Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Şcoală: ....

....

Colecţia MATE 2000 +
Iniţiere, ameliorare şi dezvoltare

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
TUDOR, ION
Matematică : algebră, geometrie : modalităţi de lucru diferenţiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : 7 / Ion Tudor. - Ed. a 3-a, reviz. şi adăug.. - Piteşti : Paralela 45, 2019
2 vol.
ISBN 978-973-47-2999-9
Partea 2. - 2019. - ISBN 978-973-47-3090-2

51

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediţia a III-a,
revizuită şi adăugită

ÎNVĂȚARE DE INIȚIERE ®
susținere, remediere

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

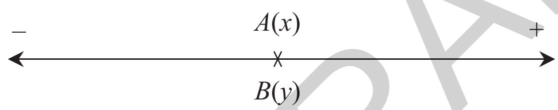
Capitolul II

ECUAȚII ŞI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Citesc şi reţin

Numerele reale x şi y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x, respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulţimea numerelor reale, relaţia de egalitate are următoarele proprietăţi:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci şi $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ şi $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalităţii acelaşi termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z;\ x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulţesc sau se împart ambii membri ai egalităţii cu acelaşi factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z;\ x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulţesc sau se împart membru cu membru două egalităţi, se obţine tot o egalitate.

Dacă $x = y$ şi $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ şi $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Cum se aplică?

1. Ştiind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătaţi că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluţie:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$$

2. Se consideră numerele reale a, b, c şi d, care îndeplinesc condiţiile $4a = 3b$ şi $25c = 10d$. Arătaţi că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluţie:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$.
Din $12a = 9b$ şi $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x + 3 = y + 3$; ☐ b) $x - 8 = y - 8$; ☐
c) $x - 1,(3) = y - 1,(3)$; ☐ d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$. ☐

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; ☐ b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$; ☐
c) $x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y$; ☐ d) $x : (-23) = y : (-23)$. ☐

3. Dacă x şi y sunt două numere reale care îndeplinesc condiţia $24x = 36y$, arătaţi că:

a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)

4. Dacă x şi y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătaţi că:

a) $x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

b)

5. Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $2z = 5t$. Arătaţi că:

a) $20z = 50t$; b) $\frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

b)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătaţi că:

a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c şi d sunt numere reale care îndeplinesc condiţiile $10a = 15b$ şi $35c = 28d$, arătaţi că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $\sqrt{3}a^3 = \sqrt{6}b$ şi $2\sqrt{3}a = \sqrt{6}b^3$. Arătaţi că $|a| = |b|$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

9. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condiţiile $a + b + c = 1$ şi $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătaţi că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

10. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $x \cdot y \cdot z = 1$ şi $\frac{x^2 + yz}{1 + x^3} + \frac{y^2 + zx}{1 + y^3} + \frac{z^2 + xy}{1 + z^3} = 0$. Arătaţi că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătaţi că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) **2.** Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătaţi că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) **3.** Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $4a = 5b$ şi $14c = 10d$. Arătaţi că $12a + 7c = 15b + 5d$.

GEOMETRIE

Capitolul III

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecţia 1. Segmente proporţionale. Teorema paralelelor echidistante

Citesc şi reţin

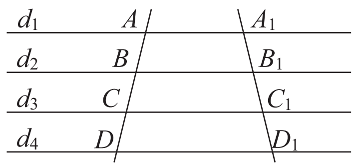
Definiţie: Raportul a două segmente este **raportul lungimilor** lor exprimate în aceleaşi unităţi de măsură.

Definiţie: Segmentele $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, …, $[A_nB_n]$ şi $[E_1F_1]$, $[E_2F_2]$, …, $[E_nF_n]$ se numesc **proporţionale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleaşi unităţi de măsură, formează şirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1}=\frac{A_2B_2}{E_2F_2}=\ldots=\frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.

$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$, $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \Rightarrow$
$\Rightarrow [A_1B_1] \equiv [B_1C_1] \equiv [C_1D_1]$.



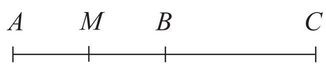
Cum se aplică?

1. Determinaţi raportul segmentelor $[AB]$ şi $[EF]$ cu lungimile de 4 cm, respectiv 140 mm.

Soluţie:

Exprimăm lungimea segmentului $[EF]$ în centimetri: $EF = 140\text{ mm} = 140 : 10\text{ cm} = 14\text{ cm}$, deci $\frac{AB}{EF}=\frac{4\text{ cm}}{14\text{ cm}}=\frac{2}{7}$.

2. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B şi C, în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv [BC]$ şi notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$. Arătaţi că segmentele $[AM]$, $[MB]$, $[AB]$ şi $[BC]$ sunt proporţionale.



Soluţie:

Notăm $AB = 2x$, deci $BC = 2x$, $AM = x$ şi $MB = x$;

$\frac{AM}{AB}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{MB}{BC}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$, prin urmare $\frac{AM}{AB}=\frac{MB}{BC}$.

3. Se consideră segmentul $[EF]$ şi punctul $D \in (EF)$, astfel încât $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$. Aflaţi rapoartele: $\frac{DF}{DE}$, $\frac{DE}{EF}$ şi $\frac{EF}{DF}$.

Soluţie:

Deoarece $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, rezultă că $\frac{DF}{DE} = \frac{5}{3}$. În continuare aplicăm proprietăţile proporţiilor derivate cu alţi termeni: $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE}{DE+DF} = \frac{3}{3+5}$, aşadar $\frac{DE}{EF} = \frac{3}{8}$; $\frac{DE}{DF} = \frac{3}{5}$, deci $\frac{DE+DF}{DF} = \frac{3+5}{5}$, aşadar $\frac{EF}{DF} = \frac{8}{5}$.

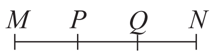
Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat segmentul $[EF]$ şi punctul M, mijlocul acestuia. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\frac{EM}{EF} = \frac{1}{2}$; ☐ b) $\frac{EM}{MF} = 1$; ☐ c) $\frac{EF}{EM} = 2$; ☐ d) $\frac{FM}{FE} = \frac{1}{3}$. ☐

2. În figura alăturată este reprezentat segmentul $[MN]$ şi punctele P şi Q interioare acestuia, astfel încât $[MP] \equiv [PQ] \equiv [QN]$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.



a) $\frac{MP}{MN} =$ .... ; b) $\frac{MQ}{MN} =$ .... ; c) $\frac{MQ}{PN} =$ .... ; d) $\frac{NQ}{NP} =$ ....

3. Determinaţi raportul segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ în următoarele cazuri:

a) $AB = 12$ cm şi $CD = 18$ cm; b) $AB = 36$ dm şi $CD = 24$ dm;
c) $AB = 32$ dm şi $CD = 40$ dm; d) $AB = 63$ cm şi $CD = 72$ cm.

c)

d)

4. În figura alăturată, pe dreapta d au fost construite punctele A, B, C, D şi E în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

a) $\frac{AB}{BE} =$ .... ; b) $\frac{AC}{BE} =$ .... ; c) $\frac{EA}{EB} =$ .... ; d) $\frac{DE}{DA} =$ ....

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE