

Nume:

Prenume:

Clasă:

Școală:

.....

Colecția **MATE 2000 +**
Inițiere, ameliorare și dezvoltare

Acest auxiliar didactic a primit avizul M.E.N. pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar și figurează la poziția 57 în Catalogul auxiliarelor didactice avizate în sesiunea de evaluare din august 2018.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION

Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate,
pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : 7 /

Ion Tudor. - Ed. a 3-a, reviz. și adăug.. - Pitești : Paralela 45, 2019-
2 vol.

ISBN 978-973-47-2999-9

Partea 1. - 2019. - ISBN 978-973-47-3000-1

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

7

Ediția a III-a,
revizuită și adăugită

ÎNVĂȚARE DE ÎNIȚIERE
sustinere, remediere



Editura Paralela 45

CAPITOLUL II

Cercul

Lecția 12. Unghi înscris în cerc



Citesc și rețin

Definiție: Numim **cerc** de centru O și rază R , notat $\mathcal{C}(O, R)$, mulțimea punctelor din plan situate la distanța R față de punctul O .

Definiție: **Măsura** unui cerc este egală cu 360° .

Definiție: Un unghi care are vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**. (În figura alăturată, unghiul $\angle AOB$ este unghi la centru pentru cercul respectiv.)

Definiții:

1. Mulțimea punctelor de pe un cerc situate în interiorul unghiului $\angle AOB$ se numește **arc mic** AB , notat $\widehat{AB}$.

2. Mulțimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului $\angle AOB$

se numește **arc mare** AB , notat $\widehat{AMB}$, unde M este un punct de pe cerc situat în exteriorul unghiului $\angle AOB$ (pentru ambele arce, punctele A și B se numesc **capete** sau **extremități**).

Observație: Măsura arcului de cerc de extremități X și Y se notează $m(\widehat{XY})$.

Definiții:

1. Dacă $\widehat{AB}$ este un arc mic, atunci $m(\widehat{AB}) = m(\angle AOB)$.

2. Dacă $\widehat{AMB}$ este un arc mare, atunci $m(\widehat{AMB}) = 360^\circ - m(\angle AOB)$.

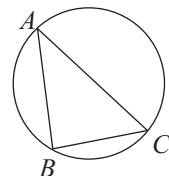
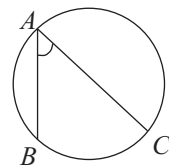
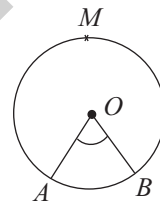
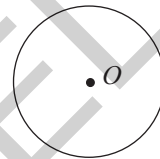
Definiție: Două arce $\widehat{AB}$ și $\widehat{CD}$ ale aceluiași cerc (sau din cercuri congruente) se numesc **congruente**, dacă $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$; se notează $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

Definiție: Un unghi cu vârful pe cerc și ale cărui laturi sunt două coarde ale cercului se numește **unghi înscris în cerc**.

Teoremă: Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale:

$$m(\angle BAC) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}.$$

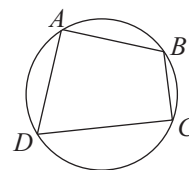
Definiție: Un triunghi se numește **înscris într-un cerc** dacă vârfurile sale aparțin cercului respectiv. În acest caz, spunem că cercul este **circumscriș triunghiului**, centrul său fiind punctul de concurență a mediatoarelor laturilor triunghiului.



Definiție: Un patrulater se numește **patrulater inscriptibil**, dacă există un cerc care conține vârfurile acestuia. Cercul respectiv se numește **cercul circumscris patrulaterului**.

Teoremă: Patrulaterul care are unghiurile opuse suplementare este inscriptibil.

Teoremă: Patrulaterul în care diagonalele formează cu două laturi opuse ale acestuia unghiuri congruente este inscriptibil.



Cum se aplică?

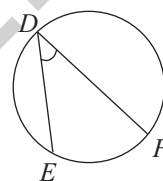
1. Pe un cerc se consideră punctele E și F și punctul D pe arcul mare de extremități E și F .

a) Dacă $m(\widehat{EF}) = 56^\circ$, aflați $m(\angle EDF)$. b) Dacă $m(\angle EDF) = 32^\circ$, aflați $m(\widehat{EF})$.

Soluție:

$$\text{a) } m(\angle EDF) = \frac{m(\widehat{EF})}{2} = \frac{56^\circ}{2} = 28^\circ; \text{ b) } m(\angle EDF) = \frac{m(\widehat{EF})}{2}, \text{ deci}$$

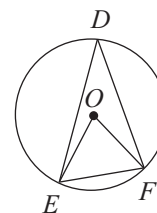
$$32^\circ = \frac{m(\widehat{EF})}{2}, \text{ de unde rezultă că } m(\widehat{EF}) = 32^\circ \cdot 2 \text{ și obținem } m(\widehat{EF}) = 64^\circ.$$



2. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{3} \text{ cm})$ se consideră punctele D, E și F . Știind că $m(\angle EDF) = 30^\circ$, calculați lungimea coardei $[EF]$.

Soluție:

$$m(\angle EDF) = \frac{m(\widehat{EF})}{2} \text{ sau } 30^\circ = \frac{m(\widehat{EF})}{2}, \text{ de unde rezultă că } m(\widehat{EF}) = 60^\circ, \text{ prin urmare } m(\angle EOF) = 60^\circ, \text{ deci } \triangle EOF \text{ este echilateral, prin urmare } EF = R = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

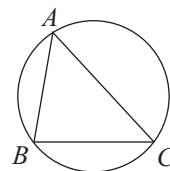


3. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , știind că măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$ sunt direct proporționale cu numerele 10, 11 și 19.

Soluție:

$$\text{Din ipoteză avem } \frac{m(\widehat{AB})}{10} = \frac{m(\widehat{BC})}{11} = \frac{m(\widehat{CA})}{19} = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CA})}{10 + 11 + 19} = \frac{360^\circ}{40} = 9^\circ, \text{ deci } \frac{m(\widehat{AB})}{10} = 9^\circ, \text{ de unde rezultă că } m(\widehat{AB}) = 90^\circ \text{ și analog obținem}$$

$$\begin{aligned} m(\widehat{BC}) &= 99^\circ \text{ și } m(\widehat{CA}) = 171^\circ; m(\angle A) = \frac{m(\widehat{BC})}{2} = \frac{99^\circ}{2} = 49^\circ 30', \\ m(\angle B) &= \frac{m(\widehat{CA})}{2} = \frac{171^\circ}{2} = 85^\circ 30', m(\angle C) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ. \end{aligned}$$





Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

Măsura cercului este egală cu:

- A. 100° ; B. 180° ; C. 360° ; D. 400° .

2. În figura alăturată este reprezentat cercul $\mathcal{C}(O)$ și unghiul la centru $\sphericalangle MON$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Dacă $m(\sphericalangle MON) = 54^\circ$, atunci $m(\widehat{MN}) = \dots\dots\dots$

b) Dacă $m(\widehat{MN}) = 48^\circ$, atunci $m(\sphericalangle MON) = \dots\dots\dots$



3. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar pe arcul mare de extremități E și F se consideră punctul D . Aflați $m(\widehat{EF})$ și $m(\widehat{EDF})$, dacă:

a) $m(\widehat{EDF}) = 5 m(\widehat{EF})$;

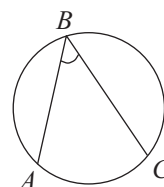
b) $m(\widehat{EDF}) = 4 m(\widehat{EF})$.



4. În figura alăturată este reprezentat un cerc și unghiul $\sphericalangle ABC$ înscris în cercul respectiv. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $m(\sphericalangle ABC) = \frac{m(\widehat{AC})}{3}$; ☐ b) $m(\sphericalangle ABC) = m(\widehat{AC})$; ☐

c) $m(\sphericalangle ABC) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$. ☐

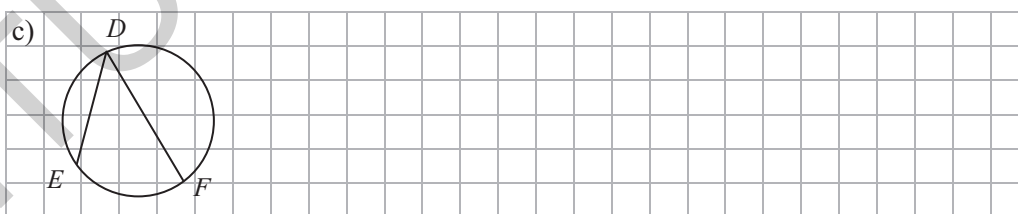


5. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar punctul D este situat pe arcul mare de extremități E și F . Aflați $m(\sphericalangle EDF)$, dacă:

a) $m(\widehat{EF}) = 40^\circ$;

b) $m(\widehat{EF}) = 74^\circ$;

c) $m(\widehat{EF}) = 96^\circ$.

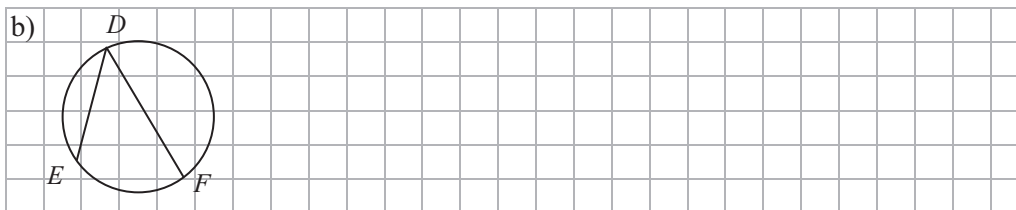


6. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar punctul D este situat pe arcul mare de extremități E și F . Aflați $m(\widehat{EF})$, dacă:

a) $m(\sphericalangle EDF) = 15^\circ$;

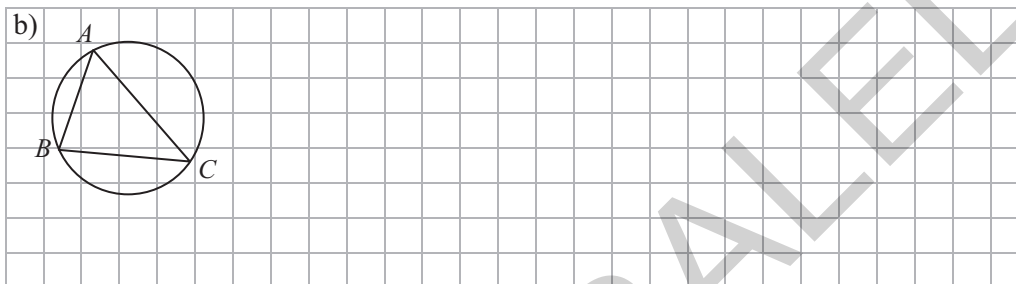
b) $m(\sphericalangle EDF) = 26^\circ$;

c) $m(\sphericalangle EDF) = 45^\circ$.



7. Pe un cerc se consideră punctele A , B și C . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , dacă:

- a) $m(\widehat{AB}) = 72^\circ$ și $m(\widehat{BC}) = 154^\circ$; b) $m(\widehat{BC}) = 61^\circ$ și $m(\widehat{CA}) = 170^\circ$.



8. Pe un cerc se consideră punctele A , B și C . Aflați măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$, dacă:

- a) $m(\sphericalangle A) = 40^\circ$ și $m(\sphericalangle B) = 55^\circ$; b) $m(\sphericalangle B) = 61^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 73^\circ$.



Exerciții și probleme de dificultate medie

9. În cercul $\mathcal{C}(O)$ construieți diametrul $[MN]$. Dacă punctul $P \in \mathcal{C}(O)$, aflați $m(\sphericalangle MPN)$.

10. Fie $\sphericalangle EDF$ un unghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 7\sqrt{5} \text{ cm})$. Dacă $m(\sphericalangle EDF) = 90^\circ$, aflați EF .

11. Se consideră unghiul $\sphericalangle EDF$ înscris în cerc. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle EDF$ intersectează a doua oară cercul în punctul G . Știind că $m(\sphericalangle EDF) = 62^\circ$, arătați că:

- a) $m(\sphericalangle EGF) = 118^\circ$; b) $[GE] \equiv [GF]$; c) $m(\sphericalangle GEF) = 31^\circ$.

12. Pe un cerc se consideră punctele A , B și C . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , dacă măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$ sunt direct proporționale cu numerele:

- a) 5, 6 și 7; b) 5, 7 și 8.

13. Pe un cerc se consideră punctele A, B și C . Aflați măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$, știind că măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ sunt direct proporționale cu numerele:

a) 12, 16 și 17;

b) 17, 20 și 23.

14. Pe un cerc se consideră punctele A, B și C . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , dacă măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$ sunt invers proporționale cu numerele:

a) 10, 12 și 15;

b) 12, 15 și 20.

15. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele A, B și C . Aflați R , raza cercului, dacă:

a) $AB = 7\sqrt{2}$ cm și $m(\sphericalangle ACB) = 45^\circ$;

b) $AB = 9\sqrt{2}$ cm și $m(\sphericalangle ACB) = 45^\circ$.

16. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele D, E și F , astfel încât $m(\sphericalangle EDF) = 45^\circ$. Calculați lungimea coardei $[EF]$ în următoarele cazuri:

a) $R = 6$ cm;

b) $R = 5$ cm.

17. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele A, B și C . Dacă $AB = R$, aflați $m(\sphericalangle ACB)$.

18. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , știind că:

a) $m(\sphericalangle BAO) = 23^\circ$ și $m(\sphericalangle CBO) = 37^\circ$;

b) $m(\sphericalangle CBO) = 37^\circ$ și $m(\sphericalangle ACO) = 39^\circ$.

19. În triunghiul ABC construim înălțimea AD , $D \in (BC)$. O dreaptă care trece prin punctul D , intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor ABD și ACD în punctele E , respectiv F . Arătați că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EAF$.

20. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele E și F , iar pe arcul mare de extremități E și F se consideră punctul D . Știind că $\mathcal{A}_{OEF} = \frac{R^2}{4}$, determinați $m(\sphericalangle EDF)$.

21. Cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt secante în punctele E și F . Prin punctul E construim o dreaptă care intersectează cele două cercuri în punctele A , respectiv B și prin punctul F construim o dreaptă care intersectează cele două cercuri în punctele C , respectiv D . Arătați că $AC \parallel BD$.

22. Se consideră triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și punctul $D \in (BC)$. Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor ABD și ACD sunt congruente.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

23. Dacă ABC este un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O)$ și punctul $D \in \widehat{BC}$, arătați că $AD = BD + CD$.

24. Dacă ABC este un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O)$ și punctul $D \in \widehat{BC}$, astfel încât $\widehat{DB} < \widehat{DC}$, arătați că $d(O, BD) = d(O, CD) + d(O, AD)$.

25. Se consideră segmentul $[AB]$ și punctul $C \in (AB)$. De aceeași parte a dreptei AB , construim pătratele $ACDE$ și $CBPM$. Dacă $AM \cap BD = \{T\}$, arătați că punctele E, T și P sunt coliniare.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 3/2007)



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) 1. Pe un cerc se consideră punctele M și N , iar pe arcul mare de extremități M și N se consideră punctul P . Știind că:
 a) $m(\widehat{MN}) = 54^\circ$, aflați $m(\sphericalangle MPN)$; b) $m(\sphericalangle MPN) = 35^\circ$, aflați $m(\widehat{MN})$.
- (3p) 2. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{5} \text{ cm})$ se consideră punctele D, E și F în această ordine, astfel încât $m(\sphericalangle EDF) = 30^\circ$. Calculați $\mathcal{P}_{OEF}$.
- (3p) 3. Pe un cerc se consideră punctele A, B și C . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , știind că măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$ sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4.

Lecția 13. Coarde și arce în cerc



Citesc și rețin

Teorema 1: În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.

Teorema 2: În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente.

Teorema 3: Într-un cerc, diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei respective.

Teorema 4: Dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele de cerc cuprinse între acestea sunt congruente.

Teorema 5: În același cerc sau în cercuri congruente, coardele congruente sunt egal depărtate de centrul cercului.

Teorema 6: În același cerc sau în cercuri congruente, coardele egal depărtate de centrul cercului sunt congruente.



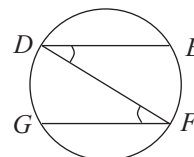
Cum se aplică?

1. Pe un cerc se consideră punctele D, E, F și G în această ordine, astfel încât $\widehat{EF} \equiv \widehat{DG}$. Arătați că $DE \parallel GF$.

Soluție:

Se observă că $m(\sphericalangle EDF) = \frac{m(\widehat{EF})}{2}$ și $m(\sphericalangle DFG) = \frac{m(\widehat{DG})}{2}$ și,

deoarece $\widehat{EF} \equiv \widehat{DG}$, rezultă că $\sphericalangle EDF \equiv \sphericalangle DFG$ (alterne interne), de unde rezultă că $DE \parallel GF$.



Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ	5
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional.....	8
Lecția 2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical	12
Lecția 3. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	15
Lecția 4. Modulul unui număr real.....	18
Lecția 5. Compararea și ordonarea numerelor reale.....	22
Lecția 6. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări.....	26
Teste de evaluare sumativă	30
Lecția 7. Adunarea și scăderea numerelor reale.....	31
Lecția 8. Înmulțirea numerelor reale	36
Lecția 9. Puterea cu exponent număr întreg a numerelor reale	41
Lecția 10. Împărțirea numerelor reale	45
Lecția 11. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$; $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $b > 0$	50
Teste de evaluare sumativă	55
Lecția 12. Media aritmetică și media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$	57
Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive	61
Lecția 14. Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	64
Teste de evaluare sumativă	67
Fișă pentru portofoliul elevului.....	69
Probleme din realitatea cotidiană.....	71

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex.....	73
Lecția 2. Paralelogramul	77
Lecția 3. Dreptunghiul	82
Lecția 4. Rombul	86
Lecția 5. Pătratul	90
Lecția 6. Linia mijlocie în triunghi.....	94
Lecția 7. Centrul de greutate al triunghiului.....	99
Teste de evaluare sumativă	102
Lecția 8. Trapezul. Trapezul isoscel.....	104
Lecția 9. Linia mijlocie în trapez.....	109
Lecția 10. Perimetrul și aria triunghiului.....	113
Lecția 11. Perimetrul și aria patrulaterului	117
Teste de evaluare sumativă	124
Fișă pentru portofoliul elevului	125
Probleme din realitatea cotidiană.....	127

CAPITOLUL II. CERCUL

Lecția 12. Unghi înscris în cerc.....	130
Lecția 13. Coarde și arce în cerc	135
Lecția 14. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc.....	139
Lecția 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc.....	143
Lecția 16. Lungimea cercului și aria discului.....	147
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	151
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	152
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	154

MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL I	157
--	-----

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ	159
---	-----

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	163
--------------------------------------	-----