

EDITURA PARALELA 45

Colecția **SUBIECTE POSIBILE**

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.*

*Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Amalia Mărășescu, Bianca Vișan  
Tehnoredactare: Maria Benza  
Pregătire de tipar & design copertă: Marius Badea

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**Bacalaureat 2019 : matematică - M\_științele naturii, M\_tehnologic :  
teme recapitulative - 40 de teste, după modelul M.E.N. (10 teste fără  
soluții) / Mihai Monea, Ioan Șerdean, Steluța Monea, Adrian Zanoschi. -  
Pitești : Paralela 45, 2018  
Conține bibliografie  
ISBN 978-973-47-2793-3**

I. Monea, Mihai  
II. Șerdean, Ioan  
III. Monea, Steluța  
IV. Zanoschi, Adrian

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2018

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Mihai Monea  
Steluța Monea

Ioan Șerdean  
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2019

Matematică

*M\_șt-nat*

*M\_tehnologic*

Teme recapitulative  
40 de teste, după modelul M.E.N.  
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

## Cuvânt-înainte

Examenul de Bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală și personală, având menirea de a certifica pregătirea științifică și competențele dobândite în liceu, dar și de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecință, performanța la acest examen, și îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conținuturilor, cât și pentru fixare, sistematizare, recapitulare.

Cartea se adresează celor care pregătesc bacalaureatul la matematică, de tip *M<sub>șt-nat</sub>* și *M<sub>tehnologic</sub>*. Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei și ale probelor de examen.

Trebuie menționat că această carte este adaptată la forma de organizare a probei de matematică din cadrul examenului menționat. Elevii profilului științe ale naturii și cei ai profilului tehnologic au o programă de examen asemănătoare pentru clasele a XI-a – a XII-a, dar cu diferențe importante de conținut pentru clasele a IX-a – a X-a. De aceea, am evidențiat problemele și testele specifice doar elevilor de la profilul științe ale naturii. Astfel, acestea sunt marcate cu semnul „\*”.

Cartea are un pronunțat caracter metodic, fiecare paragraf având trei componente: una de inițiere, una de consolidare și una de evaluare. Primele patru capitole sunt rezervate antrenamentului specific pentru examen. Problemele sunt grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată în variantele examenelor din anii precedenți, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Așadar, un elev își poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete și găsește în carte un număr suficient de exerciții cu ajutorul cărora să-și atingă scopul. Problemele din partea de inițiere sunt însoțite doar de răspunsuri. Problemele din partea de consolidare sunt însoțite de indicații și răspunsuri, dar și de soluții detaliate acolo unde acest lucru se impune. Problemele din partea de evaluare nu au răspunsuri.

Capitolul al cincilea este rezervat testelor. Acestea au o structură specifică examenului de Bacalaureat. Testele sunt dispuse pe două categorii. Prima categorie este formată dintr-un set de 30 de teste propuse, după modelul subiectelor date la examenul de bacalaureat din ultimii ani și însoțite de rezolvări complete. Testele din a doua categorie sunt pentru autotestare și nu sunt însoțite de rezolvări.

Lucrarea poate fi folosită și pentru învățarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiții reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor și elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârșitul anului școlar.

*Autorii*

# Clasa a X-a

## 1. Numere reale

### 1.1. Noțiuni teoretice

#### 1.1.1. Radicali

**Definiție:** Numim **radical** de ordin  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , din numărul pozitiv  $a$  și notăm  $\sqrt[n]{a}$  ca fiind acel număr pozitiv  $x$  unic cu proprietatea  $x^n = a$ .

**Observație:** Dacă  $x \in \mathbb{N}$ , atunci, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , dacă  $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$ , atunci  $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Proprietățile radicalului:** Următoarele relații sunt adevărate pentru orice  $a, b \geq 0$  și  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n \geq 2$ .

**P1.**  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ;

**P2.**  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ,  $b \neq 0$ ;

**P3.**  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^p}$ ;

**P4.**  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ .

**Observație:** Dacă  $n$  este impar, putem calcula  $\sqrt[n]{x}$ , și dacă  $x < 0$ , în aceste condiții  $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ .

**Observație:** Avem  $(\sqrt[n]{x})^n = x$ , dar  $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$ .

#### 1.1.2. Puteri cu exponent real

**Observație:** Noțiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*; x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*; x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, x \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

**Proprietățile ridicării la putere:** Pentru orice  $x, y > 0$  și orice  $p, r \in \mathbb{R}$ , au loc relațiile:

**P1.**  $x^p x^q = x^{p+q}$ ;

**P2.**  $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ ;

**P3.**  $(x^p)^q = x^{pq}$ ;

**P4.**  $(xy)^p = x^p y^p$ .

### 1.1.3. Logaritmi

**Definiție.** Fie  $a, b > 0, a \neq 1$ . Soluția (unică) a ecuației  $a^x = b$  se numește **logaritm în baza  $a$  din  $b$**  și se notează cu  $\log_a b$ .

**Proprietățile logaritmului:** Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice  $a, b, x, y > 0, a, b \neq 1$ :

**P1.**  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;

**P2.**  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;

**P3.**  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \alpha \in \mathbb{R}$ ;

**P4.**  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

**Observație:** Dacă  $a, b \in \mathbb{N}$  sunt numere prime diferite, atunci  $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### 1.2. Probleme de inițiere

**I1.** Calculați  $(-1)^5 + (-2)^4 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5)$ .

**I2.** Calculați  $(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{100}$ .

**I3.** Calculați  $8^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ .

**I4.** Calculați  $\sqrt[3]{125} + \sqrt{16} + \sqrt[3]{-27}$ .

**I5.** Calculați  $\log_{11} 11 + \log_7 \frac{1}{7}$ .

**I6.** Calculați  $\log_3 81 + \log_5 25 - \lg 100000$ .

**I7.** Ordonăți crescător numerele  $a = -\sqrt[3]{27}, b = \log_2 \frac{1}{16}, c = -2$ .

**I8.** Demonstrați că  $\log_4 64 + \sqrt[3]{1000} = \sqrt{16} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

**I9.** Demonstrați că  $\log_{11} 121 < \sqrt[3]{27}$ .

**I10.** Dacă  $\log_2 3 = a$ , demonstrați că  $\log_2 6 = 1 + a$ .

### 1.3. Probleme de consolidare

**C1.** Calculați  $\sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$ .

**C2.** Arătați că  $2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$ .

**C3.** Demonstrați că  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}$ .

**C4.** Demonstrați egalitatea  $\sqrt[3]{\sqrt{729}} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} = 1$ .

**C5.** Dacă  $\lg 3 = a$ , demonstrați că  $\lg 90 = 2a + 1$ .

- C6.** Demonstrați că  $\log_2 12 + \log_2 14 - \log_2 21 = 3$ .
- C7.** Arătați că numărul  $a = \log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$  este natural.
- C8.** Demonstrați că  $\lg \frac{2}{1} + \lg \frac{3}{2} + \dots + \lg \frac{10}{9} \in \mathbb{N}$ .
- C9.** Demonstrați că  $1331^{\frac{2}{3}} \in \mathbb{N}$ .
- C10.** Comparați numerele  $a = 2^{33}$  și  $b = 3^{22}$ .
- C11.** Comparați numerele  $3\sqrt{2008}$  și  $2008\sqrt{3}$ .
- C12.** Calculați  $b - a$ , unde  $a = \log_2 3$  și  $b = \log_2 6$ .
- C13.** Calculați  $\lg 12 + \lg 15 - \lg 18$ .
- C14.** Demonstrați că  $\log_4 9 = \log_8 27$ .
- C15.** Demonstrați că  $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = 3$ .
- C16.** Demonstrați că numărul  $a = \log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$  este rațional.
- C17.** Demonstrați că numărul  $\log_2(5 + \sqrt{7}) + \log_2(5 - \sqrt{7}) - 2\log_2 3$  este întreg.
- C18.** Demonstrați că  $\log_{2\sqrt{2}} 3\sqrt{3} = \log_2 3$ .
- C19.** Comparați numerele  $\log_5 2007$  și  $4$ .
- C20.** Fie  $E(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$ , unde  $x \in (0,1) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ . Arătați că:  

$$E(x) = \frac{2\sqrt{1-x}}{2x-1}.$$
- C21\*.** Se consideră numerele  $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$  și  $b = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ . Arătați că  $\frac{b}{a} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .
- C22\*.** Determinați  $a, b \in \mathbb{Q}$ , știind că  $(1 + \sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$ .
- C23\*.** Arătați că  $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$ .
- C24\*.** Demonstrați că  $\sqrt{3} + \sqrt{9} < \sqrt{5} + \sqrt{7}$ .
- C25\*.** Demonstrați că  $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ .
- C26\*.** Demonstrați că  $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$ .
- C27\*.** Demonstrați că  $\log_3 5 \cdot \log_5 9 < \sqrt[3]{9}$ .
- C28\*.** Demonstrați că  $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27} > 0$ .
- C29\*.** Dacă  $\log_3 2 = a$ , demonstrați că  $\log_{12} 18 = \frac{a+2}{2a+1}$ .
- C30\*.** Demonstrați că  $\log_3 7 > \log_7 3$ .

**1.4. Teste de verificare****Testul 1**

1. Demonstrați că  $\sqrt{49} + \sqrt[3]{-1000} + (\sqrt{3})^2 = 0$ .
2. Demonstrați că numărul  $a = \frac{\sqrt{50} + \sqrt{18}}{\sqrt{32} - \sqrt{8}}$  este natural.
3. Demonstrați că  $\lg 20 + \lg 50 = 3$ .
4. Demonstrați că  $\log_3 5 + \log_3 7 < \log_3 72 - \log_3 2$ .
5. Ordonăți crescător numerele  $a = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ,  $b = \sqrt[3]{-125}$  și  $c = \lg \frac{1}{1000}$ .
6. Demonstrați că  $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$ .

**Testul 2\***

1. Demonstrați că  $\sqrt[3]{-216} + \sqrt{144} = \log_3 729$ .
2. Demonstrați că  $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8} = 0$ .
3. Demonstrați că numerele  $a = 10^{\lg 7}$  și  $b = \sqrt[3]{343}$  sunt egale.
4. Arătați că numărul  $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2 \log_{16} 5$  este rațional.
5. Demonstrați că  $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 = \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$ .
6. Demonstrați că  $\sqrt{10} + \sqrt{12} < 7$ .

**2. Funcții și ecuații****2.1. Noțiuni teoretice****2.1.1. Funcții bijective**

**Definiție:** Funcția  $f: A \rightarrow B$  se numește:

- **funcție injectivă**, dacă pentru orice  $u, v \in A$ , cu  $u \neq v$ , avem  $f(u) \neq f(v)$ ;
- **funcție surjectivă**, dacă pentru orice  $w \in B$  există  $u \in A$ , astfel încât  $f(u) = w$ ;
- **funcție bijectivă**, dacă este injectivă și surjectivă.



# Teste pentru Bacalaureat 2019, după modelul M.E.N.

## 1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat 2019

### Testul 1

#### Subiectul I

1. Demonstrați că numărul  $a = \lg 30 + \lg 2 - \lg 6$  este natural.
2. Demonstrați că ecuația  $(a^2 + 1)x^2 - 2x + 1 = 0$  nu admite rădăcini reale, oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}^*$ .
3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ .  
Calculați  $f\left(-\frac{1}{2}\right)f(-1)f(0)f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)$ .
4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea  $\{C_4^3, C_5^2, C_4^2\}$ , acesta să fie divizibil cu 3.
5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 4), B(6, 8)$  și  $C(8, 2)$ . Calculați distanța de la  $C$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
6. Calculați  $(\cos 120^\circ + \cos 60^\circ)(\sin 135^\circ - \sin 45^\circ)$ .

#### Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} x + 2y - az = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$$
, unde  $a$  este un parametru real.

Notăm cu  $A$  matricea sistemului.

- a) Demonstrați că tripletul  $(-1, 2, -5)$  este soluție a sistemului în cazul  $a = 0$ .
- b) Determinați determinantul matricei  $A$ .
- c) Dacă  $a \neq 0$ , demonstrați că soluțiile sistemului nu depind de  $a$ .

2. Se consideră mulțimea  $H = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$ .

- a) Demonstrați că mulțimea  $H$  este parte stabilă în raport cu adunarea din  $\mathbb{Z}_8$ .
- b) Determinați  $x \in H$  cu proprietatea că  $x^3 = \hat{0}$ .
- c) Calculați  $\hat{0}^{2012} + \hat{2}^{2012} + \hat{4}^{2012} + \hat{6}^{2012}$ .

### Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$ .

- a) Calculați  $f'(x)$ .
- b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- c) Demonstrați că  $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$ .

2. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

- a) Calculați  $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x} dx$ .
- b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ .
- c) Demonstrați că  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx \leq 0$ .

## Testul 2

### Subiectul I

1. Calculați  $C_6^3 - A_4^2 + 3$ .
2. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\log_3(x^2 - 16) = 2$ .
3. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  pentru care  $a_1 = 2$  și  $a_5 = 18$ . Calculați  $a_{2012}$ .
4. După două scumpiri succesive cu 10% și apoi cu 20%, prețul final al unui produs este 1 320 de lei. Determinați prețul inițial.

## Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i> .....	4
-----------------------------	---

Enunțuri    Soluții

### TEME RECAPITULATIVE

#### Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică .....	5	214
2. Șiruri. Progresii .....	10	215
3. Funcții .....	15	216
4. Funcția de gradul I .....	21	217
5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea .....	25	217
6. Vectori în plan .....	30	218
7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie .....	35	219

#### Clasa a X-a

1. Numere reale .....	41	221
2. Funcții și ecuații .....	44	222
3. Probleme de numărare și combinatorică .....	52	223
4. Matematici aplicate. Probabilități .....	55	223
5. Geometrie analitică .....	60	224
6. Numere complexe* .....	65	225

#### Clasa a XI-a

1. Matrice .....	69	226
2. Determinanți .....	76	227
3. Aplicații ale determinanților în geometrie .....	81	227
4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale .....	84	228
5. Sisteme de ecuații liniare .....	89	229
6. Probleme de sinteză – algebră .....	95	230
7. Limite de funcții. Asimptote .....	99	233
8. Funcții continue .....	104	233
9. Derivata unei funcții .....	109	234
10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor .....	116	235
11. Probleme de sinteză – analiză matematică .....	120	236

**Clasa a XII-a**

1. Legi de compoziție.....	123.....	238
2. Structuri algebrice. Morfisme .....	128.....	238
3. Polinoame .....	133.....	239
4. Probleme de sinteză – algebră.....	140.....	239
5. Primitive.....	143.....	241
6. Integrala definită .....	149.....	242
7. Aplicații ale integralei definite.....	153.....	243
8. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	158.....	244

**TESTE PENTRU BACALAUREAT 2019, DUPĂ MODELUL M.E.N.**

<b>1. MODELE DE TESTE REZOLVATE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT 2019.....</b>	<b>163.....</b>	<b>246</b>
<b>2. MODELE DE TESTE PROPUSE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT 2019.....</b>	<b>201</b>	
<i>Bibliografie</i> .....		269