un număr natural se divide la două numere prime, atunci acesta se divide și la produsul acestora.
- Dacă un număr natural se divide la produsul a două numere, atunci acesta se divide cu fiecare dintre cele două numere.
- Orice număr natural pătrat perfect, diferit de 0 și 1, are cel puțin trei divizori. Dacă $n = p^2$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$), atunci $\{1, p, p^2\} \subset D_n$, unde D_n este mulțimea divizorilor numărului natural n .
- Dacă a este număr natural pătrat perfect și p este număr prim, astfel încât p este divizor al lui a ($p \mid a$), atunci p^2 este divizor al lui a ($p^2 \mid a$).
- Dacă a este număr natural și p este număr prim, astfel încât $p \mid a^2$, atunci $p \mid a$.
- Dacă a este număr natural și p este număr prim, astfel încât p este divizor al lui a și p^2 nu este divizor al lui a , atunci a nu este pătrat perfect.
- Orice număr natural $n \geq 2$ se poate scrie ca **putere a unui număr prim** sau ca **produs de puteri cu bazele numere prime diferite**. Această scriere se numește **descompunerea în factori primi a numărului natural n** și această descompunere este unică, făcând abstracție de ordinea factorilor.

Pentru descompunerea în factori primi a unui număr natural folosim **algoritmul de descompunere în factori primi**, parcurgând următoarele etape:

- identificăm un divizor prim al numărului dat și calculăm câtul dintre număr și divizorul identificat;
- identificăm un divizor prim al câtului obținut în etapa anterioară și calculăm câtul împărțirii acestuia la noul divizor identificat;
- continuăm procedeul până când se obține câtul 1, apoi scriem numărul ca produs de puteri de factori primi.

EXEMPLE: Descompuneți în factori primi numerele: 210, 462, 858, 4845.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 858 & 2 \\ 429 & 3 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4845 & 5 \\ 969 & 3 \\ 323 & 17 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; \quad 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11; \quad 858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13; \quad 4845 = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19.$$

OBSERVAȚIE: Pentru a ușura descompunerea în factori primi a unui număr natural care se divide la o putere a lui 10, se recomandă folosirea proprietății $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

EXEMPLE:

280 2 · 5	24200 2 ² · 5 ²	36000 2 ³ · 5 ³	1050000 2 ⁴ · 5 ⁴
28 2	242 2	36 2	105 5
14 2	121 11	18 2	21 3
7 7	11 11	9 3	7 7
1	1	3 3	1
		1	

$$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7; \quad 24200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2; \quad 36000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3; \quad 1050000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 7.$$

Problemă rezolvată

Fie numărul natural n cu descompunerea în factori primi: $n = a^x \cdot b^y$. Calculați numărul divizorilor lui n .

Rezolvare:

Scriem divizorii numărului $a^x \cdot b^y$ și avem:

$1, a, a^2, a^3, \dots, a^x$, deci $x + 1$ divizori $b, ab, a^2b, a^3b, \dots, a^xb$, deci $x + 1$ divizori $b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2, \dots, a^xb^2$, deci $x + 1$ divizori $b^y, ab^y, a^2b^y, a^3b^y, \dots, a^xb^y$, deci $x + 1$ divizori	}	de $y + 1$ ori.
---	---	-----------------

Deci numărul divizorilor naturali ai numărului n cu descompunerea în factori primi $a^x \cdot b^y$ este $(x + 1) \cdot (y + 1)$.

REȚINEM!

Numărul divizorilor naturali ai numărului n cu descompunerea în factori primi:

$$n = a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot a_3^{x_3} \cdot \dots \cdot a_n^{x_n} \text{ este } (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) \cdot (x_3 + 1) \cdot \dots \cdot (x_n + 1).$$

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE**PE ÎNȚELEGERE**

- a) Scrieți trei numere prime și trei numere compuse.

b) Scrieți mulțimea divizorilor numărului 42.

c) Scrieți mulțimea multiplilor numărului 11 mai mici decât 100.
- Se consideră mulțimea de numere $M = \{101, 102, \dots, 120\}$. Aflați:

a) $A = \{x \mid x \in M \text{ și } x \text{ este număr prim}\};$ b) $B = \{x \mid x \in M \text{ și } x \text{ este număr compus}\}.$
- Arătați că:

a) numărul 109 este prim; b) numărul 113 este prim; c) numărul 961 este compus.
- Scrieți mulțimea divizorilor primi ai fiecăruia dintre următoarele numere naturale: 48, 72, 202.
- Stabiliți dacă numerele următoare sunt prime: 37, 93, 123, 377, 602, 769, 1243, 1999.
- Completați cu numere compuse spațiile punctate:

a) $27 = \dots + \dots;$ b) $19 = \dots + \dots;$ c) $36 = \dots + \dots.$
- Completați cu numere prime spațiile punctate:

a) $30 = \dots + \dots;$ b) $100 = \dots + \dots;$ c) $138 = \dots + \dots;$

d) $35 = \dots - \dots;$ e) $84 = \dots - \dots;$ f) $96 = \dots - \dots.$

Capitolul

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

PP

Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

1. **Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
 - 1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
 - Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de rapoarte, procente
 - Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de proporții și mărimi direct sau invers proporționale, din practică/cotidian sau în context intradisciplinar sau interdisciplinar (de exemplu: scara unei hărți, concentrația unei soluții)
 - Identificarea unor mărimi direct proporționale în reprezentări grafice
2. **Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
 - 2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
 - Determinarea unui procent dintr-un număr dat; determinarea unui număr, când se cunoaște un procent din el (de exemplu: reducerea/creșterea prețului unui produs, concentrația unei soluții)
 - Calcularea unei valori necunoscute dintr-o proporție
 - Calcularea unor numere folosind un șir de rapoarte egale
 - Calcularea valorii unui raport folosind un șir de rapoarte egale
 - Organizarea și reprezentarea de date sub formă de grafice, tabele sau diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora
3. **Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
 - 3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
 - Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție
 - Rezolvarea de probleme în care intervin rapoarte, procente sau proporții
 - Stabilirea proporționalității (directe sau inverse) între două mărimi și rezolvarea de probleme în care intervin mărimi direct sau invers proporționale, în contexte practic-aplicative sau interdisciplinare
 - Utilizarea unor reguli specifice pentru obținerea de proporții derivate (numai pe exemple numerice)
 - Calcularea probabilității în contexte practic aplicative simple
4. **Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
 - 4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
 - Exprimarea relației de proporționalitate directă sau inversă între mărimi sub forma unei proporții sau a unei egalități de produse

UNITATEA: RAPOARTE ȘI PROPORȚII

PE-PP 1. RAPOARTE



1.1. RAPORT NUMERIC

Raportul a două numere a și b , cu $b \neq 0$, este câtul $a : b$ și se notează $\frac{a}{b}$. Numerele a și b se numesc **termenii raportului**. Numărul c , obținut din relația $a : b = c$, este **valoarea raportului** $\frac{a}{b}$.

EXEMPLU: Raportul numerelor 5 și 2 este $\frac{5}{2}$. Valoarea acestui raport este 2,5, deoarece $5 : 2 = 2,5$ și notăm $\frac{5}{2} = 2,5$.

1.2. TITLUL UNUI ALIAJ

Numim **titlul unui aliaj** raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului. Dacă notăm masa metalului prețios cu m , masa aliajului cu M și titlul aliajului cu T , atunci:

$$T = \frac{m}{M}.$$

EXEMPLU: Un aliaj conține 812 g aur și 1188 g cupru. Calculați titlul aliajului.

Rezolvare:

Aliajul conține aur și cupru și masa acestuia este $M = 812 \text{ g} + 1188 \text{ g} = 2000 \text{ g}$. Masa metalului prețios, adică masa aurului este $m = 812 \text{ g}$, iar titlul acestui aliaj este $T = \frac{m}{M} = \frac{812}{2000} = 0,406$. Deci titlul aliajului este 0,406.

1.3. CONCENTRAȚIA UNEI SOLUȚII

Numim **concentrația unei soluții** raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției. Dacă notăm cu C concentrația soluției, atunci:

$$C = \frac{\text{masa substanței care se dizolvă}}{\text{masa soluției}}.$$

EXEMPLU: Într-un vas se află 110,4 g de apă în care se dizolvă 9,6 g de sare. Calculați concentrația soluției obținute în vas.

Rezolvare:

Masa soluției este $110,4 \text{ g} + 9,6 \text{ g} = 120 \text{ g}$ și obținem concentrația ca fiind $C = \frac{9,6}{120} = \frac{96}{1200} = 0,08$. Deci concentrația acestei soluții este egală cu 0,08.

1.4. SCARA UNUI DESEN

Fie A și B două localități reprezentate într-un desen, pe o hartă. Raportul dintre distanța măsurată pe desen între cele două localități și distanța măsurată pe teren între cele două localități este numită **scara desenului** respectiv. Dacă notăm cu S scara desenului, atunci:

$$S = \frac{\text{distanța din desen}}{\text{distanța din teren}}.$$

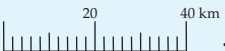
EXEMPLU: Distanța dintre două obiective turistice este de 40 km. Pe o hartă, distanța dintre aceste obiective este de 2 cm. Calculați scara acestei hărți.

Rezolvare:

Scara hărții este raportul dintre distanța de pe hartă și distanța reală dintre cele două obiective turistice, măsurată cu aceeași unitate de măsură.

$$\text{Obținem } S = \frac{2 \text{ cm}}{40 \text{ km}} = \frac{2 \text{ cm}}{4000000 \text{ cm}} = \frac{1}{2000000}.$$

Pe fiecare hartă este precizată scara hărții respective. Scara hărții poate fi reprezentată:

a) direct (2 cm = 4 km); b) numeric (1 : 2000000); c) grafic .

1.5. VITEZA MEDIE

Viteza medie a unui mobil este raportul dintre distanța parcursă de un mobil și durata în care este parcursă această distanță.

OBSERVAȚIE: Distanța notată cu d , timpul notat cu t și viteza notată cu v sunt **mărimi fizice**. Prin urmare, viteza medie este raportul a două mărimi fizice care nu sunt de același fel. Astfel:

$$v = \frac{d}{t}.$$

EXEMPLU: Un biciclist parcurge distanța de 54 km în 3 ore. Calculați viteza medie cu care se deplasează biciclistul.

Rezolvare:

Viteza medie cu care se deplasează biciclistul, exprimată în kilometri pe oră (km/h), este distanța exprimată în kilometri parcursă de biciclist într-o oră. Dacă în 3 ore biciclistul parcurge 54 km, atunci într-o oră va parcurge o distanță de 3 ori mai mică, $54 : 3 = 18$, adică viteza medie a biciclistului este

$$v = \frac{54 \text{ km}}{3 \text{ ore}} = 18 \text{ km/h}.$$

REȚINEM!

- **Raportul** a două mărimi fizice este raportul măsurilor acestor mărimi. **Termenii raportului** sunt măsurile celor două mărimi fizice.
- Există:
 - **rapoarte în care termenii sunt mărimi fizice de același fel**, măsurate cu aceeași unitate de măsură (exemple: titlul unui aliaj, concentrația unei soluții, scara unei hărți). Câtul măsurilor celor doi termeni ai raportului este un număr, numit **valoarea raportului**, care permite compararea celor două măsuri de mărimi fizice;
 - **rapoarte în care termenii sunt mărimi fizice distincte**. Un raport care are ca termeni mărimi fizice distincte conduce la definirea unei noi mărimi fizice (exemple: viteza, densitatea*);
 - **rapoarte numerice** în care termenii sunt două numere a și b , $b \neq 0$ (exemple: fracțiile ordinare și probabilitățile**). Raportul numeric de forma $\frac{p}{100}$ se numește **raport procentual**, se notează $p\%$ și se citește „ p la sută” sau „ p procente”.
- **Raportul a două mărimi fizice de același fel, măsurate cu aceeași unitate de măsură, este întotdeauna un raport numeric.**

* Viteza și densitatea se studiază în clasa a VI-a la fizică.

** Fracțiile ordinare și fracțiile zecimale au fost studiate în clasa a V-a. Probabilitățile fac obiectul unor cunoștințe ce urmează a fi studiate la matematică.

Problemă rezolvată

Calculați raportul dintre 12 minute și o oră.

Rezolvare:

Pentru a calcula raportul, trebuie să avem aceeași unitate de măsură. Cum o oră are 60 de minute, obținem că raportul între 12 minute și o oră este $\frac{12}{60}$. Raportul $\frac{12}{60}$ poate fi scris și sub una dintre formele: $\frac{6}{30}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{5}$, obținute din raportul inițial prin simplificare. Valoarea raportului $\frac{12}{60}$ este 0,2.

OBSERVAȚIE: Valoarea unui raport **nu se modifică** dacă fracția prin care este reprezentat raportul se amplifică sau se simplifică printr-un număr natural nenul.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

- Lungimea unui dreptunghi este de 8 m și lățimea de 2 m. Completați enunțurile cu răspunsul corect:
 - Raportul dintre lungimea și lățimea dreptunghiului este ...; acest raport arată că lungimea este de ... ori mai mare decât lățimea. Altfel spus, lățimea dreptunghiului este de ... ori mai mică decât lungimea.
 - Raportul dintre lățimea și lungimea dreptunghiului este Acest raport arată că lățimea este ... din lungime.
- O lădiță cu fructe cântărește 17 kg.
 - Cât va cântări o altă lădiță cu fructe, de trei ori mai grea decât prima?
 - Care este raportul dintre masa primei lădițe și masa celei de-a doua lădițe?
 - Care este raportul dintre masa celei de-a doua lădițe și masa primei lădițe?
- Calculați valorile rapoartelor de numere:

a) 120 și 30;	b) 12 și 144;	c) $2\frac{1}{2}$ și $1\frac{1}{4}$;
d) 0,(2) și 0,(3);	e) 2,1(3) și $\frac{4}{3}$;	f) 1,(3) și 1,1(6).
- Calculați valoarea raportului dintre:

a) 24 m și 12 km;	b) 17 dm și 1,7 hm;	c) 324 hg și 18 g;
d) $25\frac{1}{2}$ m ² și 102 ha;	e) 2,(3) dm ³ și 0,(3) m ³ ;	f) 1,2 dal și 360 dl.
- Ce cantitate de argint se află în 800 g de aliaj cu titlul de 0,375?
- Se face un aliaj topind la un loc 16 g aur cu 234 g cupru. Care este titlul aliajului?
- Se topesc la un loc 200 g de aliaj cu titlul de 0,480 cu 300 g de aur pur. Care va fi titlul noului aliaj obținut?
- Un aliaj de platină are titlul de 0,800 și conține 1968 g de platină pură. Aflați masa aliajului.
- Concentrația de sare dintr-o soluție este de 17/100. Ce cantitate de sare se găsește în 2,75 t de soluție?

10. Completați următorul tabel:

Scara	Correspondența între distanțe
1 : 1000000	la 1 cm pe desen corespund ... km în realitate
1 : 250000	la 1 cm pe desen corespund ... km în realitate
1 : 20	la 1 cm pe desen corespund ... km în realitate
5 : 1000000	la 1 cm pe desen corespund ... km în realitate

11. Distanța București – Baia Mare este de 594 km. Distanța pe o hartă este de 4,5 cm.

- Determinați scara hărții.
- Știind că distanța București – Bacău este de 304 km, cât măsoară pe hartă această distanță?
- Știind că pe hartă distanța București – Turnu-Severin este de 2,6 cm, calculați distanța reală.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ♦ ♦

12. Numărul a este de 3 ori mai mare decât numărul b și $\frac{1}{4}$ din numărul c . Aflați:

- raportul dintre a și b ;
- raportul dintre a și c ;
- raportul dintre 3 și $\frac{1}{4}$;
- raportul dintre c și b ;
- de câte ori este mai mare c decât b ;
- a câta parte din c este b .

13. Raportul dintre diametrul Lunii și diametrul Pământului este $\frac{3}{11}$. Raportul dintre diametrul Soarelui și diametrul Pământului este $\frac{108}{1}$. Aflați raportul dintre diametrul Lunii și cel al Soarelui.

14. Mihai se pregătește să meargă la un concurs de matematică și pentru aceasta rezolvă într-o lună $\frac{2}{3}$ din numărul de probleme, iar a doua lună restul. Calculați raportul dintre numărul problemelor rezolvate și numărul problemelor ce urmează a fi rezolvate, dacă Mihai avea de rezolvat:

- 60 de probleme;
- 102 probleme.

Ce observații puteți face?

15. Se consideră un punct M pe segmentul AB . Știind că $AB = 10$ cm și $AM = 2$ cm, calculați valoarea rapoartelor:

- $\frac{MB}{AM}$;
- $\frac{MB}{AB}$;
- $\frac{AM}{AB}$.

16. Se consideră două pătrate cu lungimile laturilor de 3 cm și, respectiv, 9 cm.

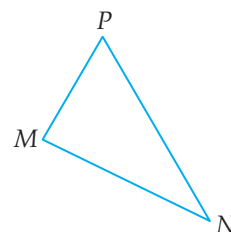
- Calculați raportul perimetrelor pătratelor.
- Calculați raportul ariilor pătratelor.

17. Raportul ariilor a două pătrate este $\frac{1}{4}$. Calculați raportul perimetrelor pătratelor respective.

18. Se consideră un triunghi MNP și pe laturile MP și PN se iau punctele A și B , astfel încât $MA = 3$ cm și $NB = 5$ cm. Dacă $MP = 9$ cm și $PN = 15$ cm, calculați:

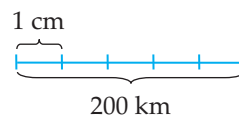
- $\frac{MA}{MP}, \frac{MA}{AP}, \frac{AP}{MP}$;
- $\frac{NB}{PN}, \frac{NB}{BP}, \frac{BP}{PN}$.

Ce observați?



19. Într-un vas se află 12 litri de soluție de apă cu sare având concentrația de 8%. Prin fierbere, după 5 ore s-au evaporat 4 litri de apă. Care este concentrația soluției rămase în vas?

20. Pe o hartă figurează gradația alăturată. Care este scara hărții?



21. a) Scara unui desen este 1 : 420. Care este distanța reală ce corespunde pe desen unei distanțe de 4,7 cm?

b) Scara unui desen este 1 : 500. Care este distanța pe desen ce reprezintă o distanță reală de 12 m?

c) Un desen realizat la scară reprezintă două obiecte O_1 și O_2 . Obiectul O_1 are lungimea reală de 6 m, iar pe desen are lungimea de 1,2 cm; obiectul O_2 are pe desen lungimea de 1,6 cm.

1) Care este scara desenului?

2) Care este lungimea reală a obiectului O_2 ?

22. Se topesc împreună un aliaj A din aur și aramă cu titlul 0,700 cu un aliaj B tot din aur și aramă cu titlul de 0,820. Aflați titlul noului aliaj în următoarele situații:

a) când din A se iau 4 g și din B se iau tot 4 g;

b) când din A se iau 3 g și din B se iau 6 g.

23. Se topesc la un loc 20 g aliaj cu titlul de 0,825, 15 g aliaj cu titlul de 0,620 și 12 g aliaj cu titlul de 0,900. Ce titlu va avea noul aliaj obținut?

PE APROFUNDARE ȘI PERFORMANȚĂ ◆ ◆ ◆

24. Dintr-un aliaj cu titlul de 0,850 se iau 12 g. Câte grame trebuie luate din alt aliaj cu titlul de 0,650 pentru a se obține prin topire un nou aliaj cu titlul de 0,710?

25. Un aliaj cu masa de 30 g și titlul de 0,870 se topește cu alte două aliaje de mase egale, unul cu titlul de 0,880 și altul cu titlul de 0,790. Se obține un nou aliaj cu titlul de 0,850. Care este masa aliajului obținut?

26. O soluție de sare (dizolvată în apă) cântărește 25 g. Concentrația soluției este de $\frac{9}{10}$. Câtă apă trebuie să adăugăm pentru a obține o soluție de concentrație $\frac{3}{20}$?

27. În două vase se află soluții (oțet + apă). Concentrația soluției din primul vas este $\frac{3}{5}$, iar a celei din al doilea este $\frac{4}{5}$. Se amestecă 10 l soluție din primul vas cu 4 l soluție din al doilea vas. Care este concentrația soluției obținute?

28. Știind că $\frac{3a}{5b} = 0,5$, calculați $\frac{2a+3b}{8a-4b}$.

29. Dacă $\frac{a}{b} = 0,1(6)$, aflați valoarea raportului $\frac{6a+b}{21a-b}$.

30. Dacă a, b, c sunt numere naturale și $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{a}$, arătați că $a \cdot b + c$ este pătrat perfect.

Concursul interjudețean „Grigore Moisil”, Oradea

31. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, astfel încât $\frac{a^3}{b} = \frac{c}{a}$.

32. Știind că $\frac{5a+3b}{3a-b} = 5^2$, calculați $\frac{a}{b}$.

33. Calculați valoarea raportului $\frac{c}{d}$, dacă $c = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ și $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}$.

34. Într-o urnă sunt bile albe, negre și roșii, în total 42 de bile. Bile negre sunt de 3 ori mai puține decât bile albe și cu 7 mai multe decât bile roșii.

a) Calculați raportul dintre numărul bilelor negre și numărul bilelor roșii și raportul dintre numărul bilelor roșii și numărul belezilor albe.

b) Calculați raportul dintre numărul bilelor care nu sunt roșii și numărul bilelor care nu sunt negre.

c) Calculați raportul dintre numărul bilelor care nu sunt albe și numărul bilelor din urnă.

35. Pe o hartă realizată la scara 1 : 500 000, distanța dintre două localități este de 42 cm.

a) Calculați distanța pe teren dintre cele două localități.

b) Calculați cu ce viteză se deplasează un automobil care parcurge această distanță în 3 ore.

c) Calculați viteza de deplasare în metri pe secundă.

36. Calculați valoarea raportului dintre:

a) un decigram și un kilogram;

b) o secundă și un minut;

c) un centimetru și un hectometru;

d) un decimetru pătrat și un hectar;

e) un metru cub și un hectometru cub.

37. Se consideră rapoartele $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ și $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$. Calculați valoarea rapoartelor: $\frac{a}{c}$, $\frac{4 \cdot a}{6 \cdot b}$, $\frac{9 \cdot b}{1,5 \cdot c}$.

38. Calculează valoarea raportului $\frac{x}{y}$ în următoarele cazuri:

a) $x = 90$ minute și $y = 4,5$ ore;

b) $x = 1,(3)$ dm³ și $y = 0,(3)$ m³;

c) $x = 15$ km / h și $y = 50$ m / s.

PE-PP

SUPERMATE ◆ ◆ ◆ ◆

39. Se consideră numerele: $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2013$ și $b = 2 + 4 + 6 + \dots + 4026$. Calculați:

a) raportul dintre a și b ;

b) raportul dintre suma și diferența numerelor b și a .

40. Se consideră egalitățile $\frac{a}{4} = \frac{b^2 + 4}{b + 1}$ și $\frac{a}{8} = \frac{c}{14}$, unde a , b și c sunt numere naturale.

a) Arătați că 4 divide pe a .

b) Găsiți toate tripletele (a, b, c) care verifică simultan relațiile din enunț.

prof. Cerasela Bociu

41. Știind că $\frac{a}{a+2} = \frac{b}{b+5} = \frac{c}{c+7}$ și $\frac{2}{a} + \frac{5}{b} + \frac{7}{c} = 81$, calculați $(a + b + c) : \frac{14}{27}$.

prof. Simona Pop, prof. Vasile Șerdean

42. Se dau numerele: $x = \frac{a + 8^{1004}}{a + (3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^6 \cdot \dots \cdot 3^{63}) : 9}$, $a \in \mathbb{N}$, și $y = \frac{10^{150}}{2 \cdot (3 + 3^2 + \dots + 3^{299})}$.

a) Arătați că $x < 1$.

b) Comparați numerele x și y .

prof. Violin Gorcea

43. Aflați numerele raționale pozitive a , b , c , știind că $\frac{a}{3} = \frac{b}{5}$, $\frac{b}{2} = \frac{c}{4}$ și $\frac{a \cdot b \cdot c}{a + b + c} = 0,(3)$.

prof. Dorin Linț, Maranda Linț, Deva



Nume _____

Clasa _____

TEST DE AUTOEVALUARE

- Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

I. Completați pe fișa de evaluare spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

- (0,5p) **1.** Calculând 15% din 1200 se obține
(0,5p) **2.** Numim scara unui desen raportul dintre
(0,5p) **3.** Numărul cu 10% mai mare decât 420 este egal cu
(0,5p) **4.** Dacă 7% dintr-un număr este 56, atunci numărul este

II. Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect, știind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

- (0,5p) **1.** Raportul a două numere este $\frac{1}{3}$. Cel mai mic dintre numere este 5. Suma celor două numere este egală cu:
A. 10; **B.** 8; **C.** 20; **D.** 15.
- (0,5p) **2.** Se consideră numerele $a = 2\frac{1}{2}$ și $b = 0,5$. Valoarea raportului numerelor a și b este egală cu:
A. 1; **B.** 5; **C.** 2,5; **D.** 2.
- (0,5p) **3.** Dacă $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, atunci $\frac{3x-y}{x+y}$ este egal cu:
A. $1\frac{2}{3}$; **B.** $1\frac{1}{2}$; **C.** 0,(6); **D.** 0,6.
- (0,5p) **4.** Dacă scara unei hărți este 1 : 500000, atunci unei distanțe de 50 km din teren îi corespunde pe hartă distanța de:
A. 10 cm; **B.** 10 mm; **C.** 5 cm; **D.** 5 mm.

III. Uniți prin săgeți fiecare enunț, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

- (0,5p) **a)** Dacă $\frac{3a}{5b} = \frac{2}{3}$, atunci $\frac{b}{a}$ este egal cu ... **1.** $\frac{4}{125}$;
(0,5p) **b)** Numărul 3,2%, scris sub forma unei fracții ireductibile, este ... **2.** 0,9;
(0,5p) **c)** Dacă $\frac{a}{2} = \frac{5}{4}$, atunci $100a$ este egal cu ... **3.** 1;
(0,5p) **d)** Dacă $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, atunci $2 - \frac{ay}{bx}$ este egal cu ... **4.** 1,(1);
5. 250.

La problemele IV și V scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

- (2p) **IV.** Se consideră proporția $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$. Scrieți proporții derivate:
a) amplificând primul raport cu 3; **b)** simplificând al doilea raport cu 2;
c) schimbând mezii între ei; **d)** schimbând extremii între ei.





Probabilitatea este un concept care estimează dacă un anumit eveniment se va produce sau nu.

Dacă evenimentul se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experimentului, atunci se numește **eveniment sigur**.

Dacă evenimentul nu se realizează la nicio efectuare a experimentului, atunci se numește **eveniment imposibil**.

Numim **probabilitatea realizării unui eveniment A** raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experienței.

$$P(A) = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}}$$

EXEMPLUL 1: Într-o cutie sunt 5 bile albe și 2 bile negre. Mihaela extrage o bilă la întâmplare din cutie. Care este șansa (**probabilitatea**) ca bila extrasă să fie albă? Care este **probabilitatea** ca bila extrasă să fie neagră?

$$P_a(A) = \frac{5}{7} \text{ și } P_n(A) = \frac{2}{7}.$$

EXEMPLUL 2: Se aruncă un zar. Care este **probabilitatea** (șansa) ca pe fața de sus a zarului să apară un număr de puncte divizibil cu 3?

Cum fețele zarului sunt numerotate de la 1 la 6 (sunt 6 **cazuri posibile**) și cum **favorabile** sunt 2 cazuri (aparitia feței cu 3 puncte și a feței cu 6 puncte) se constată că probabilitatea realizării evenimentului notat A este: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33$.

OBSERVAȚII:

- Cazurile favorabile realizării unui eveniment reprezintă o submulțime a tuturor cazurilor posibile și ca urmare, probabilitatea realizării unui eveniment este un raport subunitar, a cărui valoare este cuprinsă între 0 și 1. Se poate constata că **evenimentul imposibil** are probabilitatea 0 și **evenimentul sigur** are probabilitatea 1.
- Urmărind exemplul 1 se poate constata că cele două evenimente (probabilitatea ca bila extrasă să fie albă și probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră) nu pot avea loc simultan și, ca urmare, cele două evenimente sunt **disjuncte** și suma probabilităților acestora este 1, adică: $P_a(A) = \frac{5}{7}$ și $P_n(A) = \frac{2}{7} \Rightarrow P_a(A) + P_n(A) = \frac{5}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7} = 1$.
- Se poate constata că în cazul unui **eveniment sigur** toate cazurile posibile sunt și favorabile și în cazul unui **eveniment imposibil** niciun caz posibil nu este favorabil.

EXEMPLU: Într-o urnă sunt 2 bile verzi și 8 bile galbene. Calculați:

- probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să fie verde sau galbenă;
- probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să nu fie albă;
- probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să fie verde și galbenă;
- probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să fie albă.

Rezolvare:

a) În urnă sunt numai bile verzi și galbene și ca urmare bila extrasă este **sigur** verde sau galbenă. În acest caz, numărul cazurilor favorabile ($2 + 8$) coincide cu numărul cazurilor posibile (10) și

$$P = \frac{10}{10} = 1.$$

b) În urnă sunt numai bile verzi și galbene și ca urmare bila extrasă **sigur** nu este albă, iar probabilitatea este 1.

c) Analog, se constată că bila extrasă nu poate fi și verde și galbenă și, ca urmare, este **imposibil** ca bila să fie verde și galbenă. În acest caz, probabilitatea este 0, deoarece numărul cazurilor favorabile este 0.

d) Cum în urnă sunt doar bile verzi și galbene este **imposibil** să extragem o bilă albă. Numărul cazurilor favorabile este 0, numărul cazurilor posibile este 10 și ca urmare $P = \frac{0}{10} = 0$.

• Uneori probabilitatea se exprimă în procente.

EXEMPLU: Probabilitatea 0,25 este echivalentă cu 25% sau 1 din 4.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ♦

- Într-o cutie sunt 6 bile albe și 4 bile roșii.
 - Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă?
 - Dar una roșie?
 - Care este probabilitatea de a extrage o bilă care să fie roșie sau albă?
- Aruncăm un zar. Care este probabilitatea apariției feței cu șase puncte? Dar a unei fețe cu un număr par de puncte?
- În penarul Mihaelei sunt 3 creioane galbene și 2 albastre.
 - Care este probabilitatea ca, luând un creion la întâmplare, acesta să fie galben?
 - Dar albastru?
- Dintr-un lot de 40 de piese, 2 sunt defecte. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare o piesă ea să nu aibă defect?
- O urnă conține 20 de bile identice numerotate cu numere de la 1 la 20. Din urnă se extrage la întâmplare o bilă. Care șansă este mai mare: să extragem o bilă numerotată cu un pătrat perfect sau să extragem o bilă numerotată cu un număr prim?
- Într-un sac sunt 11 bile roșii, 7 bile negre, 12 bile albe și 10 bile galbene. Care este probabilitatea ca extrăgând o bilă la întâmplare ea să fie:
 - albă;
 - roșie;
 - neagră sau galbenă;
 - albă sau roșie sau galbenă?
- Într-un top de hârtie sunt 26 de coli de matematică, 15 coli de dictando și 30 de coli de hârtie albă. Care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o coală ea să fie de matematică?

GEOMETRIE

Capitolul

NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

PP

Competențe generale. Competențe specifice. Exemple de activități de învățare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date

- Identificarea unor drepte sau unghiuri într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare
- Identificarea unor cercuri și arce de cerc într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare
- Identificarea unor relații între elemente geometrice date (apartenență, incluziune, egalitate, concurență, paralelism, perpendicularitate, simetrie)

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte

- Prelucrarea cantitativă a unor informații privind distanțe, lungimi de segmente sau măsuri de unghiuri/arce în vederea stabilirii coliniarității unor puncte, inclusiv în contextul cercului (de exemplu: punctele diametral opuse, centrul cercului)
- Verificarea faptului că două unghiuri sunt suplementare, complementare sau congruente
- Aplicarea, într-o configurație dată, a proprietății unghiurilor opuse la vârf și a unghiurilor în jurul unui punct pentru determinarea unor măsuri de unghiuri

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice

- Utilizarea instrumentelor geometrice (raportor, riglă, compas) pentru realizarea unor figuri geometrice
- Construcția bisectoarei unui unghi folosind raportorul și rigla, respectiv compasul și rigla
- Construcția dreptelor paralele, a dreptelor perpendiculare, a mediatoarei unui segment folosind instrumentele geometrice
- Construcția simetricei unei figuri față de o dreaptă dată
- Determinarea unor lungimi de segmente utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice
- Determinarea unor măsuri de unghiuri/arce de cerc utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice

UNITATEA: UNGHIUL

PE-PP 1. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

Figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine se numește **unghi**. Unghiul din figura alăturată poate fi citit: $\angle AOB$, $\angle O$ sau $\angle BOA$.

Interiorul unghiului AOB este format din mulțimea punctelor care se află atât în semiplanul delimitat de dreapta OA care conține punctul B , cât și în semiplanul delimitat de dreapta OB care conține punctul A , adică este format din mulțimea punctelor comune celor două semiplane. Punctul M este punct interior unghiului AOB .

Exteriorul unghiului AOB este format din mulțimea punctelor care sunt situate în cel mult unul dintre cele două semiplane: cel delimitat de dreapta OA care conține punctul B sau cel delimitat de dreapta OB care conține punctul A . Punctele N și P sunt puncte exterioare unghiului AOB .

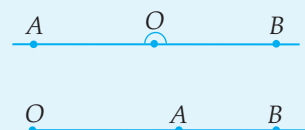
OBSERVAȚIE: Mulțimea punctelor care nu se află nici pe laturile unghiului, nici în interiorul unghiului formează **exteriorul unghiului**.

ELEMENTELE UNUI UNGHI

- **Vârful unghiului** este punctul O , adică originea comună a celor două semidrepte OA și OB .
- **Laturile unghiului** sunt semidreptele OA și OB , adică cele două semidrepte care formează unghiul.

OBSERVAȚII:

- Dacă semidreptele OA și OB care formează unghiul sunt semidrepte opuse, atunci unghiul AOB este **unghi alungit**.
- Dacă semidreptele OA și OB care formează unghiul coincid, atunci unghiul AOB este **unghi nul**.
- Unghiul nul și unghiul alungit sunt **unghiuri improprii**.
- Unghiul care nu este nici nul și nici alungit se numește **unghi propriu**.



MĂSURA UNGHIULUI

Instrumentul folosit pentru măsurarea unghiurilor este **raportorul**.

Pentru a exprima măsura unui unghi, folosim **gradul sexagesimal** și submultiplii acestuia: **minutul** și **secunda**.

Denumirea de grad sexagesimal provine de la faptul că minutul este o unitate de 60 de ori mai mică decât gradul ($1^\circ = 60'$) și secunda este de 60 de ori mai mică decât minutul ($1' = 60''$) și $1^\circ = 60' = 3600''$.

Gradul sexagesimal reprezintă un unghi a cărui deschidere este a 360-a parte dintr-un cerc.

Măsura unui unghi se exprimă printr-un număr n de grade, care ne arată de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în interiorul aceluia unghi și $0^\circ \leq n^\circ \leq 180^\circ$.

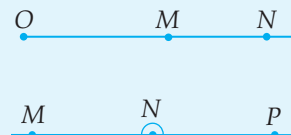
CLASIFICAREA UNGHIURILOR

În funcție de măsura lor, unghiurile se clasifică astfel:

1. unghiuri improprii, care pot fi:

• **unghiuri nule**, dacă au măsura de 0° . Unghiul MON este unghi nul, deoarece $\angle MON = 0^\circ$;

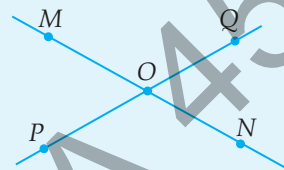
• **unghiuri alungite**, dacă au măsura de 180° . Unghiul MNP este unghi alungit, deoarece $\angle MNP = 180^\circ$.





Desenăm două drepte MN și PQ **concurente** într-un punct O . Observăm că semidreptele OM și ON , respectiv OP și OQ sunt **semidrepte opuse**.

Unghiurile MOQ și NOP sunt unghiuri ale căror laturi sunt **perechi de semidrepte opuse** și spunem că $\sphericalangle MOQ$ și $\sphericalangle NOP$ sunt **unghiuri opuse la vârf**. Analizând cu atenție figura alăturată, remarcăm că și $\sphericalangle MOP$ cu $\sphericalangle NOQ$ sunt unghiuri opuse la vârf, deoarece laturile acestora, adică OM cu ON , respectiv OP cu OQ , sunt semidrepte opuse.



Cu ajutorul unui raportor măsurăm unghiurile MOQ și NOP și constatăm că au aceeași măsură, adică sunt unghiuri congruente. Notăm $\sphericalangle MOQ \equiv \sphericalangle NOP$.

Măsurăm unghiurile MOP și NOQ și constatăm că și acestea au aceeași măsură, adică sunt unghiuri congruente. Notăm $\sphericalangle MOP \equiv \sphericalangle NOQ$.

Pentru a spune că unghiurile opuse la vârf sunt congruente, nu este suficientă constatarea pe care am făcut-o prin măsurare, ci trebuie să demonstrăm printr-un șir de judecăți, folosind noțiunile pe care le cunoaștem.

Demonstrație:

În figura anterioară, semidreptele OM și ON sunt semidrepte opuse și, ca urmare, $\sphericalangle MON$ este unghi alungit, adică: $\sphericalangle MOQ + \sphericalangle QON = 180^\circ$ și $\sphericalangle MOQ = 180^\circ - \sphericalangle QON$ (1).

Cum semidreptele OP și OQ sunt semidrepte opuse, rezultă că $\sphericalangle POQ$ este unghi alungit, adică: $\sphericalangle NOP + \sphericalangle QON = 180^\circ$ și $\sphericalangle NOP = 180^\circ - \sphericalangle QON$ (2).

Din (1) și (2) obținem $\sphericalangle MOQ = 180^\circ - \sphericalangle QON = \sphericalangle NOP$, adică $\sphericalangle MOQ \equiv \sphericalangle NOP$. Deci **unghiurile opuse la vârf sunt unghiuri congruente**. Această afirmație, al cărei adevăr l-am demonstrat printr-un raționament logic, se numește **teoremă**.

REȚINEM!

- Două unghiuri proprii se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă laturile lor sunt perechi de semidrepte opuse.
- Unghiurile opuse la vârf sunt **unghiuri congruente**.

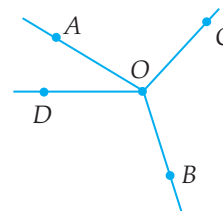
ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

1. a) Desenați două drepte MN și PQ concurente în punctul O , astfel încât măsura unghiului MOP să fie de 60° .

b) Calculați măsurile unghiurilor MOQ , NOQ și PON .

c) Precizați unghiurile opuse la vârf din figura obținută.

2. Analizați figura alăturată și completați. Unghiurile AOD și BOC , respectiv AOC și BOD sunt perechi de unghiuri care vârf și ale căror laturi nicio pereche de semidrepte opuse.



3. Unul dintre unghiurile ce se obțin la intersecția a două drepte concurente are măsura cu 40° mai mică decât a altuia. Calculați măsurile unghiurilor formate de cele două drepte concurente.

4. Observați cu atenție figura alăturată și completați:

- a) semidreptele OM și ON sunt perechi de
- b) semidreptele OP și OQ perechi de semidrepte opuse;
- c) perechile de unghiuri POM și QON , respectiv PON și QOM sunt

unghiuri care la vârf și ale căror laturi o singură pereche de

5. Observați figura alăturată și scrieți toate perechile de unghiuri opuse la vârf.

6. a) Desenați trei drepte AB , CD și EF concurente într-un punct O , astfel încât măsura unghiului AOC să fie egală cu 100° și măsura unghiului COE să fie egală cu 50° .

b) Scrieți perechile de unghiuri opuse la vârf care s-au format.

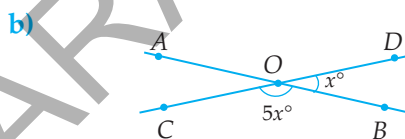
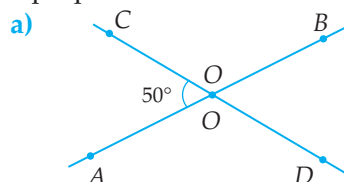
c) Calculați măsurile unghiurilor BOC , BOE , BOD , DOF , FOA și DOA .

7. Se consideră figura alăturată.

a) Notați figura și scrieți unghiurile opuse la vârf care s-au format.

b) Folosind judecata, arătați că suma măsurilor unghiurilor $\angle 1$, $\angle 2$ și $\angle 3$ este egală cu 180° .

8. În figurile de mai jos, punctele A , O și B , respectiv C , O și D sunt coliniare. Calculați măsurile unghiurilor proprii formate:



9. În figura alăturată dreptele AB , CD și EF sunt concurente în punctul O . Scrieți perechile de unghiuri congruente din figură.

10. Se știe că dreptele MN și PQ sunt concurente într-un punct O .

a) Realizați un desen.

b) Dacă măsura unghiului MOP este cu 30° mai mică decât măsura unghiului MOQ , calculați măsurile unghiurilor NOP și NOQ .

c) Dacă măsura unghiului POM este o treime din măsura unghiului PON , calculați măsurile unghiurilor MOP și MOQ .

11. Suma măsurilor a două dintre unghiurile formate de două drepte concurente este 169° . Calculați măsurile celor patru unghiuri.

12. Calculați măsurile unghiurilor determinate de două drepte concurente, știind că unul dintre ele are măsura egală cu:

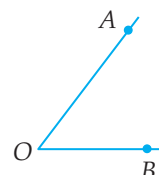
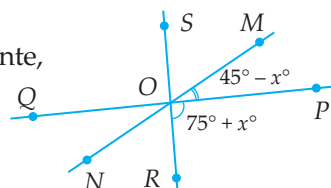
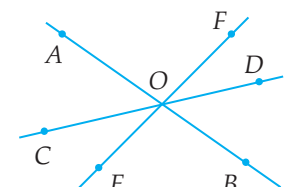
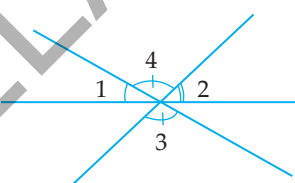
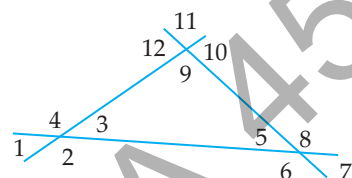
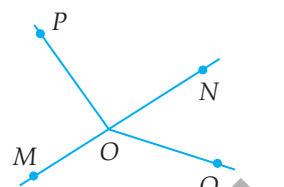
- a) 20° ; b) 110° ; c) 75° ; d) 90° .

13. Observați figura alăturată.

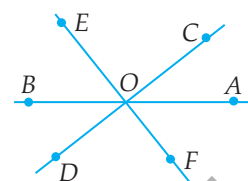
a) Calculați măsura unghiului MOS .

b) Dacă măsura unghiului POM este o treime din măsura unghiului POR , calculați măsurile unghiurilor: NOR , NOQ și QOS .

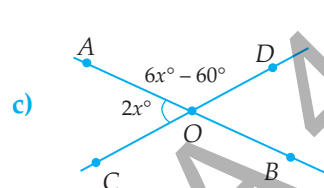
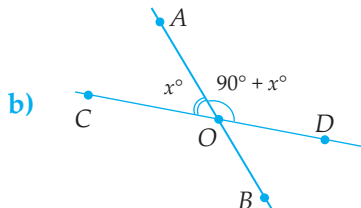
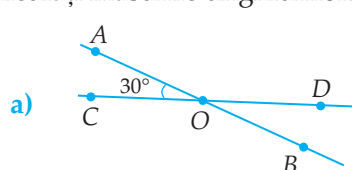
14. Alexandra vrea să măsoare unghiul AOB din figura alăturată, însă, așa cum este desenat, gradațiile raportorului depășesc marginea caietului. Ce ar trebui să facă Alexandra? Explicați!



15. Analizați figura alăturată. Dacă măsura unghiului DOF este de două ori mai mare decât măsura unghiului AOC și măsura unghiului EOC este mai mare cu 40° decât măsura unghiului BOD , calculați măsurile unghiurilor BOD , DOF și AOF .



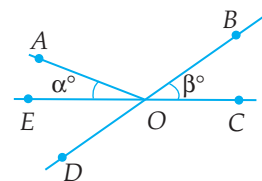
16. În figurile de mai jos punctele A, O, B și, respectiv C, O, D sunt coliniare. Calculați măsurile unghiurilor.



17. Se consideră două drepte a și b concurente în O . Calculați măsura fiecărui unghi cu vârful în O , știind că:

a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este 108° ; b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este 208° .

18. Desenați două drepte MN și PQ concurente în O . Dacă măsura unghiului MOP este egală cu $75^\circ - x^\circ$ și măsura unghiului NOQ este egală cu $x^\circ + 15^\circ$, calculați măsurile unghiurilor MOQ , MOP , NOQ și PON .



19. În figura alăturată, măsura unghiului AOE este egală cu α° și măsura unghiului BOC este egală cu β° . Calculați măsurile unghiurilor AOB , AOD și COD .

20. Punctul de intersecție a două drepte este vârful a patru unghiuri. Se notează cu x măsura în grade a unuia dintre cele patru unghiuri.

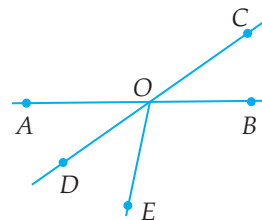
- a) Aflați x , știind că x este cu 40° mai mare decât măsura unui alt unghi dintre cele patru.
b) Aflați x , știind că x este cu 30° mai mic decât măsura altui unghi dintre cele patru.

21. Două drepte concurente formează patru unghiuri cu vârful în punctul O . Calculați măsura fiecărui unghi, știind că:

- a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este egală cu 124° ;
b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este egală cu 236° .

22. În figura alăturată, măsura în grade a unghiului BOC este egală cu x , iar unghiurile AOD și BOC sunt unghiuri opuse la vârf. Dacă $\angle BOE = 5x$ și $\angle AOC = 8x$, calculați măsurile unghiurilor:

- a) $\angle BOE$; b) $\angle AOC$; c) $\angle DOE$.

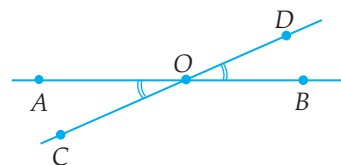


23. Punctul O este mijlocul unui segment AB și dreapta CD este axa de simetrie a segmentului AB .

- a) Realizați un desen care să ilustreze datele problemei.
b) Dacă punctul E este interior unghiului AOC și $\angle AOE = 5 \cdot \angle EOC$, calculați măsurile unghiurilor AOE și COE .
c) Dacă OF este semidreapta opusă semidreptei OE , calculați măsurile unghiurilor BOF și AOF .

24. Punctul O este situat pe dreapta AB . Se iau două puncte C și D de o parte și de alta a dreptei AB . Dacă unghiurile AOC și BOD sunt congruente, demonstrați că:

- a) $\angle BOC \equiv \angle AOD$;
b) punctele C, O și D sunt coliniare;
c) unghiurile AOC și BOD sunt unghiuri opuse la vârf.



1. DREPTE PARALELE: DEFINIȚIE, NOTAȚIE, CONSTRUCȚIE INTUITIVĂ PRIN TRANSLAȚIE. AXIOMA PARALELELOR

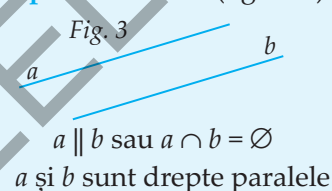
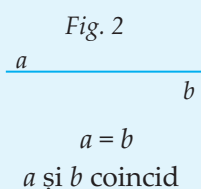
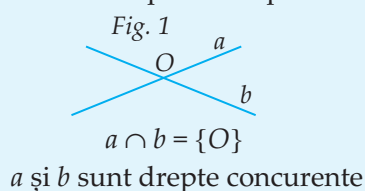


Am învățat că **prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una** sau altfel spus **există o singură dreaptă determinată de două puncte distincte**.

Două drepte situate în același plan care nu au niciun punct comun se numesc **drepte paralele** (figura 3).

Două drepte care sunt situate în același plan și care au două puncte comune **coincid** (figura 2).

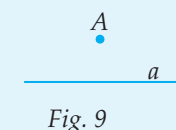
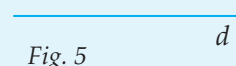
Dacă două drepte au un punct comun, spunem că cele două drepte sunt **drepte concurente** (figura 1).



Dacă dreptele a și b sunt **drepte paralele**, atunci desenăm dreptele ca în figura 4 și scriem „ $a \parallel b$ ”.

Pentru a construi două drepte paralele procedăm astfel:

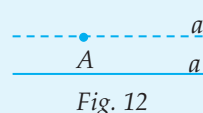
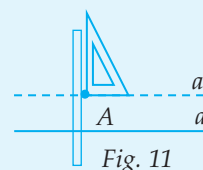
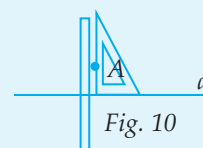
1. construim o dreaptă d (figura 5);
2. așezăm echerul cu muchia opusă unghiului drept pe dreapta d și plasăm o riglă lipită de una dintre muchiile echerului care formează unghiul drept (figura 6);
3. **translatăm** echerul de-a lungul riglei (figura 7);
4. trasăm dreapta suport a muchiei opuse unghiului drept (figura 8).



Am obținut astfel dreapta d' paralelă cu dreapta d.

Dacă dorim să construim o dreaptă a' paralelă cu o dreaptă a și care trece printr-un punct A exterior dreptei a, putem aplica procedeul anterior, fiind atenți la pasul 3., adică **translatăm** echerul de-a lungul riglei până când *ipotenenuza* echerului trece prin punctul A, sau procedăm astfel:

1. se consideră o dreaptă a și un punct A exterior dreptei a (figura 9);
2. așezăm echerul astfel încât o muchie a echerului care conține unghiul drept să se sprijine pe dreapta a, iar cealaltă să treacă prin punctul A (figura 10);
3. așezăm rigla lipită de muchia echerului care trece prin punctul A;
4. translatăm echerul de-a lungul riglei până când vârful unghiului drept al echerului ajunge în punctul A (figura 11) și trasăm dreapta determinată de muchia echerului care conține unghiul drept și care a ajuns prin translație în punctul A (figura 12). Notăm cu a' această dreaptă și am obținut $a \parallel a'$.



Fiind dată o dreaptă și un punct exterior ei, există o unică dreaptă care trece prin acel punct și este paralelă cu dreapta dată. Acest enunț este cunoscut sub denumirea de **axioma paralelelor** sau **postulatul lui Euclid**.

REȚINEM!

- Două drepte coplanare a și b care nu au niciun punct comun se numesc **drepte paralele**.
Notăm: $a \parallel b$ sau $a \cap b = \emptyset$.
- Două drepte coplanare c și d care au un punct comun O se numesc **drepte concurente**.
Notăm: $c \cap d = \{O\}$.

AXIOMA PARALELELOR

Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta respectivă.

Proprietățile relației de paralelism

- 1. reflexivitate:** $a \parallel a$;
- 2. simetrie:** dacă $a \parallel b$, atunci $b \parallel a$;
- 3. tranzitivitate:** dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

1. Completați corespunzător spațiile punctate:

- Două drepte se numesc paralele dacă
- Două drepte se numesc concurente dacă
- Două drepte coincid dacă

2. Urmăriți figurile alăturate și completați corespunzător spațiile punctate.

- Punctul O este
- Dreptele b și c sunt
- Dreapta MN și dreapta a
- Dreptele d și d' sunt



3. Considerăm următoarele afirmații:

- Prin punctul A , exterior dreptei d , construim o paralelă la dreapta d .
 - Prin punctul A , exterior dreptei d , construim paralela la dreapta d .
- Motivați care dintre cele două afirmații este corectă.

4. Dați câte un exemplu de:

- definiție;
- teoremă;
- axiomă.

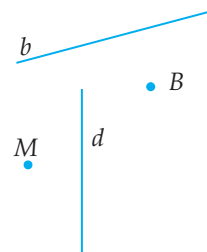
5. Desenați un triunghi ABC . Folosind unul dintre procedeele învățate, construiți paralela prin punctul:

- A la dreapta BC ;
- B la dreapta AC ;
- C la dreapta AB .

6. Enumerați proprietățile relației de paralelism.

7. Se consideră o dreaptă b și un punct B exterior dreptei b . Folosind unul dintre procedeele expuse în lecție, construiți paralela prin punctul B la dreapta b .

8. Se consideră o dreaptă d și un punct M exterior dreptei d . Folosind unul dintre procedeele expuse în lecție, construiți paralela prin punctul M la dreapta d .



UNITATEA: PERPENDICULARITATE

PE-PP

1. DREPTE PERPENDICULARE ÎN PLAN (DEFINIȚIE, NOTAȚIE, CONSTRUCȚIE). OBLICE



Considerăm un unghi drept AOB și semidreptele opuse laturilor unghiului AOB . Notăm cu OA' și OB' aceste semidrepte. $\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle AOB$ ca unghiuri opuse la vârf și, ca urmare, $\sphericalangle A'OB' = 90^\circ$, adică este unghi drept. Unghiurile AOB' și AOB sunt adiacente suplementare și, ca urmare, $\sphericalangle AOB' = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, adică este unghi drept. Unghiurile BOA' și AOB sunt adiacente suplementare și, ca urmare, $\sphericalangle BOA' = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, adică este unghi drept.

Spunem că **dreptele AA' și BB' sunt perpendiculare** sau că **dreapta AA' este perpendiculară pe dreapta BB'** și notăm $AA' \perp BB'$.

Două drepte concurente c și d , care nu sunt perpendiculare, se numesc **drepte oblice**. Dreapta c este oblică față de dreapta d și dreapta d este oblică față de dreapta c pentru că cele două drepte nu formează un unghi drept.



OBSERVAȚII:

- Dacă două drepte sunt **perpendiculare**, atunci fiecare dintre ele **este perpendiculară pe cealaltă**.
Dacă $AA' \perp BB'$, atunci $BB' \perp AA'$.
- Două drepte perpendiculare formează **patru unghiuri drepte**.
- Două **drepte oblice** formează **două unghiuri ascuțite și două unghiuri obtuze**.

DEFINIȚIE: Două drepte concurente care formează un unghi cu măsura egală cu 90° se numesc **drepte perpendiculare**. Dacă a și b sunt două drepte perpendiculare, notăm $a \perp b$. Două drepte perpendiculare determină patru unghiuri drepte (figura 1).

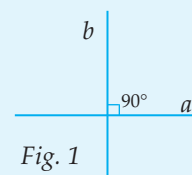


Fig. 1

1. Se dă o dreaptă d și un punct A care nu aparține dreptei d (figura 2). Se cere să se construiască dreapta d' perpendiculară pe dreapta d și căreia să îi aparțină punctul A .

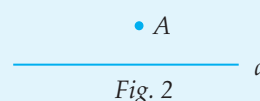


Fig. 2

Cerința de mai sus se formulează mai scurt astfel: **se cere să se coboare din punctul A perpendiculara pe dreapta d** . Construcția se face cu echerul (figura 3) sau cu rigla negradată și compasul (figura 4).

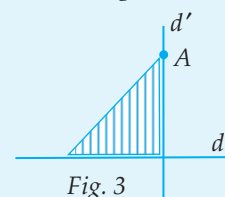


Fig. 3

Construcția perpendicularei pe o dreaptă dată (d) dintr-un punct exterior acesteia (A)

A. Folosind echerul și rigla negradată

- Așezăm echerul de aceeași parte cu punctul A față de dreapta d , astfel încât una dintre laturile care formează unghiul drept să se suprapună dreptei d , iar cealaltă latură să treacă prin punctul A .
- Trasăm dreapta care conține punctul A după latura echerului care se suprapune pe acest punct, notăm cu d' această dreaptă și cu A' punctul de intersecție a acestei drepte cu dreapta d .
- Prelungim dreapta d' dincolo de A' , folosind rigla negradată, și d' este perpendiculara din punctul A pe dreapta d . Notăm $d' \perp d$ și $A \in d'$.

B. Folosind compasul și rigla negradată

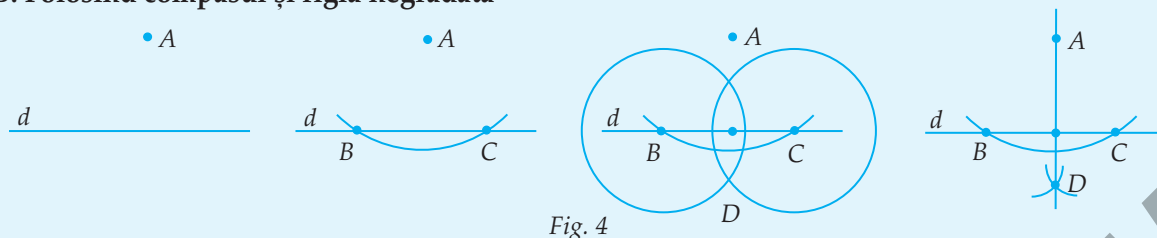


Fig. 4

- Fixăm compasul cu acul în punctul A și trasăm un cerc de rază convenabilă care intersectează dreapta d în două puncte B și C .
- Așezăm acul compasului pe rând în punctele B și C și trasăm câte un cerc cu aceeași deschidere a compasului care să fie mai mare sau egală decât jumătate din distanța BC și notăm cu D unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri.
- Cu o riglă trasăm dreapta AD și AD este perpendiculara din punctul A pe dreapta d . Notăm $AD \perp d$ (figura 4).

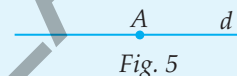


Fig. 5

2. Se dă o dreaptă d și un punct A care aparține dreptei d (figura 5). Se cere să se construiască dreapta d' perpendiculară pe d și careia să îi aparțină punctul A .

Cerința se poate formula și astfel: **se cere să se ridice în punctul A perpendiculara pe dreapta d .** Construcția se face cu echerul (figura 6) sau cu rigla negradată și compasul (figura 7).

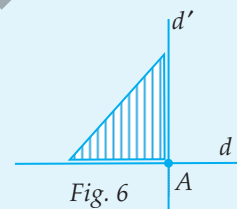


Fig. 6

Construcția perpendiculararei pe o dreaptă dată (d) într-un punct al acesteia (A)

A. Folosind echerul și rigla negradată

- Așezăm echerul, astfel încât una dintre cele două laturi ale acestuia care formează unghiul drept să se suprapună dreptei d , iar vârful unghiului drept al echerului să coincidă cu punctul A .
- Trasăm dreapta care conține punctul A după cealaltă latură a echerului care se suprapune pe punctul A și o notăm cu d' .
- Prelungim dreapta d' dincolo de punctul A , folosind rigla negradată. Dreapta d' este perpendiculara în punctul A pe dreapta d . Notăm $d' \perp d$ și $A \in d'$.

B. Folosind compasul și rigla negradată

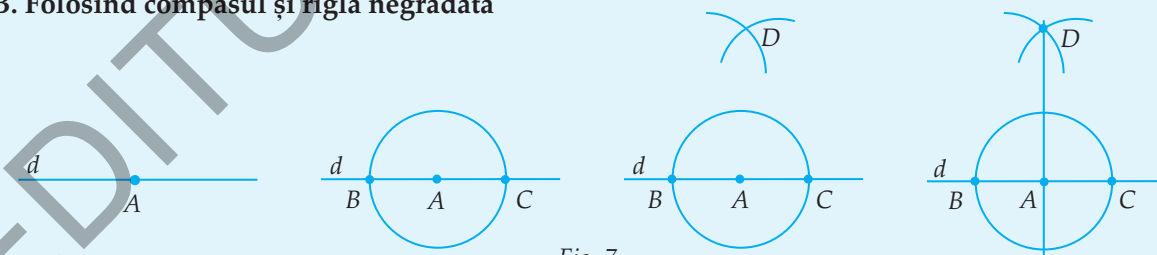


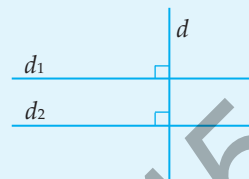
Fig. 7

- Trasăm un cerc de rază convenabilă care intersectează dreapta d în două puncte B și C .
- Așezăm acul compasului pe rând în punctele B și C , trasăm câte un cerc cu aceeași deschidere a compasului care să fie mai mare decât jumătate din distanța BC și notăm cu D unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri.
- Cu o riglă negradată trasăm dreapta AD . Dreapta AD este perpendiculara în punctul A pe dreapta d . Notăm $AD \perp d$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră două drepte coplanare d_1 și d_2 perpendiculare pe o dreaptă d . Demonstrați că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

Rezolvare: Dacă $d_1 \perp d$ și $d_2 \perp d$, atunci unghiurile marcate pe figură sunt unghiuri drepte. Dar unghiurile marcate sunt unghiuri corespondente pentru dreptele d_1, d_2 și secanta d și conform criteriului de paralelism, dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele, rezultă că $d_1 \parallel d_2$.



REȚINEM!

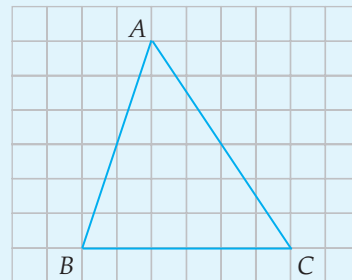
- Două drepte concurente a și b care formează un unghi cu măsura de 90° se numesc **drepte perpendiculare** și notăm $a \perp b$.
- Două drepte perpendiculare formează **patru unghiuri drepte**.
- Două drepte concurente c și d care nu sunt perpendiculare se numesc **oblice**; dreapta c este **oblică** față de dreapta d și dreapta d este **oblică** față de dreapta c .
- Două oblice formează **două unghiuri ascuțite** și **două unghiuri obtuze**, congruente două câte două ca unghiuri opuse la vârf.
- Dintr-un punct exterior unei drepte putem construi **o singură perpendiculară** pe acea dreaptă și **oricât de multe oblice**.
- Într-un punct al unei drepte putem construi **o singură perpendiculară** pe acea dreaptă.
- Două drepte coplanare perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt **paralele**.

2. Folosind foaia cu pătrățele a caietului de matematică, copiați pe caiete triunghiul ABC din figura alăturată.

a) Construiți perpendiculara în punctul B pe dreapta AB și perpendiculara în punctul C pe dreapta AC .

b) Construiți perpendiculara din punctul A pe dreapta BC , notați cu A' piciorul acestei perpendiculare și precizați care este distanța de la punctul A la dreapta BC .

c) Construiți perpendicularele în punctele B și C pe dreapta BC și precizați distanțele de la punctele B , respectiv C , la dreapta BC .



Rezolvare:

a) Perpendiculara în punctul B pe dreapta AB este dreapta d_1 , $d_1 \perp AB$ și perpendiculara în punctul C pe dreapta AC este dreapta d_2 , $d_2 \perp AC$ (figura 8).

b) Perpendiculara din punctul A pe dreapta BC este dreapta d . Piciorul perpendicularei din punctul A pe dreapta BC este punctul A' . Distanța de la punctul A la dreapta BC este lungimea segmentului AA' , adică $d(A, BC) = AA'$ (figura 9).

c) Perpendiculara în punctul B pe dreapta BC este dreapta d_3 , distanța de la punctul B la dreapta BC este egală cu zero, deoarece punctul B se află pe dreapta BC și notăm $d(B, BC) = 0$. Perpendiculara în punctul C pe dreapta BC este dreapta d_4 , distanța de la punctul C la dreapta BC este egală cu zero, deoarece punctul C se află pe dreapta BC și notăm $d(C, BC) = 0$ (figura 10).

Fig. 8

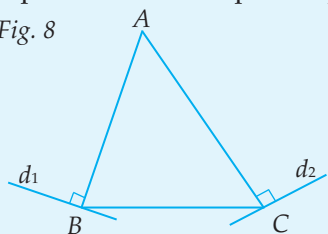


Fig. 9

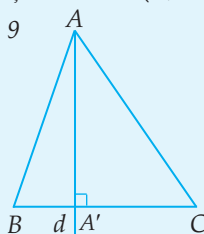
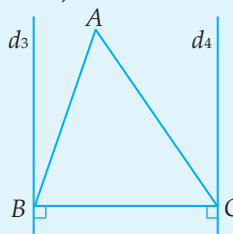


Fig. 10



ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

1. Desenați două drepte concurente. Verificați cu ajutorul echerului dacă sunt perpendiculare sau oblice.
2. Desenați o dreaptă d și două puncte A și B care aparțin dreptei ($A \in d$ și $B \in d$). Dacă O este un punct exterior dreptei d , construiți perpendiculara OA și oblica OB .
3. Desenați o dreaptă d și un punct A ce nu aparține dreptei ($A \notin d$).
 - a) Trasați cu echerul: perpendiculara din A pe d și o oblică căreia să îi aparțină punctul A .
 - b) Comparați măsurile unghiurilor determinate de perpendiculară și, respectiv, de oblică cu dreapta d .
4. Desenați o dreaptă d și apoi punctele A, B, C, D situate la distanțele de 2 cm, 3 cm, 1 cm și, respectiv, 0 cm de dreapta d .
5. Desenați trei puncte necoliniare M, N, P . Construiți perpendicularele:
 - a) în punctul M pe MN și MP ;
 - b) în punctul N pe MN și NP ;
 - c) în punctul P pe MP și NP .
6. Știind că $OA \perp OB$ (figura 1), calculați suma măsurilor unghiurilor AOC și BOD .
7. Desenați patru drepte a, b, c, d concurente într-un punct O , care să determine opt unghiuri congruente în jurul punctului O . Numiți dreptele perpendiculare.
8. Se știe că $OA \perp OC$ și $OB \perp OD$ (figura 2).
 - a) Calculați suma măsurilor unghiurilor AOB și COD .
 - b) Demonstrați că unghiurile AOD și BOC sunt congruente.
9. Se consideră trei puncte necoliniare M, N și P . Desenați perpendicularele din punctele M, N și P pe dreptele NP, MP și MN .
10. a) Desenați trei puncte necoliniare A, B și C .
 - b) Notați cu M, N și P mijloacele segmentelor AB, BC și AC .
 - c) Construiți perpendiculara în punctul M pe dreapta AB , perpendiculara în punctul N pe dreapta BC și perpendiculara în punctul P pe dreapta AC .
11. Desenați două unghiuri AOB și BOC adiacente și complementare. Ce puteți spune despre dreptele AO și CO ? Justificați.
12. a) Analizați figura 3 și copiați-o în caietele voastre.
 - b) Construiți perpendicularele din punctul O pe dreapta MN , din punctul O pe dreapta NP și din punctul O pe dreapta PM . Notați-le cu d_1, d_2 și d_3 .
13. Desenați două unghiuri AOB și BOC adiacente și suplementare. Notați cu OM bisectoarea unghiului AOB și cu ON bisectoarea unghiului BOC . Ce puteți spune despre dreptele OM și ON ? Justificați.
14. Fie un segment AB cu lungimea de 8 cm și M un punct pe dreapta AB . Dacă P este mijlocul segmentului AM , iar Q este mijlocul segmentului BM , calculați distanța de la punctul P la dreapta perpendiculară pe AB în punctul Q .
15. Fie $\angle MON$ un unghi cu măsura de 70° . Se consideră un punct P , astfel încât dreptele OP și OM să fie perpendiculare. Calculați măsura unghiului PON .

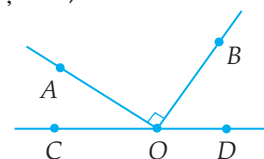


Fig. 1

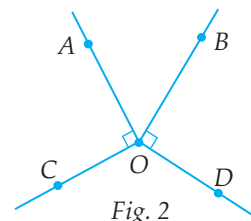


Fig. 2

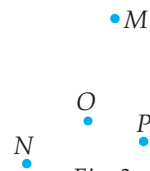


Fig. 3

PE-PP 5. RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

- Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

TESTUL 1

I. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(2 puncte)

- (0,5p) 1. Mediatoarea unui segment AB este
(0,5p) 2. O dreaptă este axă de simetrie a unei figuri geometrice dacă
(0,5p) 3. Pătratul are axe de simetrie.
(0,5p) 4. Prin distanța de la un punct A la o dreaptă d se înțelege

II. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(2 puncte)

Dreptele MN și d sunt paralele. Punctul O este mijlocul segmentului MN , iar punctele A, B, C și D aparțin dreptei d , astfel încât: $\angle AON = 20^\circ + \angle BON = 50^\circ + \angle CON = 70^\circ + \angle DON = 140^\circ$.

- (0,5p) 1. Pe mediatoarea segmentului MN se află:
A. punctul D ; B. punctul C ; C. punctul B ; D. punctul A .
(0,5p) 2. Dreapta d este perpendiculară pe:
A. dreapta OD ; B. dreapta OC ; C. dreapta OB ; D. dreapta OA .
(0,5p) 3. Distanța de la punctul O la dreapta d este lungimea segmentului:
A. OD ; B. OA ; C. OC ; D. OB .
(0,5p) 4. Bisectoarea unghiului AON este semidreapta:
A. OD ; B. OC ; C. OB ; D. OA .

III. Uniți, prin săgeți, fiecare enunț aflat în linia A cu răspunsul corespunzător aflat în linia B.

(2 puncte)

Se consideră un unghi alungit AOE și în același semiplan determinat de dreapta AO se iau semidreptele OB, OC și OD , astfel încât $OC \perp OA$ și $OD \perp OB$. Dacă măsura unghiului AOB este jumătate din măsura unghiului DOE , atunci:

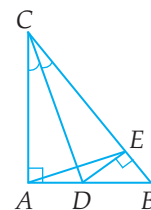
A: 1. $\angle AOB = \dots$; 2. $\angle DOE = \dots$; 3. $\angle AOD = \dots$; 4. $\angle BOE = \dots$.

B: a) 120° ; b) 150° ; c) 90° ; d) 60° ; e) 30° .

IV. Scrieți rezolvările complete.

(3 puncte)

1. Se consideră un unghi alungit AOE și în același semiplan determinat de dreapta AO se iau unghiurile adiacente AOB, BOC, COD și DOE , ale căror măsuri verifică relațiile:
 $\angle BOC = 3 \cdot \angle AOB$; $\angle COD = 2 \cdot \angle AOB$; $\angle DOE = 6 \cdot \angle AOB$.
(1p) a) Calculați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD și DOE .
(0,5p) b) Arătați că $AO \perp DO$.
(0,5p) c) Arătați că $DO \perp EO$.
(1p) 2. În figura alăturată, se știe că $\angle BAC = 90^\circ$, CD este bisectoarea unghiului ACB și $DE \perp BC$. Arătați că punctul D se află pe mediatoarea segmentului AE .



UNITATEA: CERCUL

PE-PP

1. CERC. ELEMENTE ÎN CERC: CENTRU, COARDĂ, DIAMETRU, ARC DE CERC



În figura 1, punctele A, B, C și D sunt situate la 2 cm de punctul O . Se pune problema dacă mai putem găsi și alte puncte situate la distanța de 2 cm față de punctul O .

Răspunsul îl găsim observând figura 2. Fie M un punct oarecare pe cerc. Segmentul OM are tot 2 cm. Cu alte cuvinte, punctele de pe cerc sunt situate la aceeași distanță de punctul O . Punctul O este **centrul cercului**, iar lungimea segmentelor congruente OA, OB, OC, OD, OM reprezintă ceea ce în limbaj matematic numim **raza cercului**.

DEFINIȚIE: Fiind dat un punct O și un număr pozitiv r , se numește **cerc de centru O și rază r** mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanța r de punctul O .

Altfel spus, cercul este mulțimea tuturor punctelor egal depărtate de un punct fix. Punctul fix, adică punctul O , se numește **centrul cercului**, iar numărul r se numește **raza cercului**.

Cercul de centru O și rază r um* se notează $\mathcal{C}(O, r \text{ um})$, dar se mai folosesc și notațiile $\mathcal{C}(O, r)$ sau $\mathcal{C}$.

Așa cum știm din clasele anterioare, cercul se desenează cu ajutorul compasului (figura 3).

În anumite situații, prin **rază** se poate înțelege și **segmentul** care unește **centrul cercului cu un punct al cercului**. În figura 4, OM este raza cercului.

Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă**. În figura 5, AB este coardă. O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**. În figura 6, CD este diametru. Lungimea oricărui diametru este de două ori mai mare decât raza, adică $CD = 2r$.

Cele două puncte de pe cerc care sunt extremitățile diametrului se numesc **puncte diametral opuse**.

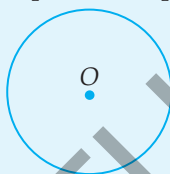


Fig. 3

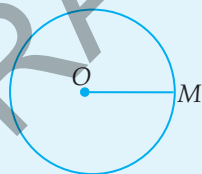


Fig. 4

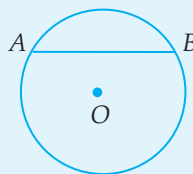


Fig. 5

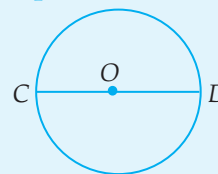


Fig. 6

Două cercuri se numesc **cercuri congruente** dacă au razele egale și scriem $\mathcal{C}(O_1, r_1) \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$ dacă și numai dacă $r_1 = r_2$.

Un punct oarecare se numește **interior unui cerc** dacă distanța de la centrul cercului la acel punct este mai mică decât raza.

În figura 7, observăm că $OM < OA$, adică $OM < r$. Înseamnă că punctul M este **punct interior cercului** de centru O și rază OA .

Un punct oarecare se numește **exterior unui cerc** dacă distanța de la centrul cercului la acel punct este mai mare decât raza.

În figura 7, observăm că $ON > OA$, adică $ON > r$. Înseamnă că N este **punct exterior cercului** de centru O și rază OA .

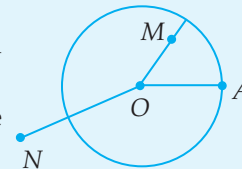


Fig. 7

* um = unități de măsură

Dacă considerăm mulțimea punctelor interioare cercului de centru O și rază OA reunită cu mulțimea punctelor cercului, obținem **discul de centru O și rază OA** (figura 8).

Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numește **arc de cerc**, iar punctele care determină arcul de cerc se numesc **capetele sau extremitățile arcului**. Dacă extremitățile unui arc de cerc sunt puncte diametral opuse, arcul de cerc se numește **semicerc**.

Două puncte A și B , care nu sunt diametral opuse, determină pe un cerc două arce: **arcul mic $\widehat{AB}$** (figura 9) și **arcul mare $\widehat{AB}$** (figura 10).

OBSERVAȚII:

- Când scriem $\widehat{AB}$ (folosind doar două litere), ne referim la arcul mic $\widehat{AB}$.
- Pentru a ne referi la arcul mare $\widehat{AB}$, vom folosi încă un punct al arcului, diferit de extremitățile acestuia. În figura 10, pentru a ne referi la arcul mare $\widehat{AB}$, vom scrie arcul $\widehat{AMB}$.

În figura 11, este reprezentat un cerc de centru O și rază 1,5 cm. Punctele A și B aparțin cercului și OM este mediatoarea segmentului AB . Fie N un punct oarecare pe dreapta OM . Avem $NA = NB$ (orice punct de pe mediatoare este egal depărtat de capetele segmentului) și cercul cu centrul în N și rază NA trece și prin punctul B . Cu alte cuvinte, am găsit două cercuri care trec prin punctele A și B . Asemănător putem arăta că prin punctele A și B trec și alte cercuri. Cum mediatoarea segmentului AB conține o infinitate de puncte, toate egal depărtate de A și B , rezultă că **există o infinitate de cercuri care trec prin punctele A și B , centrele acestor cercuri aflându-se pe mediatoarea segmentului AB** .

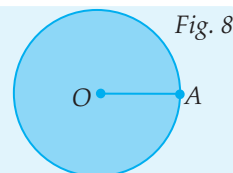


Fig. 8

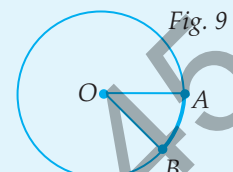


Fig. 9

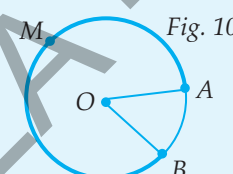


Fig. 10

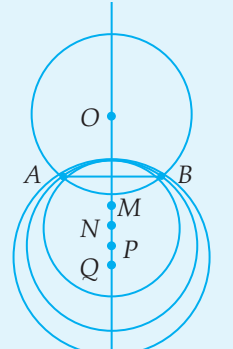


Fig. 11

REȚINEM!

- Fiind dat un punct O și un număr pozitiv r , se numește **cerc de centru O și rază r** și notăm $\mathcal{C}(O, r)$ mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanță r față de punctul O .
- Prin **rază** se poate înțelege **distanța de la centrul cercului la un punct de pe cerc sau segmentul care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc**.
- Un punct oarecare al planului poate avea următoarele poziții:
 - **interior unui cerc**, dacă distanța de la centrul cercului la punct este mai mică decât raza;
 - **aparține cercului**, dacă distanța de la centrul cercului la punct este egală cu raza;
 - **exterior cercului**, dacă distanța de la centrul cercului la punct este mai mare decât raza.
- Segmentul care are ca extremități două puncte de pe cerc se numește **coardă**.
- Coarda care conține centrul cercului se numește **diametru**. Dacă MN este diametru, atunci punctele M și N se numesc **puncte diametral opuse**.
- Două cercuri care au razele egale se numesc **cercuri congruente**.
- Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numește **arc de cerc**. Oricare două puncte distincte ale unui cerc determină două arce de cerc: **un arc mic** și **un arc mare**. Dacă cele două puncte sunt diametral opuse, atunci cele două arce devin semicercuri.
- **Centrul cercului** este mijlocul oricărui diametru. **Lungimea diametrului** este dublul lungimii razei.
- Orice dreaptă determinată de diametrul unui cerc este **axă de simetrie a cercului**.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

1. a) Scrieți definiția cercului.

b) Desenați un cerc de centru O , cu raza de 1,5 cm și puneți în evidență diametrul AB , raza OM și coarda CD .

2. Desenați un cerc de centru O și rază $r = 1,5$ cm. Luați apoi punctele A, B, C, D, E și F , astfel încât $OA = 1$ cm, $OB = 2$ cm, $OC = 1$ cm, $OD = 2,5$ cm, $OE = 1,5$ cm, $OF = \frac{4,5}{3}$ cm și $OG = \frac{5}{4}$ cm. Scrieți punctele:

a) interioare cercului;

b) exterioare cercului;

c) care aparțin cercului;

d) care aparțin discului de centru O și rază de 1,5 cm.

3. a) Desenați un punct A și trei cercuri care trec prin punctul A . Câte astfel de cercuri puteți desena?

b) Desenați două puncte distincte A și B și trei cercuri care trec prin aceste puncte. Există mai multe cercuri care trec prin cele două puncte?

4. Se consideră cercul de centru O și rază 12 cm. Se ia un punct A , astfel încât $OA = 119$ mm. Stabiliți poziția punctului A față de cercul dat.

5. Se consideră cercul de centru O și rază 40 mm. Se ia un punct B , astfel încât $OB = 4,1$ cm. Stabiliți poziția punctului B față de cercul dat.

6. Punctele M și N distincte aparțin unui cerc. Dacă punctele P și Q sunt mijloacele arcelor determinate de punctele M și N pe cerc, arătați că segmentul PQ este diametrul cercului.

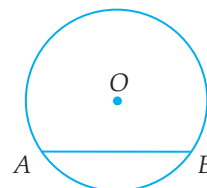
7. În figura alăturată, punctele A și B aparțin cercului de centru O și rază 1,5 cm.

a) Notați cu M mijlocul coardei AB .

b) Notați cu N intersecția dreptei OM cu cercul.

c) Numiți arcele de cerc formate.

d) Ce puteți spune despre coardele NA și NB ? Justificați.



8. a) Desenați un cerc cu centrul într-un punct O și cu raza de 2 cm.

b) Desenați trei axe de simetrie, a, b, c , ale cercului.

c) Notați cu A și A' punctele de intersecție dintre dreapta a și cerc, cu B și B' punctele de intersecție dintre dreapta b și cerc și cu C și C' punctele de intersecție dintre dreapta c și cerc.

d) Ce reprezintă pentru cerc segmentele AA', BB' și CC' ?

9. Fie A un punct interior unui cerc. Construiți o coardă care să aibă ca mijloc punctul A .

10. a) Desenați trei puncte necoliniare A, B și C .

b) Desenați trei cercuri care trec prin punctele A și B . Unde se află centrele acestor cercuri?

c) Desenați trei cercuri care trec prin punctele B și C . Unde se află centrele acestor cercuri?

d) Puteți desena un cerc care să treacă prin toate cele trei puncte?

11. a) Desenați un segment MN cu lungimea de 3 cm. Notați cu P un punct interior segmentului MN .

b) Construiți cercurile $\mathcal{C}_1$ de diametru MP , respectiv $\mathcal{C}_2$ de diametru NP .

c) Aflați distanța dintre centrele celor două cercuri construite la punctul b).

12. Construiți un cerc de centru O și rază r , apoi reprezentați: un punct M interior cercului, două puncte N și P pe cerc, astfel încât punctul O să aparțină segmentului NP , și un punct Q exterior cercului. Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile $<, =, >$, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

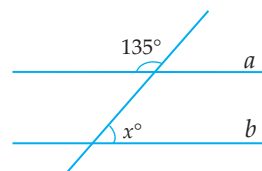
a) MO r ; b) NO r ; c) PO r ; d) QO r ; e) NP $2r$; f) MN NP .

TESTE RECAPITULATIVE

Notă (pentru testele 1-10): Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

TESTUL 1

- (0,8p) 1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \in \mathcal{D}_{14}\}$.
- (0,8p) 2. Scrieți divizorii numărului 18.
- (0,8p) 3. Din 30 kg de portocale se obțin 18 ℓ suc. Aflați câți litri de suc se obțin din 20 kg de portocale.
- (0,8p) 4. Verificați proprietatea $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$, pentru $a = 24$ și $b = 36$, unde (a, b) înseamnă c.m.m.d.c. al numerelor a și b , iar $[a, b]$ înseamnă c.m.m.m.c. al numerelor a și b .
- (0,8p) 5. Se consideră două drepte AB și CD concurente în punctul O . Dacă $\angle AOC = 70^\circ$, calculați $\angle BOD$.
- (0,8p) 6. Măsura arcului $\widehat{AB}$ reprezintă 40% din măsura cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Determinați măsura unghiului la centru AOB .
- (0,7p) 7. Determinați x , astfel încât dreptele a și b din figura alăturată să fie paralele.
- (0,7p) 8. Cel mai mare divizor comun a două numere este 15. Aflați numerele, știind că produsul lor este 3150.
- (0,7p) 9. Raportul măsurilor a două dintre unghiurile formate de două drepte concurente este egal cu $\frac{2}{3}$. Aflați măsurile unghiurilor.
- (0,7p) 10. Se dau mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, d\}$. Calculați $A \cup B$, $A \cap B$ și $A \setminus B$.
- (1,4p) 11. Bisectoarele unghiurilor adiacente AOB și BOC formează un unghi cu măsura de 60° . Știind că raportul măsurilor celor două unghiuri este $\frac{2}{3}$, calculați:
- a) măsura unghiului AOB ;
 - b) măsura unghiului format de bisectoarea unghiului AOB și semidreapta opusă semidreptei OB ;
 - c) măsura unghiului format de bisectoarea unghiului BOC și semidreapta opusă semidreptei OA .



TESTUL 2

- (0,8p) 1. Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{a, b, c\}$.
- (0,8p) 2. Scrieți multiplii numărului 7 cuprinși între 10 și 30.
- (0,8p) 3. Aflați numerele x și y , știind că sunt direct proporționale cu 2 și 3 și că diferența lor este 12.
- (0,8p) 4. Calculați măsura suplementului unghiului cu măsura de 118° .
- (0,8p) 5. Se consideră un triunghi ABC și prin punctul A se duce o paralelă la BC . Calculați $\angle A + \angle B + \angle C$.
- (0,8p) 6. În jurul unui punct O s-au construit nouă unghiuri congruente. Determinați măsura fiecăruia dintre cele nouă unghiuri.

PROBLEME DATE LA CONCURSURI ȘCOLARE

1. Determinați toate șirurile de rapoarte egale de forma $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_5}{a_6} = \frac{a_7}{a_8}$ care îndeplinesc simultan

condițiile:

- mulțimea $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ este mulțimea divizorilor pozitivi ai lui 24;
- valoarea comună a rapoartelor este număr natural.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa națională, Slobozia, 2023

2. Unghiurile AOB , BOC , COD și DOA sunt unghiuri în jurul punctului O . Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și semidreapta ON este bisectoarea unghiului COD .

a) Dacă $\angle MON = 170^\circ$, $\angle BOC = 140^\circ$, iar punctele A și D sunt interioare unghiului MON , calculează măsura unghiului AOD .

b) Dacă $\angle BOC \equiv \angle AOD$, arată că semidreptele OM și ON sunt semidrepte opuse.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Bacău, 2024

3. Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, pentru care este adevărată egalitatea: $\frac{m+2n}{m+2n+25} = \frac{n+2p}{n+2p+39} = \frac{p+2m}{p+2m+29}$. Să se

arate că are loc relația: $\frac{2m+n}{2m+n+23} = \frac{2n+p}{2n+p+33} = \frac{2p+m}{2p+m+37}$.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Bacău, 2024

4. Determinați numerele naturale x, y, z , pentru care are loc relația: $2^x - 2^y - 2^z = 1023$.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa județeană, 2024

5. a) Arătați că numerele $12n + 13$ și $13n + 14$ sunt prime între ele pentru orice număr natural n .

b) Determinați numărul perechilor (a, b) de numere naturale, pentru care există un număr natural n , astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{12n+13}{13n+14}$ și $17a + 19b < 2024$.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa județeană, 2024

6. Câte numere naturale n au proprietatea că $P(n) = S(n) = 8$, unde $P(n)$ și $S(n)$ reprezintă produsul, respectiv suma cifrelor numărului n (scris în baza 10)? Justificați răspunsul.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa națională, 2022

7. Pentru orice două numere naturale m și n , notăm $A(m, n) = m^2 + n^2 + 2mn$ (de exemplu, $A(3, 4) = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$).

a) Arătați că $A(1, 2) + A(2, 4)$ este divizibil cu 9.

b) Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale numerelor $A(3, 6)$ și $A(4, 8)$.

c) Notăm cu $M = \{n \in \mathbb{N}^* \mid A(n, n) \leq 2020\}$ și cu S suma elementelor lui M . Calculați numărul de divizori ai lui S .

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Vâlcea, 2020

8. În jurul punctului O considerăm $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$, ..., $\angle A_{n-1}OA_n$, $\angle A_nOA_0$, astfel încât $\angle A_{n-1}OA_n = n^2$ grade și $\angle A_nOA_0 = a$ grade.

a) Calculați $\angle A_0AA_3$.

b) Determinați valoarea maximă a lui n și $\angle A_nOA_0$ (pentru n maxim).

c) Arătați că există cel puțin două semidrepte OA_x și OA_y , astfel încât $OA_x \perp OA_y$.

Olimpiada Națională de Matematică, Etapa locală, Vâlcea, 2020

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scațați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

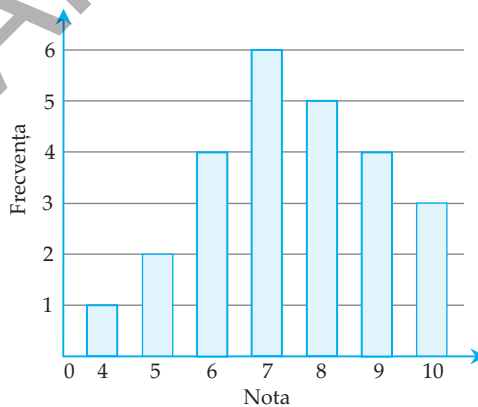
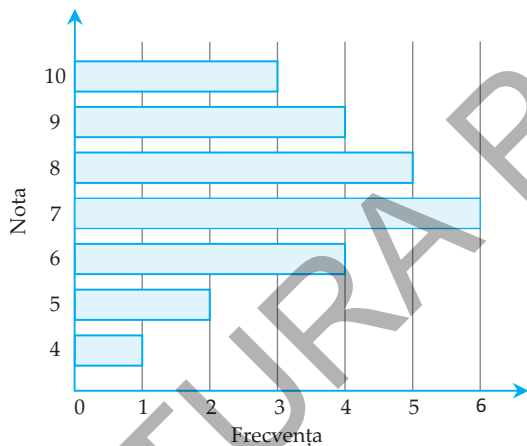


RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚĂLĂ

1. Exerciții și probleme recapitulative

1. a) 1; b) 128; c) 2; d) 160. 2. a) $x = n \cdot (n + 1)$ și produsul a două numere consecutive nu este pătrat perfect; b) $y = n^2$, deci y este pătrat perfect; c) $z = 100^2$, deci este pătrat perfect; d) $t = 2025^2$, deci t este pătrat perfect. 3. a) 1; b) 0; c) 6; d) 8. 4. 4,25; 3,(6); 2,8(6); 0,2(15); b) $\frac{29}{15}$; $\frac{37}{12}$; $\frac{132}{25}$; $\frac{61}{495}$. 5. a) 5; 11; 17; 23; 29; b) 101 și 0; c) Folosind teorema împărțirii cu rest, dacă ar exista un astfel de număr, am obține că restul împărțirii aceluși număr la 6 ar fi 4, respectiv 2, ceea ce este absurd (imposibil). Deci nu există un astfel de număr; d) 2, 7, respectiv 9. 6. a) 3; b) 1; c) 0,75; d) 470; e) 31,21; f) 1. 7. a) 11101₍₂₎; 11111₍₂₎; 10000111₍₂₎; b) 13₍₁₀₎; 23₍₁₀₎; 93₍₁₀₎; 229₍₁₀₎. 8. (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0). 9. 71 și 23. 10. 10 și 8,4. 11. 15 apartamente cu 2 camere și 5 apartamente cu 3 camere. 12. 500. 13. 8 ore. 14. 37,50 lei, respectiv 7,5 lei. 15. a) 12; b) 6; c) 10. 16. 24 m. 17. 480 cm³. 18. a) 143080; 143070; b) 143100; 143000; c) 150000; 140000. 19. a) 814500; b) 815000; 810000. 20. a) 41°41'; b) 50°7'; c) 105°55'; d) 12°9'; e) 61°17'; f) 49°45'; g) 78°59'; h) 13°18'; i) 69°9'. 21. a) 7 și 23; 11 și 19; 13 și 17; b) 43 și 23; 37 și 17; 31 și 11; 23 și 3; c) $a = 2$, $b = 3$. 22. a) 450; b) 180. 23. a) MMXXIV, MCMXVII, MMCXXXVII; b) 124; 1249; 1750. 24. a) 5; b) 5. 25. a) 4%; 8%; 16%; 24%; 20%; 16%; 12%; b) 7,44;

c)



26. a) 110°; b) 123°23'. 27. a) 6; b) 100; c) 4; d) 100. 28. a) Nu este posibil, deoarece suma de $315 - (5 \cdot 10) = 265$ ar trebui să fie în bancnote de 10 lei, ceea ce este imposibil; b) 27 și 33,(3)%. 29. a) 108°; b) $\angle YOM = 72^\circ$ și $\angle XOY + \angle YOM = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$, deci X , O și M sunt puncte coliniare; c) $\angle XOM = \angle XOY - \angle YOM = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ = \angle MOY$. 30. a) $\angle COD = \angle AOB - (\angle AOC + \angle BOD) = 90^\circ - (20^\circ 15' + 29^\circ 45') = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$; b) $\angle DOM = 15^\circ 15'$ și $\angle COM = 24^\circ 45'$; c) $\angle AON = 40^\circ 15'$ și $\angle BON = 49^\circ 45'$. 31. a) 120 dm³; b) 4 dm; c) 5,2 dm.

2. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1. I. 1. 115. 2. 57. 3. 20 de lei. 4. 70 m. II. 1. B. 2. B. 3. C. 4. C. III. 1. → e); 2. → d); 3. → a); 4. → b). IV. 1. Din $a = b \cdot 2 + 7$, rezultă că $a - 2b = 7 \mid \cdot 4 \Rightarrow 4a - 8b = 28 \mid -1 \Rightarrow 4a - 8b - 1 = 27 = 3^3$, adică $4a - 8b - 1$ este cubul numărului natural 3. 2. 10. 3. 710 și 765.

TESTUL 2. I. 1. 43600. 2. 1964. 3. 306. 4. 23. II. 1. C. 2. B. 3. C. 4. B. III. 1. → c); 2. → a); 3. → b); 4. → e). IV. 1. a) $\frac{6}{5}$;

$\frac{17}{3}$; $\frac{37}{30}$; b) 15; c) 16,97. 2. a) Nu este posibil. Dacă numărul apartamentelor cu 3 camere ar fi egal cu numărul apartamentelor cu 2 camere, atunci am avea 150 de camere, ceea ce este în contradicție cu enunțul problemei; b) 25 de apartamente cu 2 camere și 35 de apartamente cu 3 camere.

TESTUL 3. I. 1. 3. 2. 17000 m². 3. $d = 2^{10}$. 4. 3800 g. II. 1. B. 2. D. 3. A. 4. D. III. 1. $\rightarrow$ d); 2. $\rightarrow$ b); 3. $\rightarrow$ a); 4. $\rightarrow$ c).

IV. 1. a) 150; b) 2700; c) 3210 păsări. 2. a) 7 cm; b) $(p - n)$ cm; c) $\frac{p+n}{2}$ cm.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL: MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Unitatea: MULȚIMI

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime.

Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice

1. a) $M = \{b, i, l, o, t, e, c, \tilde{a}\}$; b) $N = \{c, i, n, e, m, a, t, \tilde{a}\}$; c) $P = \{a, c, t, u, l, i, \tilde{a}, \tilde{f}\}$. 2. a) $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $D = \{0, 2, 3, 4, 5\}$. 3. a) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $N = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. 4. a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. 5. Sunt false a), b), c), restul sunt adevărate. 6. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 6\}$; b) $B = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$; $C = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$; $D = \{3^x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 5\}$. 7. a) A; b) A; c) A; d) F; e) A; f) A. 8. Sunt false a), d), e) și restul sunt adevărate. 9. $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$, $D = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. 10. $B = \{2^0 + 0, 2^1 + 1, 2^3 + 3\} = \{1, 3, 11\}$ și card $B = 3$. 11. a) A; b) A; c) A; d) A. 12. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$. 13. card $A = 2025$, card $B = 1957$, card $C = 7$, card $D = 4$, card $E = 9$, card $F = 2024$. 14. $A = \{0, 3\}$, $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$, $C = \{3\}$, $D = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. 15. $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$, $D = \{21, 23, 25, 27, 29\}$, $E = \emptyset$, $F = \{4\}$. 16. a) $8^x + 8^{x+1} = 8^x(1 + 8) = 8^x \cdot 9 = 8^x \cdot 3^2$ este pătrat perfect, dacă x este număr par, adică $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$; b) $24^x + 24^{x+1} = 24^x(1 + 24) = 24^x \cdot 25 = 24^x \cdot 5^2$ este pătrat perfect dacă x este număr par, adică $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2p, p \in \mathbb{N}\}$. 17. $A = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, $C = \{7, 8, 9, 10, 11\}$. Se observă că $A = B = C$. 18. $A = \{225, 256, 289\}$, $B = \{100, 121, 144, 169, 196\}$; $C = \{1\}$; $D = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71\}$. 19. $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4\}$. 20. Din a) $9 \in A$ și din b) rezultă că $5 \cdot 9 + 1 \in A$, adică $46 \in A$. Din $46 \in A$ și din $46 = 7 \cdot 6 + 4$ rezultă că $6 \in A$.

2. Relații între mulțimi. Submulțimi

1. a) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$; b) $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}$; c) $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$. 3. $\{1, 3\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 3, 5\}; \{1, 3, 7\}; \{1, 2, 3, 5\}; \{1, 2, 3, 7\}; \{1, 3, 5, 7\}$. 4. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x = 7\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3 \text{ și } x > 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 0\}$. 5. a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$. 6. $A = B = C$. 7. a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) A. 8. a) card $M = 9$; b) $M_1 = \{11, 21, 31, 41\}$, $M_2 = \{31, 51, 71, 81\}$, $M_3 = \{41, 61, 71, 91\}$; c) $M_1 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81\}$, $M_2 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 91\}$, $M_3 = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 81, 91\}$, $M_4 = \{11, 21, 31, 41, 51, 71, 81, 91\}$, $M_5 = \{11, 21, 31, 41, 61, 71, 81, 91\}$, $M_6 = \{11, 21, 31, 51, 61, 71, 81, 91\}$, $M_7 = \{11, 21, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$, $M_8 = \{11, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$, $M_9 = \{21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$. 9. a) $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{7\}, \{0, 1\}, \{0, 7\}, \{1, 7\}, \{0, 1, 7\}$; b) $X = \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{7\}, \{0, 1\}, \{0, 7\}, \{1, 7\}, \{0, 1, 7\}$; c) card $X = 8$. 10. a) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{0, 2, 4, 8\}$ (puteți scrie oricare trei submulțimi); c) $A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 15\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 15, 23\}$; d) $\{0, 2, 4, 6\}; \{0, 2, 4, 8\}; \{0, 2, 6, 8\}; \{0, 4, 6, 8\}; \{2, 4, 6, 8\}$. 11. a) $x \in \{2, 4\}$; b) $x \in \{1, 5\}$; c) $x \in \{6, 7\}$. 12. a) „ $\subseteq$ ”; b) „ $\subset$ ”; c) „ $=$ ”. 13. $x = 7$. 14. a) $A \supset B$; b) $C \subset A$; c) $B \subset D$; d) $B = E$; e) $C \subset D$; f) $E \subset A$. 15. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; a) A; b) A; c) F; d) A; e) A; f) A; g) F; h) F. 16. a) Adevărate 1) și 3). Falsă 2); b) card $A = \text{card } B = \text{card } C = 4$. 17. $4 \leq x^2 < 70 \Rightarrow 2^2 \leq x^2 \leq 8^2 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8 \Rightarrow \text{card } A = 7$; $5 < x^3 \leq 125 \Rightarrow 2^3 \leq x^3 \leq 5^3 \Rightarrow \text{card } B = 4$. 18. a) $a > 11$; b) $a \in \{8\}$; c) $a \in \{5, 6, 7\}$; d) $a \in \{2, 3, 4\}$. 19. Adevărate: $A = B$, $B \neq C$, restul sunt false. 20. 1012. 21. card $M = 34$ și $M = \{1\} \cup \{52\} \cup \{4, 100\} \cup \{7, 97\} \cup \dots \cup \{49, 55\}$, reuniune de 18 submulțimi disjuncte două câte două. Alegând 19 elemente, evident avem două elemente din aceeași submulțime, deci $(a + b) : 52$.

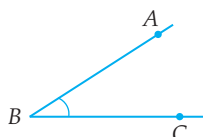
GEOMETRIE

CAPITOLUL: NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

Unitatea: UNGHIUL

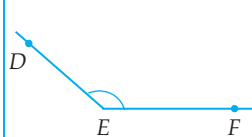
1. Recapitulare și completări

1. a)



$$\angle ABC < 90^\circ$$

b)



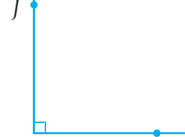
$$\angle DEF > 90^\circ$$

c)



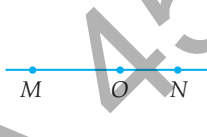
$$\angle GHI = 0^\circ$$

d)



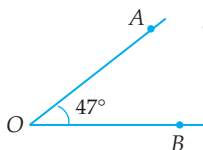
$$\angle JKL = 90^\circ$$

e)

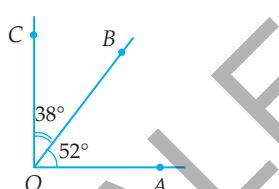


$$\angle MON = 180^\circ$$

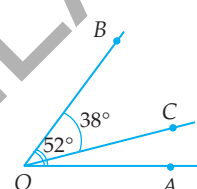
2.



a) vârful; b) OA și OB; c) $2820'$. 3.



$$\begin{aligned}\angle AOC &= \angle AOB + \angle BOC \\ \angle AOC &= 52^\circ + 38^\circ = 90^\circ\end{aligned}$$



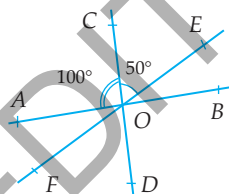
$$\begin{aligned}\angle AOC &= \angle AOB - \angle BOC \\ \angle AOC &= 52^\circ - 38^\circ = 14^\circ\end{aligned}$$

4. b) $\angle OAB = \angle OBA = 60^\circ$; c) $AM = 3 \text{ cm} = AB : 2$. 5. b) $\angle BAC \equiv \angle DCA$; c) $\angle DAC \equiv \angle CBA$. 6. Nule: $\angle H$; alungite: $\angle F$; ascuțite: $\angle A, \angle C$; drepte: $\angle E, \angle G$; obtuze: $\angle B, \angle D$. 7. a) ascuțit; b) obtuz. 8. a) $\angle EOM = 60^\circ$; b) $\angle EOM = 140^\circ$. 9. b) $\angle AOC = 120^\circ$. 10. $\angle AOC = 60^\circ$. 11. $\angle AOC = 30^\circ$, dacă OC este interioară $\angle AOB$ și $\angle AOC = 180^\circ$, dacă OB este interioară $\angle AOC$. 12. b) $\angle AMC$ este unghi obtuz; d) $\angle EMC = 30^\circ$ sau $\angle EMC = 150^\circ$. 13. c) $\angle BOC = 20\% \cdot \angle AOB = 20\% \cdot 150^\circ = 30^\circ$ și $\angle AOC = 180^\circ$, adică OA și OC sunt semidrepte opuse și punctele A, O, C sunt coliniare. 14. $\angle BAO = 45^\circ$. 15. b) 180° . 16. a) $420'$; b) $1020'$; c) $323'$; d) $1185'$. 17. a) $11^\circ 40'$; b) 25° ; c) $54^\circ 35'$; d) $90^\circ 6'$. 18. a) 155° ; b) 113° ; c) 161° ; d) 45° ; e) 71° ; f) $109^\circ 27'$; g) $26^\circ 7'$; h) $29^\circ 27'$; i) $55^\circ 53'$; j) $77^\circ 22'$; k) $67^\circ 23'$; l) $75^\circ 48'$. 19. a) $9^\circ 12'$; b) $15^\circ 24'$; c) $30^\circ 30'$; d) $47^\circ 15'$. 20. a) $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE$; b) $\angle AOC, \angle COE, \angle BOD$; c) $\angle AOD, \angle BOE$. 21. a) 35° ; b) 71° ; c) 75° ; d) 73° . 22. a) 9° ; b) $\angle AOC = 27^\circ, \angle BOD = 45^\circ, \angle AOD = 54^\circ$. 23. a) 41° și 123° ; b) 82° .

2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf

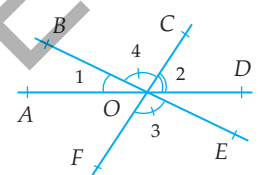
1. a) Se desenează dreptele concurente MN și PQ, măsurând cu raportorul, $\angle MOP = 60^\circ$; b) $\angle MOQ = 120^\circ, \angle NOQ = 60^\circ, \angle PON = 120^\circ$; c) $\angle MOP$ și $\angle NOQ$, respectiv $\angle MOQ$ și $\angle NOP$. 2. nu sunt opuse la vârf; nu au. 3. $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$. 4. a) semidrepte opuse; b) nu sunt; c) nu sunt opuse; au; semidrepte opuse. 5. $\angle 1$ cu $\angle 3$; $\angle 2$ cu $\angle 4$; $\angle 6$ cu $\angle 8$; $\angle 5$ cu $\angle 7$; $\angle 9$ cu $\angle 11$ și $\angle 10$ cu $\angle 12$.

6. a)



b) $\angle AOC$ cu $\angle BOD$, $\angle AOE$ cu $\angle BOF$, $\angle AOF$ cu $\angle BOE$, $\angle AOD$ cu $\angle BOC$, $\angle COE$ cu $\angle DOF$, $\angle COF$ cu $\angle DOE$; c) $\angle BOC = 80^\circ, \angle BOE = 30^\circ, \angle BOD = 100^\circ, \angle DOF = 50^\circ, \angle FOA = 30^\circ, \angle DOA = 80^\circ$.

7.



a) $\angle AOB$ cu $\angle DOE$, $\angle AOC$ cu $\angle DOF$, $\angle BOC$ cu $\angle EOF$, $\angle BOD$ cu $\angle EOA$, $\angle COD$ cu $\angle FOA$, $\angle COE$ cu $\angle FOB$; b) $\angle 3 \equiv \angle 4$ (unghiuri opuse la vârf). Cum $\angle 1 + \angle 4 + \angle 2 = 180^\circ$ (formează un unghi alungit), rezultă că $\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

8. a) $\angle BOD = \angle AOC = 50^\circ$; $\angle BOC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ = \angle AOD$; b) $\angle COB + \angle BOD = 5x^\circ + x^\circ = 6x^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$ și $\angle AOC = \angle BOD = 30^\circ, \angle BOC = \angle AOD = 150^\circ$. 9. $\angle AOC = \angle BOD, \angle COE = \angle DOF, \angle BOE = \angle AOF$.

TESTUL 3. I. 1. F. 2. A. 3. A. 4. A. II. 1. B. 2. B. 3. D. 4. D. III. 1. $\rightarrow$ d); 2. $\rightarrow$ e); 3. $\rightarrow$ c); 4. $\rightarrow$ a) sau 1. $\rightarrow$ d); 2. $\rightarrow$ a); 3. $\rightarrow$ c); 4. $\rightarrow$ e). IV. 1. a) Din $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ concentrice, rezultă că O_1 și O_2 coincid și $O_1O_2 = 0$, adică $x - 2 = 0$ și $x = 2$; b) Din $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ secante, rezultă că $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, adică $1 < x - 2 < 5$ și $3 < x < 7$, respectiv x poate fi 4 sau 5 sau 6; c) Din $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ tangente interior rezultă că $O_1O_2 = r_1 - r_2$, adică $x - 2 = 1$ și $x = 3$; d) Din $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ tangente exterior rezultă că $O_1O_2 = r_1 + r_2 = 5$, adică $x - 2 = 5$ și $x = 7$. 2. a) Din $\angle BOC = 30^\circ$ rezultă $\widehat{BC} = \angle BOC = 30^\circ$ (1). Din AB diametru și (1) rezultă că $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{BC} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$; b) Din $DO \perp CO$ rezultă că $\angle COD = 90^\circ$ și cum $\widehat{CD} = \angle COD$, rezultă că $\widehat{CD} = 90^\circ$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\widehat{DCB} = \widehat{DC} + \widehat{BC} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$; c) din b) rezultă că $\widehat{DAB} = 360^\circ - \widehat{DCB} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$; d) Din AB diametru și $\widehat{BC} = 30^\circ$ rezultă că $\widehat{ABC} = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1

1. $A = \{1, 2, 7, 14\}$. 2. $\mathcal{D}_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. 3. 12 ℓ suc. 4. $a = 24$, $b = 36$, $(a, b) = 12$, $[a, b] = 72$ și $24 \cdot 36 = 12 \cdot 72$. 5. $\angle BOD = 70^\circ$. 6. 144° . 7. Din $x + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$. 8. $(a, b) \in \{(15, 210); (210, 15); (30, 105); (105, 30)\}$. 9. 72° și 108° . 10. $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{b\}$, $A \setminus B = \{a, c\}$. 11. a) 120° ; b) 156° ; c) 96° .

TESTUL 2

1. $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{a\}$, $A_3 = \{b\}$, $A_4 = \{c\}$, $A_5 = \{a, b\}$, $A_6 = \{b, c\}$, $A_7 = \{a, c\}$, $A_8 = A = \{a, b, c\}$. 2. 14, 21, 28. 3. 24 și 36. 4. 62° . 5. 180° . 6. 40° . 7. 300 lei. 8. 7. 9. 8 drepte. 10. a) 2,5 km; b) 20 cm. 11. b) $\angle AOB = 180^\circ$. Din OM – bisectoarea lui $\angle AOC \Rightarrow \angle AOM \equiv \angle COM$ și din ON – bisectoarea lui $\angle BOC \Rightarrow \angle BON \equiv \angle CON$. Dar $\angle MON = \angle MOC + \angle CON = \frac{\angle AOC}{2} + \frac{\angle BOC}{2} = \frac{\angle AOC + \angle BOC}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; c) Se calculează $\angle AOM + \angle BON = 180^\circ - \angle MON = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, adică $\angle AOM$ și $\angle BON$ sunt complementare.

TESTUL 3

1. $M = \{3, 15\}$. 2. 0, 18, 36, 54, 72, 90. 3. 202, 404, 606, 808. 4. 34 și 119. 5. $42^\circ 36'$. 6. 50° . 7. 5 cm. 8. $\frac{9}{10} = 0,9$. 9. 3,5 cm. 10. a) 32 elevi; b) 2 elevi; c) 17 elevi. 11. a) 54° ; b) 63° .

TESTUL 4

1. $A = \{5, 15, 45\}$. 2. 28. 3. 16. 4. 600. 5. $\angle AOB = 180^\circ$. 6. 45° . 7. 32 ore. 8. $(a, b) = 6 \Rightarrow a = 6x$, $b = 6y$ cu $(x, y) = 1$. Cum $a + b = 30 \Rightarrow 6x + 6y = 30 \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow (a, b) \in \{(6, 24); (24, 6); (12, 18); (18, 12)\}$. 9. $AM = 5$ cm, $AB = 15$ cm. 10. a) Din $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B) \Rightarrow \text{card}(A \cap B) = 2$; b) Din $\text{card}(A \setminus B) = \text{card } A - \text{card}(A \cap B) \Rightarrow \text{card}(A \cap B) = 6$; c) B. 11. a) $80^\circ, 120^\circ, 160^\circ$; c) $\angle DOC = 60^\circ$.

TESTUL 5

1. $x = \{2, 5, 8\}$. 2. $A = \{6, 16\}$. 3. 108 rotații. 4. 150 g. 5. $52^\circ 25'$. 6. 135° . 7. 36 m. 8. 3,1 km. 9. Apar două cazuri și se obține $\angle AOC = 75^\circ + 27^\circ = 102^\circ$ sau $\angle AOC = 75^\circ - 27^\circ = 48^\circ$. 10. a) $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$; b) 80%; c) $a = 80$, $b = 160$, $c = 120$. 11. a) $\angle 4$ cu $\angle 6$ sau $\angle 3$ cu $\angle 5$; b) $\angle 5$ cu $\angle 9$ sau $\angle 12$ cu $\angle 8$ sau $\angle 10$ cu $\angle 6$ sau $\angle 11$ cu $\angle 7$; c) $\angle 1$ cu $\angle 12$ sau $\angle 2$ cu $\angle 11$.

TESTUL 6

1. $x = \{1, 3, 7, 9\}$. 2. 6. 3. 2 muncitori. 4. 4300. 5. 90° . 6. 4 cm. 7. 18° . 8. $x = 29$. 10. a) $A = \{1, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \setminus B = \{5\}$. 11. b) 82° ; c) $\angle AOD = 16^\circ$.

TESTUL 7

1. $A = \{1, 2, 3\}$. 2. $[112, 252] = 1008$. 3. $\frac{3}{25} = 0,12$ sau 12%. 4. 90 și 60. 5. 45° . 6. $x = 4$. 7. 90° . 8. 20 km. 9. $AB = 8$ cm și $MN = 2$ cm. 10. a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2\}$; b) $B \subset A$. 11. a) 106° și 74° ; b) 44° și 136° .

TESTUL 8

1. $B = \{1, 3, 6\}$. 2. $\frac{5}{7}$. 3. 740. 4. 0° . 5. 100° . 6. 8 divizori. 7. $AA' = 5$ cm. 8. 60° . 9. 70° . 10. a) $960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$ și $64 = 2^6$; b) $(960, 64) = 2^6$. 11. b) 180° ; c) Fie a și b mediatoarele segmentelor AO , respectiv CO . Rezultă $a \perp AO$ și $b \perp CO$. Dar A, O, C sunt coliniare și cum $a \perp AC$, $b \perp AC$, rezultă $a \parallel b$ (unghiuri corespondente congruente).

Cuprins

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚIALĂ	5
1. Exerciții și probleme recapitulative	5
2. Recapitulare și sistematizare prin teste	8
Test de autoevaluare	11
ALGEBRĂ	
Capitolul: MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE	13
Unitatea: MULȚIMI	15
1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime. Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice	15
2. Relații între mulțimi. Submulțimi	18
3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite	20
4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență	22
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	28
Test de autoevaluare	31
Unitatea: DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE	33
1. Divizibilitatea numerelor naturale. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	33
2. Determinarea celui mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale. Numere prime între ele	39
3. Determinarea celui mai mic multiplu comun a două sau mai multor numere naturale	42
4. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale	45
5. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea	49
6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	52
7. Recapitulare și sistematizare prin teste	53
Test de autoevaluare	57
Capitolul: RAPOARTE ȘI PROPORȚII	59
Unitatea: RAPOARTE ȘI PROPORȚII	61
1. Rapoarte	61
2. Procente	67
3. Proporții	71
4. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	77
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	79
Test de autoevaluare	83
Unitatea: PROPORȚIONALITATE ȘI ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR	85
1. Mărimi direct proporționale	85
2. Mărimi invers proporționale	89
3. Regula de trei simplă	93
4. Elemente de organizare a datelor	96
5. Probabilități (Aplicație la rapoarte)	106
6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	110
7. Recapitulare și sistematizare prin teste	111
Test de autoevaluare	115

GEOMETRIE

Capitolul: NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE	117
Unitatea: UNGHIUL	119
1. Recapitulare și completări	119
2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf	123
3. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct	126
4. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare	129
5. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	132
6. Recapitulare și sistematizare prin teste	136
<i>Test de autoevaluare</i>	139
Unitatea: PARALELISM	141
1. Drepte paralele: definiție, notație, construcție intuitivă prin translație. Axioma paralelelor	141
2. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă	144
3. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	150
4. Recapitulare și sistematizare prin teste	154
<i>Test de autoevaluare</i>	157
Unitatea: PERPENDICULARITATE	159
1. Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție). Oblice	159
2. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	163
3. Distanța de la un punct la o dreaptă	164
4. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă	167
5. Recapitulare și sistematizare prin teste	172
<i>Test de autoevaluare</i>	175
Unitatea: CERCUL	177
1. Cerc. Elemente în cerc: centru, coardă, diametru, arc de cerc	177
2. Unghi la centru. Măsuri	180
3. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	182
4. Recapitulare și sistematizare prin teste	185
<i>Test de autoevaluare</i>	189
AUTOEVALUARE ALGEBRĂ	191
AUTOEVALUARE GEOMETRIE	192
TESTE RECAPITULATIVE	193
PROBLEME DATE LA CONCURSURI ȘCOLARE	205
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	207