Marin Chirciu Marian Haiducu Octavian Stroe
Marius Antonescu Florin Antohe Lucia Popa Agnes Voica

Matematică

algebră, geometrie

Caiet de lucru. Clasa a VIII-a
Partea I

✔ **Modalităţi de lucru diferenţiate**
✔ **Pregătire suplimentară prin planuri individualizate**

Soluțiile testelor de autoevaluare pot fi consultate la adresa:
http://www.edituraparalela45.ro/wp-content/uploads/2017/07/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa8_sem1_2018.pdf

Editura Paralela 45

Lucrare elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin Ordinul Ministrului Educației Naționale nr. 5097/09.09.2009.

Editor: Călin Vlasie

Corectură: Amalia Mărăşescu, Bianca Vişan, Olimpia Filip
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Ionuț Broştianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică - consolidare : algebră, geometrie : caiet de lucru : clasa a VIII-a / Marin Chirciu, Marian Haiducu, Marius Antonescu, ... - Piteşti : Paralela 45, 2017
2 vol.
ISBN 978-973-47-2606-6
Semestrul 1. - 2017. - ISBN 978-973-47-2607-3

I. Chirciu, Marin
II. Haiducu, Marian
III. Antonescu, Marius

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Piteşti, jud. Argeş, cod 110174, str. Fraţii Goleşti 130
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444
0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Recapitulare

1 Exerciții și probleme recapitulative

1 Fie $A = \{\overline{abc} \mid a \cdot b \cdot c = 4$, unde a, b, c sunt cifre în baza $10\}$.

a) Scrie toate elementele mulțimii A.

b) Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea A, acesta să fie divizibil cu 3.

2 Arată că $3^n \cdot 5^{n+1} + 15^n + 3^{n+1} \cdot 5^n$ este divizibil cu 9, pentru orice număr natural n.

3 Află cardinalul mulțimii:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x < 425\}.$$

4 Rezultatul calculului:

$$(-5^3)^5 : 25^7 - (125)^6 : (-5^2)^9 \text{ este ... .}$$

5 Soluția din $\mathbb{Z}$ a ecuației:

$$-3x - 5[x - 2(3x - 1)] = 7(3x - 2) \text{ este ... .}$$

6 Dintre numerele $a = -1,(3)$ și $b = -\dfrac{13}{10}$, mai mare este ... .

7 Scrierea sub formă de fracție zecimală a fracției ordinare $\dfrac{5}{3}$ este ... .

8 Efectuează: $1{,}12 \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{10}{56}\right)$.

9 Arată că $E = \dfrac{1}{4}[(-1)^{3n+5}(6n + 9) + 1]$ este număr întreg, pentru orice n număr natural.

10 Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{x+5}{x+3} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$. Află $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

11 Într-o clasă sunt 28 de elevi, 16 sunt înscriși la cercul de matematică, 21 la cercul de informatică și 3 nu sunt înscriși la niciun cerc. Câți elevi sunt înscriși la ambele cercuri?

12 Dacă numerele x, y, z sunt direct proporționale cu 2, 3, 5, află valoarea expresiei $E = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$.

13 Află x din egalitatea:

$$\frac{1}{7} \cdot \left\{\frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) + \frac{4}{5}\right] + \frac{5}{6}\right\} + \frac{6}{7} = 1.$$

14 Rezolvă în $\mathbb{Q}$ ecuația $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| = 1$.

15 Un biciclist a parcurs un drum în 3 zile. În prima zi a parcurs $\dfrac{1}{3}$ din drum, a doua zi $\dfrac{2}{5}$ din rest, iar a treia zi restul de 24 km. Află lungimea drumului.

16 Dacă $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5}$, calculează $\dfrac{2a - 3b}{5a - b}$.

17 Prețul unui obiect se micșorează cu 20%. Cu cât la sută trebuie să se mărească noul preț pentru a se ajunge la prețul inițial?

18 Dacă $\overline{xy}$ și $\overline{yx}$ sunt direct proporționale cu 5 și 6, află cifrele x și y.

19 Arată că fracția $\dfrac{8n + 5}{5n + 3}$ este ireductibilă, oricare ar fi numărul natural n.

20 Diferența a două numere naturale este 19. Împărțind unul dintre numere la celălalt se obține câtul 5 și restul 13. Află numerele.

21 Scrie $\dfrac{1}{2}$ ca produs de 3 numere raționale pozitive și subunitare.

22 Rezolvă în numere întregi ecuația: $2x^2 - xy - y^2 = 5$.

23 Dacă $x - \dfrac{1}{x} = 3$, calculează $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

1 Forme de scriere a unui număr real. Relația $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Competența:
Identificarea în exemple, în exerciţii sau în probleme a numerelor reale și a formulelor de calcul prescurtat

Ce știu

Mulțimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
Mulțimea numerelor întregi este $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

Între aceste mulțimi au loc incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Orice număr rațional poate fi scris:

- ca fracție ordinară (de exemplu: $\frac{1}{2}$);
- ca fracție zecimală (de exemplu: 0,5).

Fracțiile zecimale pot fi:

- finite (de exemplu: 0,25);
- infinite:
  - periodice simple: 1,(3);
  - periodice mixte: 1,2(3).

  Reține! Perioada este diferită de (9).

Orice număr rațional se poate scrie ca o fracție zecimală, infinită, periodică.

Exemple: $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $-\frac{5}{2} = -2{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$; $\frac{37}{30} = 1{,}2(3)$.

Partea întreagă a unui număr real este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul respectiv.
Partea fracționară a unui număr real este diferența dintre numărul respectiv și partea sa întreagă.
Partea întreagă a numărului real x se notează $[x]$.
Partea fracționară a numărului real x se notează $\{x\}$.
Reținem că $x = [x] + \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Fracție zecimală neperiodică: $\overline{a_0,a_1a_2...a_k} = a_0\frac{\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{100...0}_{k \text{ zerouri}}}$. **Exemplu:** $12{,}304 = 12\frac{304}{1000}$.

Fracție zecimală periodică simplă: $\overline{a_0,(a_1a_2...a_p)} = a_0\frac{\overline{a_1a_2...a_p}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ cifre de } 9}}$. **Exemplu:** $1{,}(23) = 1\frac{23}{99}$.

Fracție zecimală periodică mixtă: $\overline{a_0,a_1a_2...a_{k-1}(a_ka_{k+1}...a_{k+p})} = a_0\frac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}} - \overline{a_1a_2...a_{k-1}}}{\underbrace{99......9}_{(p+1) \text{ cifre de } 9}\underbrace{00......0}_{(k-1) \text{ cifre de } 0}}$.

Exemplu: $2{,}71(326) = 2\frac{71326-71}{99900} = 2\frac{71255}{99900}$.

Orice fracție zecimală infinită, neperiodică, nu este număr rațional.
Fracțiile zecimale periodice sau neperiodice formează numerele reale.
Un număr irațional este un număr real care nu este rațional.
Exemple de numere iraționale:

0,1010010001... (după prima cifră de 1 urmează un zero, după a doua cifră de 1 urmează două zerouri ş.a.m.d)

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

π = raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său.

Ce aflu

Recunoașterea fracțiilor care generează fracții periodice simple sau mixte

Observația 1. În cazul fracției periodice simple, fracția generatoare are la numitor $\underbrace{99...9}_{n \text{ cifre de } 9} = 10^n - 1$, unde n reprezintă numărul cifrelor din perioadă.
Numărul $10^n - 1$ nu se divide nici cu 2, nici cu 5. Deducem că după simplificare vom obține o fracție ireductibilă, al cărei numitor descompus în factori primi nu conține nici factorul 2, nici factorul 5.

Exemplu: $\frac{2}{3}$; avem $\frac{2}{3} = 0,(6)$.

Observația 2. În cazul fracției periodice mixte numărătorul nu se poate termina cu zero.
Deoarece numărătorul nu se poate termina cu zero, fracția nu se poare simplifica prin 10. Ea ar putea fi simplificată prin 2 sau prin 5, dar nu prin ambii. Deducem că la numitor rămâne sau factorul 2, sau factorul 5, la o putere cu exponentul egal cu numărul de zerouri al numitorului, adică cu câte cifre are partea neperiodică.
Exemple: $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{15}$; avem $\frac{1}{6} = 0,1(6)$, $\frac{2}{15} = 0,1(3)$.

Pentru mate-campioni

Teoremă. O fracție ireductibilă se transformă în fracție zecimală periodică simplă, dacă numitorul ei descompus în factori primi nu conține nici factorul 2, nici factorul 5. Dacă numitorul ei conține cel puțin unul din factorii 2 sau 5, dar şi factori primi diferiți de 2 şi 5, atunci fracția se transformă în fracție zecimală periodică mixtă având la partea neperiodică un număr de cifre egal cu cel mai mare dintre exponenții lui 2 şi 5.

Ce am înțeles

1. **a)** Scrise ca fracții zecimale, numerele: 12, $\frac{15}{10}$, $-\frac{24}{100}$, $\frac{12345}{1000}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{21}{5}$, $\frac{25}{8}$ sunt ....
....

b) Partea întreagă şi partea fracționară a numerelor de mai sus sunt ....

2. **a)** Scrise ca fracții zecimale, numerele: $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{15}$, $-\frac{1}{15}$ sunt ....
....

b) Partea întreagă şi partea fracționară a numerelor de mai sus sunt ....

Capitolul I. RELAȚII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE, PLANE

11 Puncte, drepte, plane: convenții de desen și de notație. Determinarea dreptei; determinarea planului

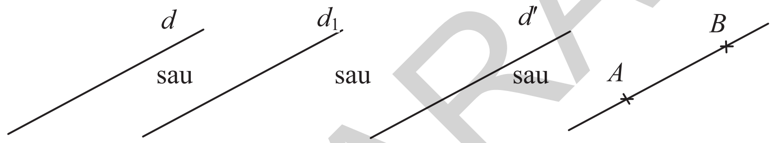
Competența:
Recunoașterea și descrierea unor proprietăţi ale unor figuri geometrice plane în configurații date în spațiu sau pe desfășurări ale acestora

Ce știu

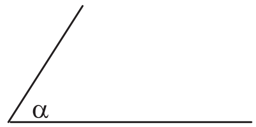
Noțiunile fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: punctul, dreapta, planul, distanța și măsura unghiurilor, noțiuni întâlnite în geometria plană, la care se mai adaugă noțiunea de spațiu. Dacă în geometria plană există un singur plan, în geometria în spațiu avem mai multe plane.

Punctul, pus în evidență prin reprezentări și notații de tipul:

Dreapta, pusă în evidență prin reprezentări și/sau notații de tipul:

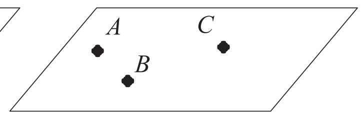


Planul, pus în evidență prin reprezentări și/sau notații de tipul



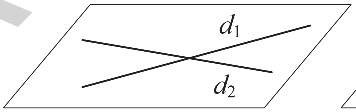
Planul α

Planul α_1

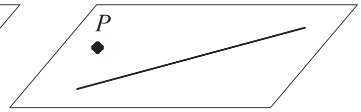


Planul (ABC)

Planul (d_1d_2)



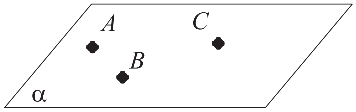
Planul (d_1d_2)



Planul (Pd) sau Planul (dP)

Axiomele de incidență ale geometriei în spațiu:

1. Spațiul este o mulțime de puncte.
2. Dreptele și planele sunt submulțimi ale spațiului.
3. Orice două puncte distincte A și B determină o unică dreapta AB. Există puncte exterioare unei drepte.
4. Orice trei puncte necoliniare A, B, C determină un unic plan (ABC). Există puncte exterioare unui plan.
5. Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.

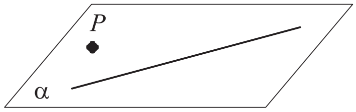


$\alpha = (ABC)$

Consecințe ale axiomelor de incidență. Determinarea planului

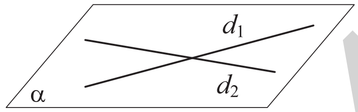
I. Prin orice trei puncte necoliniare A, B, C trece un unic plan notat (ABC).

II. O dreaptă și un punct exterior ei P determină un unic plan notat (dP) sau (Pd). (Vezi figura alăturată.)



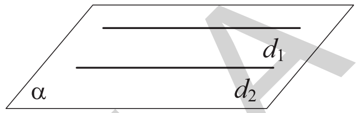
$\alpha = (Pd)$

III. Două drepte concurente $d_1 \cap d_2 = \{P\}$ determină un mic plan, notat (d_1d_2):



$\alpha = (d_1d_2)$

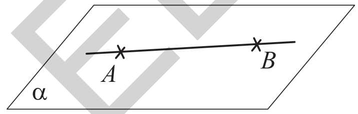
IV. Două drepte paralele $d_1 \parallel d_2$ determină un unic plan, notat (d_1d_2):



$\alpha = (d_1d_2)$

Observaţie: Exprimarea relațiilor între noțiunile fundamentale ale geometriei în spațiu (puncte, drepte, plane) presupune utilizarea limbajului teoriei elementare a mulțimilor.

Exemplu: Următoarea propoziție, consecință a axiomelor de incidență: „Dacă o dreaptă d are două puncte distincte situate într-un plan α, atunci dreapta d este inclusă în planul α.”
Se scrie $A, B \in \alpha$, $A \neq B \Rightarrow AB \subset \alpha$.



Pentru mate-campioni

1. Numărul maxim de drepte determinate de n puncte în spațiu este $\frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 2$.

2. Numărul maxim de plane determinate de n puncte în spațiu este $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Ce am înțeles

1. Valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă trei puncte sunt coplanare, atunci ele sunt coliniare” este ....
2. Patru puncte diferite, necoliniare oricare trei dintre ele, pot fi unite, două câte două prin .... drepte.
3. Numărul de plane determinat de patru puncte necoplanare A, B, C, D este .... Numeşte-le.
4. Dacă trei drepte neconcurente se intersectează două câte două, atunci ele sunt ....
5. Două drepte coplanare au .... puncte în comun.

Ştiu cum să rezolv

1 Se dau trei puncte A, B, C, astfel încât $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm şi $CA = 8$ cm. Arată că cele trei puncte determină un unic plan.
Soluţie: Este suficient să arătăm că cele trei puncte nu sunt coliniare. Deoarece $6 + 7 > 8$, $7 + 8 > 6$ şi $6 + 8 > 7$, atunci cele trei puncte sunt vârfurile unui triunghi, deci sunt necoliniare şi, prin urmare, determină un unic plan.

2 Se consideră în spațiu 10 puncte. Precizează numărul minim şi numărul maxim de drepte ce se formează unind două câte două punctele date.
Soluţie: Numărul minim de drepte este 1 şi se obține în cazul în care toate cele 10 puncte sunt coliniare.
Numărul maxim de drepte este $9 + 8 + \ldots + 3 + 2 + 1 = 45$ şi se obține când oricare trei dintre puncte sunt necoliniare.

3 Se consideră în spațiu 10 puncte. Precizează numărul minim şi numărul maxim de plane determinate de câte trei din cele 10 puncte date.
Soluţie: Numărul minim de plane este 1, şi se obține în cazul în care toate cele 10 puncte sunt coplanare.
Numărul maxim de plane este $(8 + 7 + \ldots + 3 + 2 + 1) + (7 + 6 + \ldots + 3 + 2 + 1) + \ldots + (2 + 1) + 1 = 120$ şi se obține când oricare patru dintre puncte sunt necoplanare.

TEZA 1

Subiectul I – Pe foaia de teză se trec numai rezultatele (30p)

(5p) **1.** Rezultatul raționalizat al calculului $\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ este …

(5p) **2.** Numărul real x pentru care $\frac{x}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ este egal cu …

(5p) **3.** Numărul $\sqrt{50}+3\sqrt{18}-2\sqrt{72}$, scris sub forma $a\sqrt{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}$, b număr prim, este …

(5p) **4.** Numerele întregi k pentru care $\frac{3}{2k-1} \in \mathbb{Z}$ sunt …

(5p) **5.** Cateta unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de $5\sqrt{2}$ cm are lungimea egală cu … cm.

(5p) **6.** Valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă a, b, c, cu $a \neq b \neq c \neq a$ sunt trei drepte astfel încât $a \parallel b$ şi $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$." este …

Subiectul II – Pe foaia de teză se trec rezolvările complete (30p)

(5p) **7. a)** Arată că $\sqrt{2}$ este număr irațional.

(5p) **b)** Află ultima cifră a unui pătrat perfect şi deduceți că $\sqrt{5n+2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

(5p) **c)** Folosind teorema împărțirii întregi, scrie forma generală a unui număr natural la împărțirea cu 3. Demonstrează că $\sqrt{3n+2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

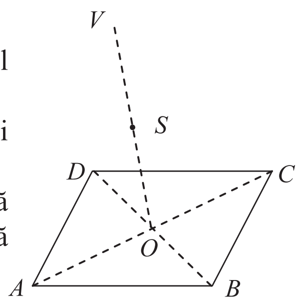
8. Fie expresiile $E_1(x) = x^2 - 6x + 13$ şi $E_2(y) = 4y^2 + 4y + 10$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) **a)** Demonstrează că, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{R}$, expresiile $E_1(x)$ şi $E_2(y)$ reprezintă numere reale strict pozitive.

(5p) **b)** Află valoarea minimă a numerelor $E_1(x)$ şi $E_2(y)$, când x şi y parcurg mulțimea numerelor reale.

(5p) **c)** Află numerele reale x şi y, ştiind că $\sqrt{E_1(x)}+\sqrt{E_2(y)} \leq 5$.

Subiectul III – Pe foaia de teză se trec rezolvările complete (30p)



9. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat, $V \notin (ABC)$ şi S este mijlocul segmentului VO.

(5p) **a)** Realizează pe foaia de teză un desen asemănător cu cel din figură şi completează-l cu segmentele VA, VB, VC şi VD.

b) Prin S se duc dreptele d şi g, $d \parallel AC$, $g \parallel BD$. Dreapta d intersectează segmentele VA şi VC în M, respectiv P, iar dreapta g intersectează segmentele VB şi VD în N, respectiv Q.

(5p) **b$_1$)** Află natura patrulaterului $MNPQ$.

(10p) **b$_2$)** Demonstrează că $(MON) \parallel (VCD)$.

(10p) **b$_3$)** Calculează cât la sută reprezintă $\mathcal{A}_{MNPQ}$ din $\mathcal{A}_{ABCD}$.

Cuprins