Nume: ....
Prenume: ....
Clasă:..
Şcoală:..
....

Colecţia MATE 2000 +

PARALELA 45
EDITURA

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Andreea Roşca
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Ed. a 8-a, reviz. şi adăug.. - Piteşti : Paralela 45, 2019
2 vol.
ISBN 978-973-47-3007-0
Partea 2. - 2019. - ISBN 978-973-47-3094-0

I. Negrilă, Maria

51

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

Soluțiile testelor de autoevaluare
pot fi consultate la adresa:
https://www.edituraparalela45.ro/download/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa7_p2_2019-2020.pdf

clasa a VII-a

partea a II-a

ediția a VIII-a, revizuită și adăugită

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Algebră

Capitolul I
Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare

PP Competenţe specifice

- **C1.** Identificarea unei situaţii date rezolvabile prin ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare
- **C2.** Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluţiilor unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare
- **C3.** Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare
- **C4.** Redactarea rezolvării ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii liniare
- **C5.** Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuaţiilor sau a sistemelor de ecuaţii liniare
- **C6.** Transpunerea matematică a unor situaţii date, utilizând ecuaţii şi/sau sisteme de ecuaţii liniare

PE-PP 1. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută

Ecuaţiile sunt propoziţii matematice cu una sau mai multe variabile, în care apare o singură dată semnul egal („=”).

Exemple:
1. $2x - 7 = x + 2$; **2.** $3y + 2y - 8 = 0$; **3.** $3(z + 2) = 3z + 6$.

Observaţii:
- $x, y, z, \dots$ poartă denumirea de variabile (necunoscute).
- Ceea ce este scris în stânga semnului egal se numeşte membrul stâng al ecuaţiei, iar ceea ce este scris în dreapta semnului egal poartă denumirea de membrul drept al ecuaţiei.

DEFINIŢII: Un număr real se numeşte **soluţie** pentru o ecuaţie dacă, înlocuind necunoscuta cu acel număr în ecuaţia dată, propoziţia obţinută este adevărată. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii se notează cu S.

O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$, se numeşte **ecuaţie de gradul I cu o necunoscută**. Numerele reale a şi b se numesc **coeficienţi** (a este **coeficientul necunoscutei**, iar b se numeşte **termen liber**), iar x se numeşte **necunoscută** sau **variabilă**.

Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$, un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziţia $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

A rezolva o ecuaţie înseamnă a determina toate soluţiile sale. Aceste soluţii formează mulţimea soluţiilor ecuaţiei date şi se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuaţie urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulţimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuaţia dată este definită pe mulţimea M (sau că se rezolvă în mulţimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M = \mathbb{R}$.

Exemple:

- Numărul 9 este soluţie a ecuaţiei $2x - 7 = x + 2$ pentru că, înlocuind în ecuaţie pe x cu 9, se obţine o propoziţie adevărată: $2 \cdot 9 - 7 = 9 + 2$ (A) .
- Orice număr real este soluţie pentru ecuaţia $3(z + 2) = 3z + 6$; din această cauză, ecuaţia se mai numeşte şi **identitate**.
- Există ecuaţii care nu au nicio soluţie reală.
  Exemple: $4(x - 3) = 4x + 10$; $2z + 5 = 2(z + 9)$ etc.
  Mulţimea soluţiilor acestor ecuaţii este $\varnothing$.

1.1. Echivalenţa ecuaţiilor

Înlocuind necunoscuta x cu numărul 3 în ecuaţia $3x + 2 = 11$, constatăm că obţinem o propoziţie adevărată: $3 \cdot 3 + 2 = 11$. Deci, numărul 3 este soluţie a ecuaţiei. Putem spune că am rezolvat ecuaţia? Nu încă, deoarece nu suntem siguri că am aflat toate soluţiile. Să presupunem că numărul a este soluţie (şi el) a ecuaţiei $3x + 2 = 11$. Atunci, înlocuind necunoscuta x cu numărul a, obţinem propoziţia adevărată (egalitatea) $3a + 2 = 11$. Vom scădea din ambii membri ai ei numărul 2, de unde rezultă că $3a + 2 - 2 = 11 - 2$, adică $3a = 9$. Vom împărţi ambii membri cu 3 şi obţinem $a = 9 : 3$. Deci, $a = 3$.

Numai acum putem afirma că am rezolvat ecuaţia; ea are o singură soluţie, şi anume numărul 3. Şi ecuaţia $x = 3$ are ca soluţie doar numărul 3.

Deci, ecuaţiile: $3x + 2 = 11$ şi $x = 3$ au aceeaşi soluţie, ele fiind **echivalente**.

Două ecuaţii sunt echivalente în cazul în care au aceleaşi soluţii. O ecuaţie simplă de forma $x = a$, unde a este număr real dat, are ca soluţie doar numărul a. Atunci când rezolvăm o ecuaţie oarecare, încercăm să găsim o alta, de forma $x = a$, care să fie echivalentă cu cea dată. Putem folosi următoarele reguli, care conduc la ecuaţii echivalente:

1) Se pot trece termenii dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
2) Se pot înmulţi (împărţi) ambii membri ai ecuaţiei cu numere diferite de zero.

1.2. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută. Ecuaţii reductibile la ecuaţii de gradul I cu o necunoscută

În general, o ecuaţie de forma $ax + b = 0$, unde a şi b sunt numere reale (iar $a \neq 0$), va fi numită *ecuaţie de gradul I cu o necunoscută*.

O asemenea ecuaţie se rezolvă în două etape:

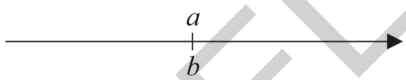
1. Scădem din ambii membri pe b şi obţinem $ax = -b$.
2. Împărţim ambii membri cu a şi obţinem $x = -\dfrac{b}{a}$. Această ultimă ecuaţie are evident ca unică soluţie numărul real $-\dfrac{b}{a}$ şi este echivalentă cu ecuaţia $ax + b = 0$.

Observaţii:

- Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, atunci propoziţia cu o variabilă $ax = -b$ se scrie $0x = 0$, deci orice număr real este soluţie a ecuaţiei.
- Dacă $a = 0$, $b \neq 0$, atunci propoziţia cu o variabilă $ax = -b$ devine $0x = -b$, ceea ce este imposibil, deoarece produsul niciunui număr real cu zero nu este un număr real diferit de zero. În general, ecuaţiile nu se prezintă sub această formă simplă, însă le putem aduce la aceasta folosind regulile care conduc la ecuaţii echivalente.

1.3. RELAŢIA DE EGALITATE ÎN MULŢIMEA NUMERELOR REALE. PROPRIETĂŢI

Spunem că două numere reale a şi b sunt egale dacă se reprezintă în acelaşi punct pe axa numerelor.



Exemple:

1. Dacă $a = 3$ şi $b = \sqrt{9}$, atunci $a = b$, deoarece $\sqrt{9} = 3$.

2. Dacă $a = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$ şi $b = 7 - 4\sqrt{3}$, atunci $a = b$, deoarece $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

Proprietăţile relaţiei de egalitate pe mulţimea numerelor reale:

1. Reflexivitatea: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetria: dacă $x = y$, atunci $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitatea: dacă $x = y$ şi $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitatea se păstrează dacă adunăm (scădem) din ambii membri ai unei egalităţi acelaşi termen sau dacă înmulţim (împărţim) o egalitate printr-un factor nenul. Adică au loc următoarele echivalenţe, numite proprietăţi de compatibilitate între relaţia de egalitate şi operaţiile cu numere reale:

$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$;

$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$.

Pe scurt, putem spune că:

- dacă se adună, se scad, se înmulţesc sau se împart membru cu membru două egalităţi, se obţine tot o egalitate. Altfel spus, avem:

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} a \cdot c = b \cdot d \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}\ (c \neq 0;\ d \neq 0) \end{cases}.$$

Exemplu: Demonstraţi că dacă $x^2 + y^2 = 2xy$, atunci $x = y$.

Adunând în ambii membri ai egalităţii numărul real $-2xy$, obţinem egalitatea $x^2 + y^2 - 2xy = 2xy - 2xy$, care este echivalentă cu egalitatea $(x - y)^2 = 0$. Deoarece pătratul unui număr real este zero doar când numărul dat este zero, rezultă $x - y = 0$. Adunând în ambii membri ai egalităţii numărul y, rezultă $x = y$.

Geometrie

Capitolul I
Relații metrice în triunghiul dreptunghic

PP **Competenţe specifice**

- C_1. Recunoaşterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configuraţie geometrică dată
- C_2. Aplicarea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia
- C_3. Deducerea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic
- C_4. Exprimarea în limbaj matematic a relaţiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic
- C_5. Interpretarea unor relaţii metrice între elementele unui triunghi dreptunghic
- C_6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

PE-PP
PROIECŢII ORTOGONALE PE O DREAPTĂ

DEFINIŢIE: Proiecţia ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

TEOREMĂ: Proiecţia ortogonală a unui segment $[AB]$ pe o dreaptă d este segmentul $[A'B']$, unde A' şi B' sunt proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi B pe d (este un punct sau un segment, după cum $[AB]$ este sau nu perpendicular pe d).

PROPRIETĂŢI:

1. Dacă $AB \parallel d$, atunci proiecţia ortogonală a lui $[AB]$ pe dreapta d este un segment congruent cu $[AB]$.

2. Dacă $[C'D']$ este proiecţia ortogonală a lui $[CD]$ pe d şi $CD \nparallel d$, atunci $C'D' < CD$.

3. Dacă $[M'N']$ este proiecţia ortogonală a lui $[MN]$ pe dreapta d, atunci mijlocul lui $[M'N']$ este proiecţia ortogonală a mijlocului lui $[MN]$ pe d.

PE-PP 1. Teorema înălţimii

Teorema înălţimii

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălţimii din vârful unghiului drept este media geometrică a lungimilor proiecţiilor ortogonale ale catetelor pe ipotenuză.

Observaţie: Pentru a scurta enunţul, spunem uneori:

Într-un triunghi dreptunghic, înălţimea din vârful unghiului drept este media geometrică a proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

Dacă în ΔABC $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, atunci $AD^2 = BD \cdot CD$.

A doua teoremă a înălţimii

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălţimii duse din vârful unghiului drept este egală cu raportul dintre produsul lungimilor catetelor şi lungimea ipotenuzei.

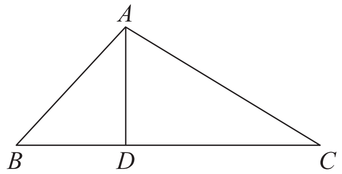
În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, avem: $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.

Reciproca teoremei înălţimii

Fie triunghiul ABC şi $D \in (BC)$, astfel încât $AD \perp BC$ şi $AD^2 = DC \cdot DB$. Atunci $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

Demonstraţie:

Din $AD^2 = DC \cdot DB$ rezultă că $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{AD}$, iar cum $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle ADC$, rezultă că $\Delta ADC \sim \Delta BDA$, deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DCA$. Dar $m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle ABD) = 90°$, atunci rezultă că $m(\sphericalangle DCA) + m(\sphericalangle ABD) = 90°$, adică $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.



activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $pr_{BC} A = D$; b) $pr_{BC} [AB] = [BD]$; c) $pr_{BC} [AC] = [DC]$; d) $pr_{AB} [BC] = [AB]$; e) $pr_{BC} [AD] = [BD]$; f) $pr_{AC} [AB] = [AC]$; g) $pr_{AC} [BC] = [AC]$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi $AD \perp BC$, cu $D \in (BC)$, iar $BC = 75$ cm. Determinaţi lungimile proiecţiilor catetelor $[AB]$, respectiv $[AC]$ pe ipotenuza $[BC]$, ştiind că proiecţiile sunt invers proporţionale cu numerele 0,(6) şi 0,375.

3. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E, F şi, respectiv, G situate pe latura $[AC]$ astfel încât să avem: $AD = DE = EF = FG = GC$. Dacă punctele M, N, P, Q şi, respectiv, R sunt proiecţiile punctelor A, D, E, F şi, respectiv, G pe latura $[BC]$, determinaţi valorile rapoartelor: $\dfrac{MN}{NP}; \dfrac{RC}{RQ}; \dfrac{MP}{CQ}; \dfrac{NP}{NC}; \dfrac{MC}{NR}; \dfrac{MQ}{NC}; \dfrac{PC}{MQ}$.

4. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este egală cu 20,8 dm, iar lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză sunt direct proporţionale cu numerele 0,1(6) şi 0,375. Calculaţi lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei.

5. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ se dau:

a) $AD = 24$ cm şi $BD = 18$ cm. Calculaţi CD şi BC.

b) $BD = 8$ cm şi $CD = 0,18$ m. Calculaţi AD şi BC.

6. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ se dau:

a) $BD = 3,6$ dm şi $CD = 6,4$ dm. Calculaţi BC şi AD.

b) $CD = 7,2$ dm şi $AD = 9,6$ dm. Calculaţi BD şi BC.

PE Aplicare şi exersare **

7. În dreptunghiul $ABCD$, $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Ştiind că $AE = 12$ cm şi $CE = 48$ cm, calculaţi lungimea segmentului $[DE]$ şi aria dreptunghiului $ABCD$.

8. În rombul $ABCD$, $AC \perp BD$, $AC \cap BD = \{O\}$ şi $OM \perp BC$, $M \in (BC)$. Dacă $BM = 18$ cm şi $MC = 32$ cm, calculaţi lungimea segmentului $[OM]$ şi aria rombului $ABCD$.

9. Trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$, are diagonalele perpendiculare, iar $AB = 54$ cm şi $CD = 24$ cm. Calculaţi:

a) lungimea segmentului $[AD]$; b) aria trapezului $ABCD$.

10. În trapezul isoscel $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, $AC \perp AB$, $[AB] \equiv [DC]$, cu $AM \perp BC$, $M \in (BC)$, avem $BM = 12$ cm şi $CM = 48$ cm. Calculaţi:

a) lungimea segmentului $[AM]$; b) aria trapezului $ABCD$.

11. În triunghiul dreptunghic MNP, $m(\sphericalangle M) = 90°$, $MQ \perp NP$, $Q \in (NP)$, se dau:

a) $PQ = 25,6$ dm şi $PN = 40$ dm. Calculaţi NQ şi MQ.

b) $NQ = 9$ dm şi $NP = 25$ dm. Calculaţi QP şi MQ.

PE Aprofundare şi performanţă ***

12. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se dau:

a) $\frac{BD}{CD} = \frac{4}{9}$, iar $BC = 52$ cm. Calculaţi AD şi $\mathcal{A}_{ABC}$.

b) $\frac{CD}{BD} = 1\frac{7}{9}$, iar $AD = 24$ cm. Calculaţi BC şi $\mathcal{A}_{ABC}$.

13. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se ştiu $AD = 36$ dm şi $CD = 48$ dm. Calculaţi:

a) lungimea proiecţiei BD şi a ipotenuzei BC; b) aria triunghiului ABC.

14. Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 45 dm raportul lungimilor proiecţiilor catetelor pe ipotenuză are valoarea 4. Calculaţi:

a) lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză;

b) lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei.

15. Fie triunghiul dreptunghic ABC, având ipotenuza $BC = 24$ cm. Dacă măsura unghiului dintre înălţimea şi mediana duse din punctul A este de 30°, calculaţi lungimea înălţimii duse din A şi aria triunghiului ABC.

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE