

Nume:

Prenume:

Clasă:

Școală:

.....

Colecția **MATE 2000 +**
Inițiere, ameliorare și dezvoltare

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.C.I. nr. 5097/09.09.2009.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Daniel Mitran

Tehnoredactare: Adriana Vlădescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Ionuț Broșțianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

TUDOR, ION

Matematică : algebră, geometrie : caiet de lucru : clasa a VIII-a / Ion

Tudor. - Ed. a 2-a. - Pitești : Paralela 45, 2018

2 vol.

ISBN 978-973-47-2758-2

Partea 1. - 2018. - ISBN 978-973-47-2759-9

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

8

Ediția a II-a



Editura Paralela 45

GEOMETRIE

Capitolul I

PUNCTE, DREPTE, PLANE, CORPURI GEOMETRICE

Competențe specifice

- Recunoașterea și descrierea unor proprietăți ale unor figuri geometrice plane în configurații date în spațiu sau pe desfășurări ale acestora
- Folosirea instrumentelor geometrice adecvate pentru reprezentarea prin desen, în plan, a corpurilor geometrice
- Utilizarea proprietăților referitoare la drepte și unghiuri în spațiu pentru analiza pozițiilor relative ale acestora
- Exprimarea prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de drepte și unghiuri în plan și în spațiu
- Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării descrierii configurațiilor spațiale și în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente și de măsuri de unghiuri
- Interpretarea reprezentărilor geometrice și a unor informații deduse din acestea, în corelație cu determinarea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri

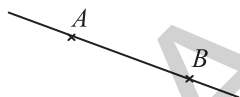
Lecția 1. Determinarea dreptei. Determinarea planului



Ce trebuie să știm

Determinarea dreptei

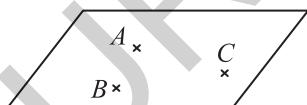
În plan și în spațiu două puncte distincte determină o dreaptă.



Dreapta determinată de punctele A și B se notează AB sau BA .

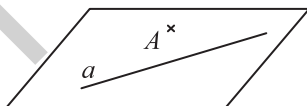
Determinarea planului

1. Trei puncte distincte și necoliniare determină un plan.



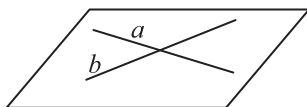
Planul determinat de punctele A , B și C se notează (ABC) .

2. O dreaptă și un punct exterior acesteia determină un plan.



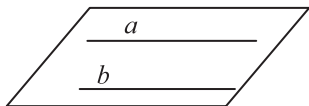
Planul determinat de dreapta a și punctul A se notează $(a; A)$.

3. Două drepte concurente determină un plan.



Planul determinat de dreptele a și b se notează $(a; b)$.

4. Două drepte paralele determină un plan.



Planul determinat de dreptele a și b se notează $(a; b)$.

Definiții:

1. Patru sau mai multe puncte se numesc **coplanare** dacă sunt incluse în același plan.

2. Patru sau mai multe puncte se numesc **necoplanare** dacă nu sunt toate incluse în același plan.

Definiție: O dreaptă d este **inclusă** într-un plan α dacă orice punct al dreptei d aparține planului α .

Teoremă: Dacă două puncte distincte ale unei drepte d aparțin unui plan α atunci dreapta d este inclusă în planul α .



Știm să răspundem?

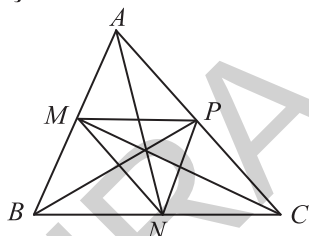
Propoziția „Prin faptul că trei puncte distincte și necoliniare determină un plan înțelegem că există un singur plan care conține punctele respective.” este



Înțelegere * Identificare (Să rezolvăm împreună)

1. Dacă punctele A, B și C sunt vârfurile unui triunghi, iar M, N și P sunt mijloacele laturilor acestuia, aflați numărul dreptelor determinate de cele șase puncte.

Soluție:

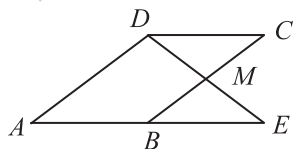


Cele 6 puncte determină 9 drepte: $AB, BC, CA, MN, NP, PM, AN, BP, CM$.

2. Fie T un punct nesituat în planul paralelogramului $ABCD$ în care notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$. Dacă notăm cu E simetricul punctului D față de punctul M , aflați numărul planelor determinate de punctele T, A, B și E .

Soluție:

T *



Deoarece $[BM] \equiv [CM]$ și $[DM] \equiv [EM]$ rezultă că $BECD$ este paralelogram, deci $BE \parallel DC$, dar $AB \parallel DC$, prin urmare, folosind axioma paralelei, rezultă că punctele A, B și E sunt coliniare și împreună cu punctul T determină un singur plan.



Fixare * Însușirea cunoștințelor

1. Se consideră triunghiul DEF și punctul $G \in (EF)$. Aflați numărul dreptelor determinate de punctele D, E, F și G .
2. Dacă punctele A, B, C și D sunt vârfurile unui patrulater convex, stabiliți numărul dreptelor determinate de aceste puncte.
3. În paralelogramul $ABCD$ notăm cu O mijlocul diagonalei $[AC]$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) dreptele BO și DO sunt distincte; b) dreptele BO și DO sunt identice.
4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care notăm cu M mijlocul laturii $[CD]$ și cu N simetricul punctului A față de M . Stabiliți numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C și N .
5. Într-un plan se consideră 5 puncte, oricare 3 dintre acestea fiind necoliniare. Stabiliți numărul dreptelor determinate de cele 5 puncte.
6. Punctele A, B, C și D sunt vârfurile unui dreptunghi, iar E și F sunt simetricile punctului A față de punctele B , respectiv D . Stabiliți numărul dreptelor determinate de cele 6 puncte.
7. În triunghiul ABC notăm cu E simetricul punctului B față de mijlocul laturii $[AC]$ și cu F simetricul punctului C față de mijlocul laturii $[AB]$. Stabiliți numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, E și F .
8. Citiți următoarele propoziții:
a) (DEF) ; b) $(g; h)$; c) $(f; g)$; d) $(M; a)$.
9. Arătați că vârfurile trapezului $MNPQ$ sunt patru puncte coplanare.
10. Stabiliți numărul planelor determinate de punctele distincte și necoplanare A, B, C și D .



Aplicare * Exersare

11. Fie E un punct nesituat în planul pătratului $ABCD$. Stabiliți numărul planelor determinate de punctele A, B, C, D și E .
12. Se consideră triunghiul DEF , punctul $M \in (DF)$ și punctul $N \notin (DEF)$. Scrieți planele determinate de punctele D, E, F, M și N .
13. Fie $ABCD$ un dreptunghi și punctul $M \notin (ABC)$. Dacă notăm cu E și F simetricile punctului A față de dreptele BC , respectiv CD , stabiliți numărul planelor determinate de punctele A, E, C, F și M .



Dezvoltare (Putem mai mult)

14. În planul α considerăm punctele distincte $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, n \geq 3$, oricare trei dintre ele fiind necoliniare, și punctul $T \notin \alpha$. Știind că numărul planelor diferite de α determinate de cele $n + 1$ puncte este egal cu $10^p, p \in \mathbb{N}^*$, aflați numărul natural n .

15. Pe un semidisc de carton de diametru $[AB]$ se consideră punctele C și D astfel încât $[AD] \cap [BC] = \{E\}$ și se construiește $EF \perp AB$, $F \in AB$. Dacă se îndoaie semidiscul de carton după dreapta EF , arătați că punctele A, B, C și D rămân coplanare.

Lecția 2. Tetraedrul și piramida



Ce trebuie să știm

Definiție: Corpul geometric determinat de patru puncte necoplanare se numește **tetraedru**.

Observație: Punctele A, B, C și D se numesc **vârfurile** tetraedrului.

Segmentele $[AB], [AC], [AD], [BC], [CD]$ și $[DB]$ se numesc **muchiile** tetraedrului.

Triunghiurile ABC, ACD, ADB și BCD se numesc **fețele** tetraedrului.

Definiție: Tetraedrul care are toate muchiile congruente se numește **tetraedru regulat**.

Definiție: Corpul geometric determinat de vârfurile unui poligon convex numit bază și de un punct nesituat în planul acesteia numit vârf se numește **piramidă**.

Observație: Punctul V este **vârful** piramidei, iar patrulaterul $ABCD$ este **baza** piramidei.

Segmentele $[VA], [VB], [VC]$ și $[VD]$ se numesc **muchiile laterale** ale piramidei.

Triunghiurile VAB, VBC, VCD și VDA se numesc **fețele laterale** ale piramidei.

Definiție: O piramidă care are baza **poligon regulat** și muchiile laterale congruente se numește **piramidă regulată**.

În figura 1 este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, iar în figura 2 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$.

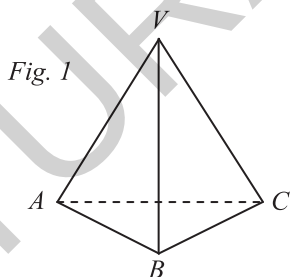
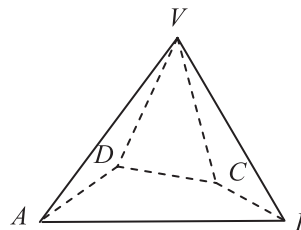
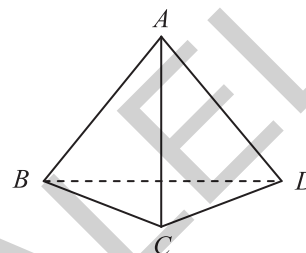
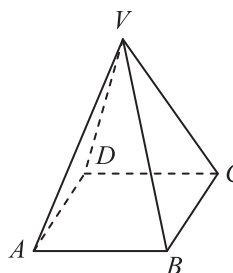


Fig. 2



Desfășurarea în plan a unei piramide

În figura 3 este reprezentată desfășurarea în plan a suprafeței unei piramide triunghiulare regulate $VABC$, iar în figura 4 este reprezentată desfășurarea în plan a suprafeței unei piramide patrulatere regulate $VABCD$.

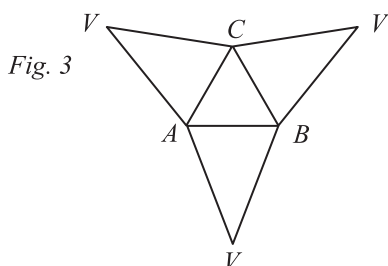


Fig. 3

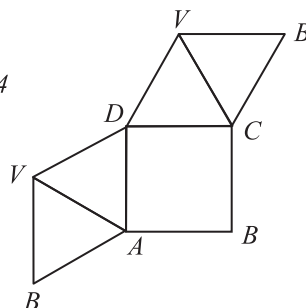


Fig. 4

Observație: Desfășurarea în plan a suprafeței unei piramide nu este unică. În continuare vom folosi următoarele **notații**:

l – lungimea muchiei bazei, m – lungimea muchiei laterale, R – raza cercului circumscris bazei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{P}_f$ – perimetrul feței laterale, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{A}_f$ – aria feței laterale.



Știm să răspundem?

Propoziția „Dacă prin desfășurarea în plan a suprafeței unei piramide triunghiulare regulate se obține un triunghi echilateral, atunci piramida respectivă este tetraedru regulat.” este

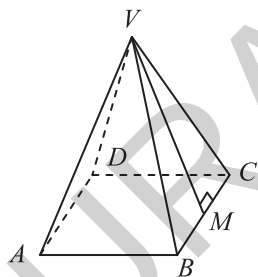


Înțelegere * Identificare (Să rezolvăm împreună)

1. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful în V care are aria bazei de 64 cm^2 și muchia laterală de 5 cm . Aflați:

- a) l ; b) $[AC]$; c) $\mathcal{P}_b$; d) $\mathcal{P}_f$; e) $\mathcal{A}_f$.

Soluție:



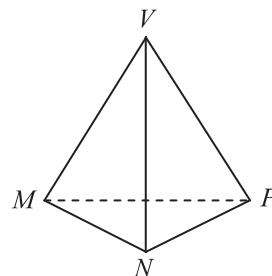
- a) Deoarece $ABCD$ este pătrat, rezultă că $\mathcal{A}_b = l^2$, așadar $l^2 = 64 \text{ cm}^2$, deci $l = \sqrt{64} \text{ cm}$ și obținem $l = 8 \text{ cm}$;
b) $AC = l\sqrt{2}$, deci $AC = 8\sqrt{2} \text{ cm}$;
c) $\mathcal{P}_b = 4l = 4 \cdot 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$;
d) $\mathcal{P}_{VAB} = VA + AB + VB = 18 \text{ cm}$;
e) Construim $VM \perp BC$, $M \in (BC)$, deci $BM = CM = 4 \text{ cm}$. În $\triangle VMC$ cu $m(\angle M) = 90^\circ$ avem: $VC^2 = VM^2 + MC^2$, și obținem $VM = 3 \text{ cm}$. $\mathcal{A}_f = 12 \text{ cm}^2$.

2. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VMNP$ cu vârful în V . Dacă:

- a) $NP = \sqrt{VN \cdot VP}$, aflați $m(\angle VMN)$;
b) $VM = \sqrt{NP \cdot VP}$, aflați $m(\angle NVP)$.

Soluție:

- a) Deoarece $[VN] \equiv [VP]$, relația din ipoteză se scrie $NP = \sqrt{VN^2}$, deci $[NP] \equiv [VN]$, prin urmare piramida $VMNP$ este tetraedru regulat, deci $m(\angle VMN) = 60^\circ$;



Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ	5
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMI DE NUMERE REALE. INTERVALE

Lecția 1. Mulțimi de numere	8
Lecția 2. Axa numerelor reale. Aproximări, rotunjiri. Compararea numerelor reale	10
Lecția 3. Valoarea absolută a unui număr real	12
Lecția 4. Intervale de numere reale. Operații cu intervale.....	15
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	18
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	19

CAPITOLUL II. REGULI DE CALCUL ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 5. Adunarea și scăderea numerelor reale.....	21
Lecția 6. Înmulțirea numerelor reale	24
Lecția 7. Împărțirea numerelor reale	26
Lecția 8. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale.....	29
Lecția 9. Raționalizarea numitorilor.....	31
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	35
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	36

CAPITOLUL III. CALCULE CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

Lecția 10. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	38
Lecția 11. Înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere	40
Lecția 12. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere.....	43
Lecția 13. Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	44
Lecția 14. Formule de calcul prescurtat	46
Lecția 15. Descompunerea în factori.....	49
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	52
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	54

CAPITOLUL IV. RAPOARTE DE NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

Lecția 16. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	56
Lecția 17. Amplificarea rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere	58
Lecția 18. Simplificarea rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere.....	60
Lecția 19. Adunarea și scăderea rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere	62
Lecția 20. Înmulțirea rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere	65
Lecția 21. Împărțirea rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere	67
Lecția 22. Puterea cu exponent natural a rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere.....	69
Lecția 23. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere.....	71
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	75
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	77

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PUNCTE, DREPTE, PLANE, CORPURI GEOMETRICE

Lecția 1. Determinarea drepte. Determinarea planului	79
Lecția 2. Tetraedrul și piramida	82
Lecția 3. Prisma.....	85
Lecția 4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu. Relația de paralelism în spațiu.....	89
Lecția 5. Unghiul a două drepte în spațiu.....	91
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	<i>94</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului.....</i>	<i>95</i>
<i>Aplicăm ce am învățat</i>	<i>97</i>

CAPITOLUL II. RELAȚII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE

Lecția 6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan.....	98
Lecția 7. Dreapta perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan.....	101
Lecția 8. Înălțimea piramidei. Apotema piramidei.....	104
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	<i>106</i>
Lecția 9. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele	108
Lecția 10. Înălțimea prisme. Distanța dintre două plane paralele	110
Lecția 11. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate.....	113
Lecția 12. Trunchiul de piramidă regulată	115
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	<i>118</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului.....</i>	<i>120</i>
<i>Aplicăm ce am învățat</i>	<i>122</i>

CAPITOLUL III. PROIECȚII ORTOGONALE PE UN PLAN

Lecția 13. Proiecții ortogonale pe un plan.....	123
Lecția 14. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment.....	126
Lecția 15. Teorema celor trei perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă.....	128
Lecția 16. Unghiul plan corespunzător unui unghi diedru. Unghiul dintre două plane.....	131
Lecția 17. Plane perpendiculare	134
<i>Evaluare sumativă * Autoevaluare</i>	<i>136</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului.....</i>	<i>138</i>
<i>Aplicăm ce am învățat</i>	<i>140</i>

MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL I

141

MODELE DE TESTE DE EVALUARE NAȚIONALĂ

143

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....

148