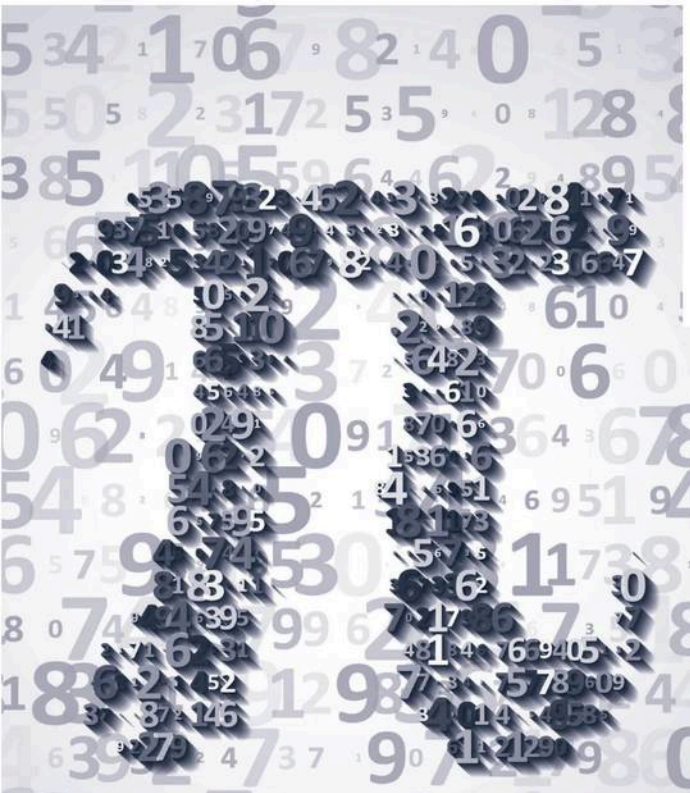
Alina Paraschiv (coordonator)
Emilia Iancu
Florentina Enea
Gabriela Chircă
Daniela Minculeț
Ancuța Dună
Eugenia Dincă
Raluca Stoican
Cristina Bița
Alina-Luciana Dumitrescu

9 Matematică

Exerciții și probleme

✓ breviar teoretic ✓ rezolvări pas cu pas ✓ teste sumative
✓ răspunsuri și indicații



- **Trunchi comun (TC)**, filiera teoretică, profilul umanist, toate specializările; filiera tehnologică, toate profilurile, toate calificările profesionale; filiera vocațională, profilurile artistic, pedagogic, sportiv și teologic, toate specializările – clasa a IX-a
- Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea **științe ale naturii**

EDITURA CD PRESS
www.cdpress.ro

Cuprins

TESTE PREDICTIVE 6
MULȚIMEA NUMERELOR REALE – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 9
Breviar teoretic 9
- Operații algebrice cu numere reale; proprietăți 14
- Formule de calcul prescurtat 20
- Raționalizarea numitorilor 26
- Structura de ordine a mulțimii numerelor reale: reprezentarea pe axă, compararea și ordonarea numerelor reale, aproximări 32
- Modulul unui număr real 39
- Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real 45
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice 50
- Test de evaluare 55

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ 56
- Breviar teoretic 56
- Propoziții și predicate 59
- Operatii logice cu propoziții și predicate 62
- Reguli de negare. Cuantificatori 68
- Metoda reducerii la absurd – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 70
- Metoda inducției matematice – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 72
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice 77
- Test de evaluare 81

POLINOAME CU COEFICIENȚI REALI – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 85
- Breviar teoretic 85
- Forma algebrică a unui polinom 89
- Operații cu polinoame: adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar 92
- Împărțirea polinoamelor. Divizibilitatea polinoamelor 96
- Rădăcinile reale ale polinoamelor. Teorema lui Bezout 101
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice 105
- Test de evaluare 109

PROGRESII ARITMETICE ȘI PROGRESII GEOMETRICE 110
- Breviar teoretic 110
- Progresii aritmetice 111
- Progresii geometrice 118
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice 128
- Test de evaluare 134

ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ 135
- Breviar teoretic 135
- Reper cartezian în plan; coordonatele carteziene ale unui punct din plan 137
- Distanța dintre două puncte în plan; coordonatele mijlocului unui segment 140
- Drepte verticale, drepte orizontale, drepte oblice. Panta unei drepte 143
- Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are panta dată 146
- Ecuația dreptei care trece prin două puncte date 148
- Intersecțiile dreptei cu axele de coordonate 151
- Pozițiile unei drepte față de axele de coordonate – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 153
- Pozițiile relative a două drepte în plan – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 157
- Ecuația cercului – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 161
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice 165
- Test de evaluare 170

FUNCȚII 171
- Breviar teoretic 171
- Funcția afină 181
- Funcția de gradul al doilea 192
- Operații cu funcții și compunerea funcțiilor (*compunerea funcțiilor este conținut exclusiv pentru științele naturii)* 204
- Funcția putere cu exponent întreg – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 211
- Funcția radical de ordinul doi 215
- Funcția radical de ordinul trei – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 222
- Funcția exponențială 226
- Funcția logaritmică 234
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice 245
- Test de evaluare 256

ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE 258
- Breviar teoretic 258
- Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic 260
- Cercul trigonometric 264
- Studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0,2\pi]$ 268
- Studiul funcției tangentă pe intervalul $[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ 271
- Formule trigonometrice de bază. Reducerea la primul cadran 275
- Teorema sinusurilor – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 280
- Teorema cosinusului. Rezolvarea triunghiurilor oarecare – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 284
- Aria triunghiului; ariile unor suprafețe poligonale – *conținut exclusiv pentru științele naturii* 288
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice 292
- Teste de evaluare 297

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII DE REZOLVARE 299

7. **Folosim sensul de variație(monotonia) a graficului.** Rezolvați inecuațiile. Precizați când sensul inegalității se păstrează și când se inversează.

a)$\lg x \geq -1$; b)$\ln(x+2) < 1$; c)$\log_{1/10}(3x-1) > \log_{1/10} 5$; d)$\log_{1/e}(7-x) \leq \log_{1/e} 3$;

e)$\lg x^2 > 0$; f)$\ln(2-x) \geq 0$.

8. În același sistem de axe sunt reprezentate funcțiile $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ și dreapta $y = x$.(figura 33)

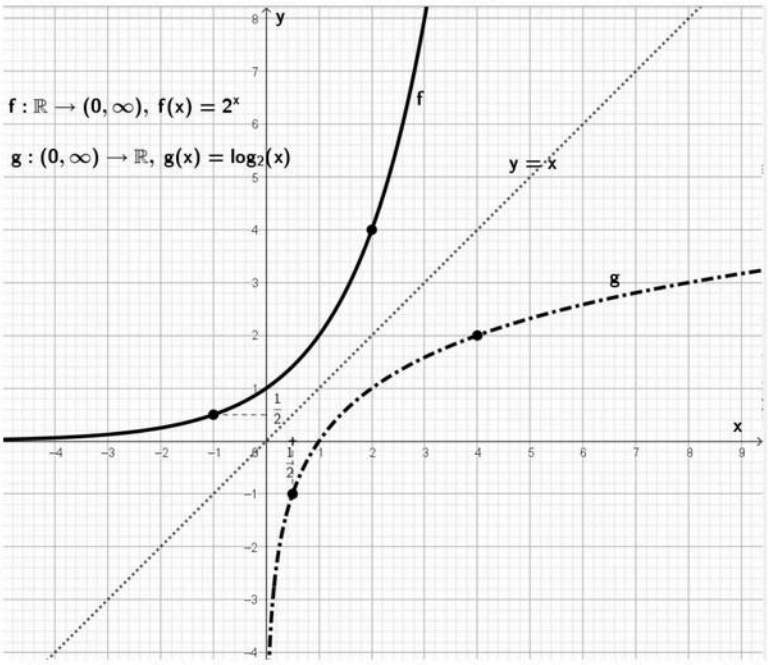


Figura 33. Graficele funcțiilor exponențială și logaritmică inverse

a) Completați perechile de puncte corespondente:

$\left(-2, \frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (\ldots,\ldots)$, $(0,1) \leftrightarrow (\ldots,\ldots)$, $(2,4) \leftrightarrow (\ldots,\ldots)$.

b) Comparați domeniul și imaginea celor două funcții.

c) Explicați de ce graficele sunt simetrice față de prima bisectoare.

d) Verificați relațiile $g(f(x)) = x$, pentru $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

și $f(g(x)) = x$, pentru $x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}$.

9. Se consideră funcțiile $f(x)=\lg x$ și $g(x)=\ln x$. Graficele lor sunt reprezentate în acelaşi reper cartezian, în figura 34.

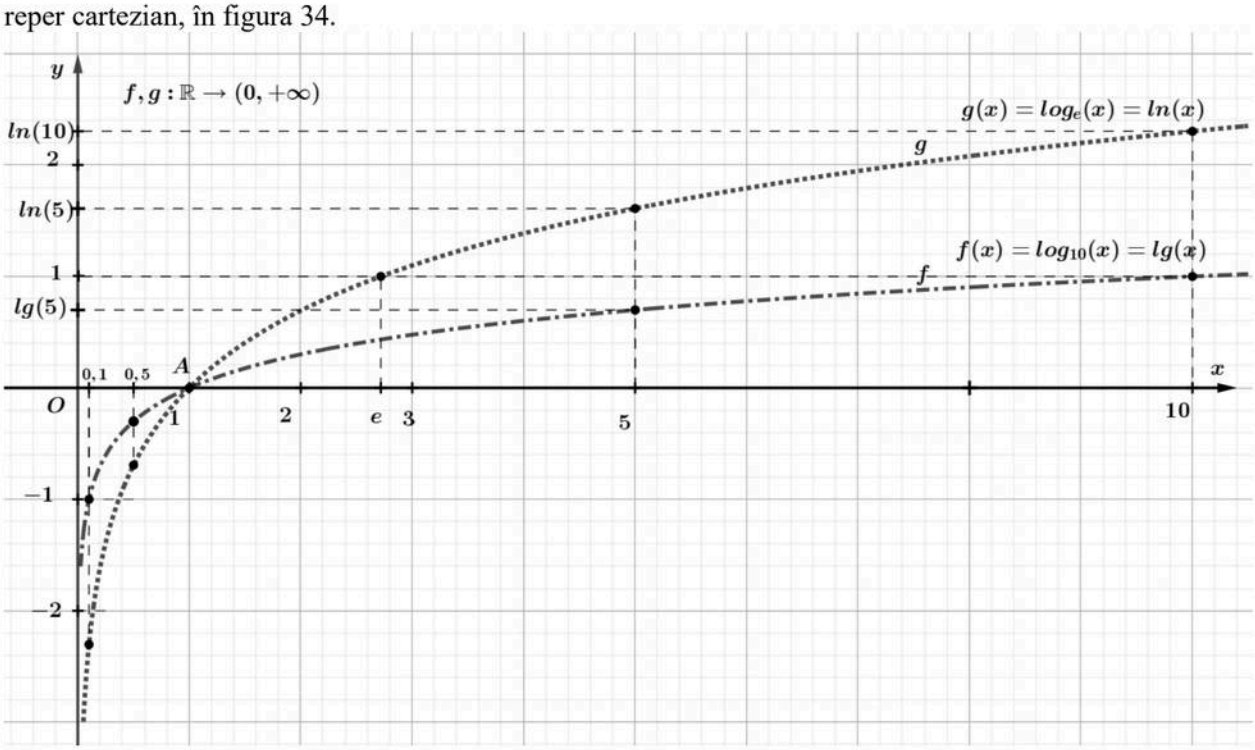


Figura 34. Graficele funcțiilor logaritm zecimal și logaritm natural

a) Urmărind graficul, ordonați crescător valorile:
$-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ln(0{,}1),\ \lg(0{,}1),\ \ln e,\ \lg e,\ \ln 5,\ \lg 5,\ \ln 10,\ \lg 10$.
b) Precizați punctul comun, domeniul, imaginea și asimptota celor două grafice.
c) Rezolvați grafic inecuația $\ln x \le \lg x$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE SINTEZĂ ȘI APLICAȚII PRACTICE[2]

Probleme de sinteză

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(p+3)x+p^2-4$, unde $p\in\mathbb{R}$.
a) Determinați $p\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f este descrescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.
b) Pentru $p=-2$, reprezentați grafic funcția $g:(-\infty,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.
c)* Pentru $p=\sqrt{3}$, rezolvați ecuația $\left|f(x)-x\sqrt{3}\right|=(f\circ f)(0)+f(1)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2-4m)x+m-1$, unde $m\in\mathbb{R}$.
a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $P\left(\frac{1}{2},m+3\right)$ aparține graficului funcției f.
b) Determinați mulțimea valorilor lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f este monoton crescătoare.
c) Pentru $m=0$, rezolvați inecuația $\frac{f(x)}{x+3}\le 1$.
d) Pentru $m=0$, rezolvați ecuația $|f(x)|+|3-x|=4$.

[2] Problemele cu *) reprezintă conținut exclusiv pentru științele naturii.

e) Pentru $m=0$, rezolvați sistemul de inecuații $\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x+3}\le 1\\ |x-3|<15\end{cases}$.

f) Pentru $m=0$, reprezentați grafic funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\max\left(f(x),x+2\right)$, unde $\max(a,b)=\begin{cases}a, \text{ dacă } a\ge b\\ b, \text{ dacă } a<b\end{cases}$.

3. Se consideră funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=\begin{cases}x-1, & x<2\\ 2x-3, & x\ge 2\end{cases}$,

$h(x)=\begin{cases}1-3x, & x<-1\\ 2x+1, & x\ge -1\end{cases}$.

a) Reprezentati grafic funcțiile f,g,h.

b) Rezolvați ecuațiile: (i) $f(x)+\dfrac{2}{f(x)}=3$; (ii) $|f(x)|=x+1$.

c) Rezolvati inecuatiile: (i) $f(x)>0$; (ii) $\dfrac{1}{f(x)}<0$; (iii) $\dfrac{x-1}{f(x)}\ge 1$; (iv) $|f(x)|+x<2$.

d)* Rezolvați ecuația $(f\circ f)(x)=9$.

e)* Determinați $g\circ f$, $f\circ g$, $h\circ f$ și $f\circ h$.

4. Punctul $V(1,-4)$ este vârful parabolei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$, cu $a,b\in\mathbb{R}$. Calculați $f(-2)$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x+m$, cu $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care valoarea minimă a funcției este egală cu 1.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcției:

i) nu intersectează axa Ox;

ii) este tangentă axei Ox;

iii) are două puncte distincte comune cu axa Ox.

6. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuație $x=-1$ este axa de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx+1$.

7. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+4mx+3$ este descrescătoare pe intervalul $[-2;+\infty)$.

8. Se consideră funcțiile de gradul al doilea $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+9x+1$ și $g(x)=-x^2+2x-1$.

a) Reprezentaţi grafic funcţiile f și g.

b) Determinaţi axele de simetrie ale celor două funcții.

c) Determinaţi valorile extreme ale celor două funcții.

d) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcțiilor f și g.

e) Determinaţi imaginea funcțiilor f și g.

f) Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

g) Rezolvaţi inecuaţiile: (i) $\dfrac{f(x)}{8x+4}\le 1$; (ii) $(x+2)\cdot g(x)\le 0$.

9. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4-x^2$.

a) Reprezentați grafic funcțiile f și g.

b) Stabiliți monotonia funcțiilor f și g.

c) Determinați mulțimea valorilor parametrului real m cu proprietatea că ecuația $(f\circ g)(x)=4x+m$ nu are nicio soluție reală.

d) Rezolvați inecuația $\frac{f(x)+4}{g(x)}\le 1$.

e) Determinați numerele reale m pentru care valoarea maximă a funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=g(x)+mx$ este egală cu 5.

10. Reprezentați grafic, cu ajutorul unei aplicații digitale, în același reper cartezian, funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și precizați pentru fiecare dintre ele monotonia, semnul și imaginea:

a) $f(x)=x^3$; $g(x)=x^3+1$; $h(x)=(x+1)^3$;

b) $f(x)=x^4$; $g(x)=x^4-1$; $h(x)=(x-1)^4$.

11. Reprezentați grafic, cu ajutorul unei aplicații digitale, funcțiile următoare, pe domeniul maxim de definiție: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x}+3$, $h(x)=\sqrt{x+3}$, $k(x)=\sqrt{3-x}$, $u(x)=\sqrt[3]{x-1}$, $v(x)=1-\sqrt[3]{x}$.
Stabiliți care dintre funcțiile date intersectează axele de coordonate.
Rezolvați ecuațiile: $f(x)=x$, $g(x)=h(x)$, $f(x)=k(x)$, $u(x)=-2$ și $u(x)=v(x)$.

12. Reprezentați grafic funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{|x|}$ și $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. Determinați imaginile celor două funcții și ecuațiile asimptotelor, dacă acestea există.
Rezolvați ecuațiile $f(x)=2$, $g(x)=2$ și $f(x)=g(x)$.
Rezolvați inecuațiile: $f(x)\le 2$, $g(x)\ge\frac{1}{2}$ și $f(x)\ge g(x)$.

Aplicații practice

13. **Calea ferată între două orașe**. Două trenuri pleacă simultan din orașele A și B, aflate la 240 km distanță, și se deplasează unul spre celălalt. Trenul care pleacă din A are viteza constantă de 80 km/h, iar trenul care pleacă din B are viteza constantă de 60 km/h. În primele trei ore, dacă t reprezintă timpul, în ore, măsurat de la plecare, pozițiile trenurilor față de orașul A sunt descrise de funcțiile $f(t)=80t$ și $g(t)=240-60t$.

a) Completați tabelul.

t (ore)	0	1	2	3
$f(t)$ (km)				
$g(t)$ (km)				

b) Folosind valorile din tabel, reprezentați cele două grafice în același sistem de axe. Notați timpul pe axa orizontală și poziția față de orașul A pe axa verticală. Indicație pentru grafic: Pe axa orizontală (Ot — timpul, în ore), alegeți o unitate convenabilă pentru timp (1 unitate = 1 oră, de exemplu, 2 cm). Pe axa verticală (Od — distanța, în km), alegeți o scară convenabilă în care 1 unitate (de exemplu, 1 cm) reprezintă 20 km. Astfel, distanța maximă de 240 km va fi reprezentată prin 12 căsuțe (cm) pe axa verticală.
c) Citiți pe grafic momentul și locul întâlnirii celor două trenuri. Verificați răspunsul prin calcul.
d) Precizați care tren ajunge primul la jumătatea traseului și explicați răspunsul.
e) Precizați cât durează călătoria între cele două orașe, cu fiecare dintre trenuri.
f) Interpretați în context semnul coeficientului lui t din legea fiecărei funcții.

14. **Economii cu dobândă**. Mara depune 2 000 de lei într-un cont cu dobândă anuală de 5%. Dobânda se adaugă la suma din cont la sfârșitul fiecărui an. După n ani, suma este modelată de funcția $S(n)=2000\cdot 1{,}05^n$, pentru $n\in\{0,1,2,3,4\}$.

n (ani)	0	1	2	3	4
$S(n)$ (lei)					

a) Completați tabelul, rotunjind sumele la cel mai apropiat leu.
b) Reprezentați punctele obținute într-un sistem de axe și schițați evoluția sumei.
c) Cu cât crește suma în primul an? Dar în al patrulea an? Comparați cele două creșteri.
d) Explicați de ce sporul anual nu rămâne constant, deși procentul dobânzii este același.
e) Interpretați în context numerele 2 000 și 1,05 din formula funcției.

15. **Atenuarea luminii.** Un fascicul de lumină, care are inițial intensitatea de 64 de unități, traversează un pachet compact din panouri de sticlă fumurie. Fiecare panou lasă să treacă jumătate din intensitatea luminii primite. După traversarea a n panouri, intensitatea este modelată de funcția:

$$I(n)=64\left(\frac{1}{2}\right)^n, n\in\mathbb{N}.$$

Graficul modelului este reprezentat în figura 35. *În contextul problemei, sunt relevante punctele cu abscise naturale, deoarece numărul panourilor este un număr natural.*
a) Citiți din grafic intensitatea luminii după 0, 1, 2, 3, 4 și 5 panouri. Verificați valorile folosind formula funcției.
b) După câte panouri intensitatea luminii devine cel mult 4 unități?
c) Comparați $I(n+1)$ cu $I(n)$ și interpretați în context factorul $\frac{1}{2}$.
d) Numărul teoretic de panouri necesare pentru ca intensitatea să ajungă la i unități este dat de funcția:

$$N(i)=\log_2\left(\frac{64}{i}\right), 0<i\le 64.$$

Calculați $N(64)$, $N(32)$, $N(16)$, $N(8)$, $N(4)$ și $N(2)$. Explicați apoi, fără a reface toate calculele, de ce: $N\left(\frac{i}{2}\right)=N(i)+1$.

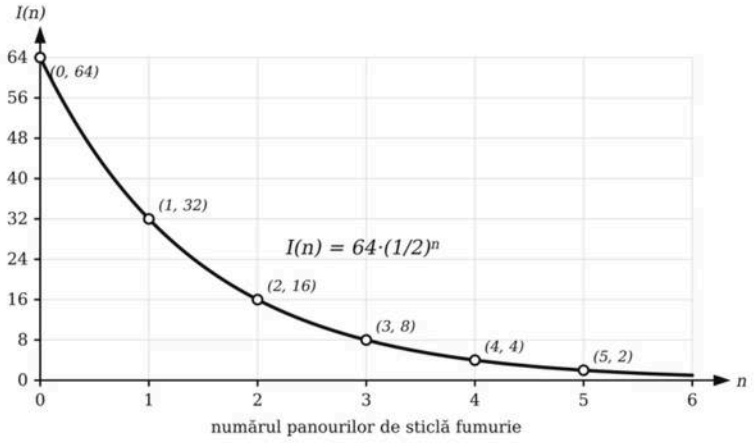


Figura 35. Graficul *Atenuarea luminii*

16. **Scara decibelilor.** Nivelul sonor se exprimă în decibeli și poate fi calculat cu formula $L=10\cdot lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$, unde I este intensitatea sunetului, iar I_0 este intensitatea de referință.(figura 36)

Considerăm sunete pentru care $I=10^k\cdot I_0$, k număr întreg.

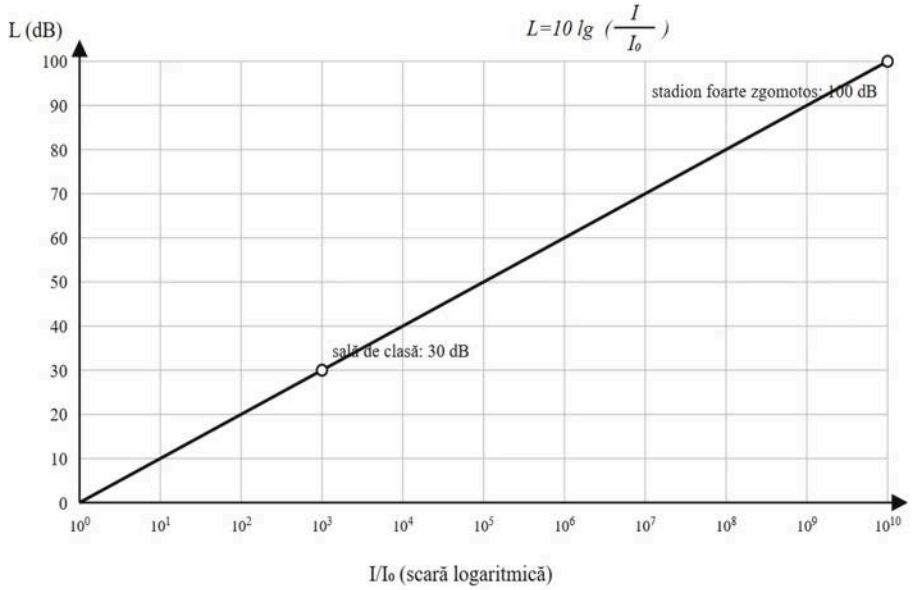


Figura 36. Nivelul sonor pe scară logaritmică

a) Completați tabelul.

k	0	1	3	6	10
$\frac{I}{I_0}$					
L (dB)					

b) Într-o sală de clasă liniștită se măsoară aproximativ 30 dB, iar pe un stadion foarte zgomotos, aproximativ 100 dB. Determinați de câte ori este mai mare intensitatea sunetului de pe stadion decât cea din sala de clasă.
c) Ce modificare a intensității produce o creștere cu 10 dB a nivelului sonor?
d) Explicați de ce o scară logaritmică este potrivită pentru compararea unor intensități foarte diferite.

17. **Scara pH.** Aciditatea unei soluții este descrisă cu ajutorul pH-ului. Dacă c este concentrația ionilor de hidrogen, exprimată în mol/L, atunci $pH=-lg(c)$.

a) Completați tabelul.

c (mol/L)	**0,01**	**0,001**	**0,0001**	**0,00001**	**0,000001**
pH					

b) Folosind valorile din tabel, reprezentați grafic dependența pH-ului de concentrația c. Precizați sensul de variație al funcției. **Indicație:** Pe axa orizontală, fiecare unitate reprezintă o putere succesivă a lui 10: 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}. Dacă am folosi valorile reale, acestea s-ar inghesui către 0. De aceea folosim *o scală (scară) logaritmică*. (*vezi* Rezolvări, *la final*)
c) O probă de apă are pH-ul egal cu 6. Determinați concentrația ionilor de hidrogen.
d) Două soluții au pH-urile 3, respectiv 5. Care dintre ele este mai acidă? De câte ori este mai mare concentrația ionilor de hidrogen în această soluție?
e) Explicați de ce scăderea pH-ului cu o unitate corespunde înmulțirii concentrației ionilor de hidrogen cu 10.
Observăm. Scara pH este descrescătoare: o valoare mai mică a pH-ului indică o concentrație mai mare a ionilor de hidrogen.

18. **Concentrația unui medicament.** După administrarea unui medicament, concentrația substanței active este modelată prin $C(t)=\frac{6t}{t^2+4}$, pentru $t\geq 0$, unde t este timpul în ore, iar $C(t)$ se măsoară în mg/L (figura 37).

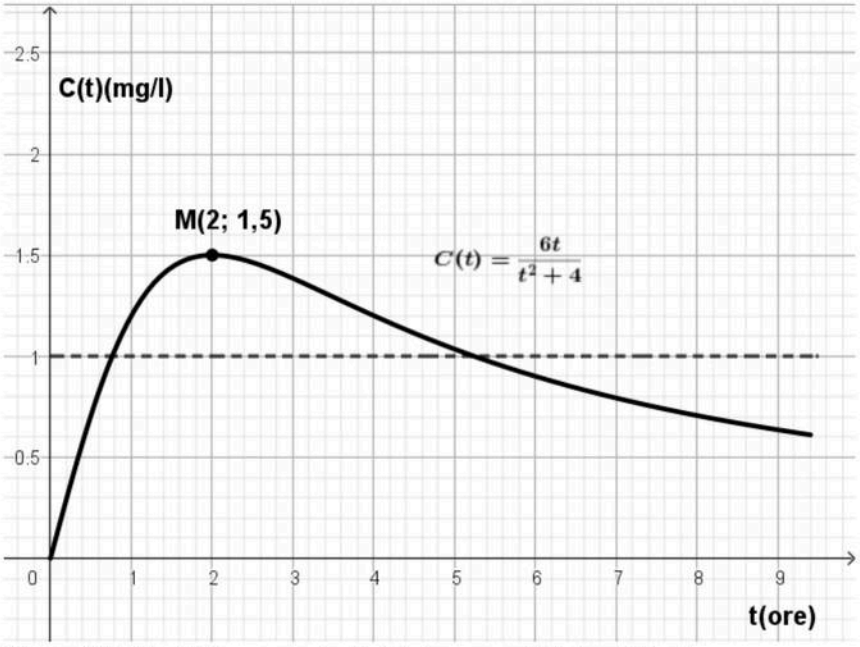


Figura 37. Evoluția concentrației într-un model simplificat

a) Calculați concentrațiile $C(0)$, $C(1)$, $C(2)$ și $C(4)$.

b) Precizați care este valoarea maximă a concentrației medicamentului (mg/L) și momentul în care este atinsă.

c) Medicamentul este eficient cât timp $C(t) \geq 1$. Determinați intervalul de eficiență.

d) Descrieți evoluția concentrației în timp, pe baza graficului.

19. **Timpul de așteptare la intrarea într-un sens giratoriu.** Un sens giratoriu poate prelua cel mult 24 de mașini pe minut. Pentru un flux de x mașini pe minut, timpul mediu de așteptare este modelat prin $T(x) = \frac{12}{24-x}$, unde $x \in [0,24)$ și $T(x)$ se măsoară în secunde (figura 38).

a) Calculați $T(0)$, $T(12)$, $T(18)$, $T(21)$ și $T(23)$.

b) Precizați monotonia funcției pe domeniul dat și interpretați-o în context.

c) Explicați ce se întâmplă când x se apropie de 24 –de exemplu, numărul 23,6 pe care l-am interpreta astfel: „ A 24-a mașină a forțat intrarea în sensul giratoriu.”

d) Ce semnificație au dreapta $x = 24$ și restricția $x < 24$ în model?

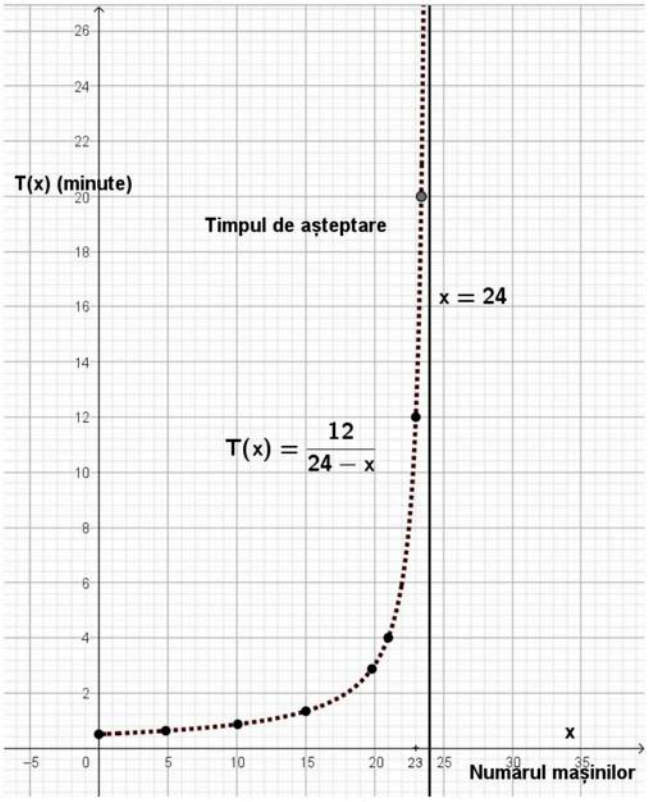


Figura 38. Timpul de așteptare crește rapid în apropierea capacității maxime

20. **Altitudinea zborului.** Un controlor de trafic aerian urmărește pe ecranul radarului evoluția altitudinii unui avion de linie comercial care decolează din București. În primele două faze ale zborului, altitudinea $h(t)$ (exprimată în mii de metri) în funcție de timpul t (exprimat în minute) este modelată de funcția (figura 39):

$$h:[0,)\to\mathbb{R},\quad h(t)=\begin{cases}\dfrac{12t}{t+4}, & \text{pentru } 0\le t\le 26\\ 10{,}4\ , & \text{pentru } t>26\end{cases}$$

a) Completați tabelul de mai jos pentru a urmări evoluția altitudinii în prima jumătate de oră de la decolare:

t (min)	0	4	12	26	30
$h(t)$ (mii m)	...	...	...	...	...

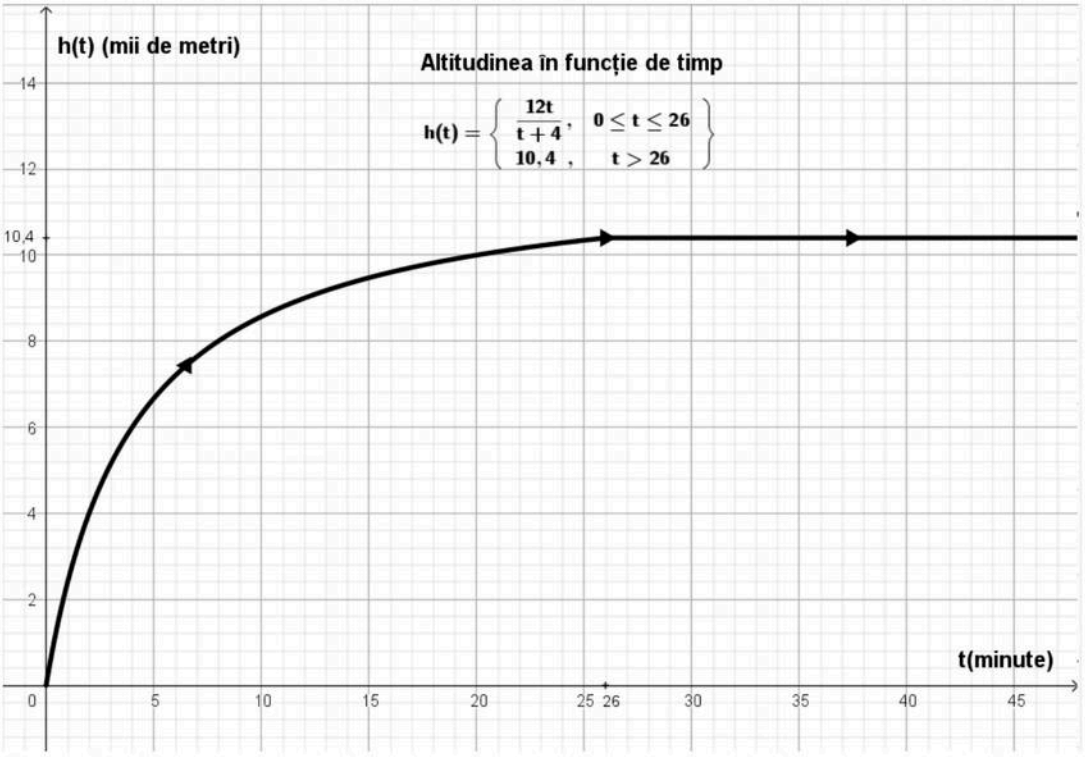


Figura 39. Altitudinea avionului

b) Reprezentați grafic funcția $h(t)$ în GeoGebra (sau pe foaie). Identificați pe grafic punctul $A(26;10,4)$ și descrieți ce se întâmplă cu traiectoria avionului după minutul 26.

c) *Comportament asimptotic.* În lipsa plafonării de la minutul 26, care ar fi fost altitudinea maximă teoretică spre care tindea funcția $f(t)=\dfrac{12t}{t+4}$ atunci cand t ar fi crescut oricat de mult („la infinit")? De ce este necesară din punct de vedere fizic/aerodinamic introducerea celei de-a doua ramuri $(h(t)=10,4$ pentru $t>26)$?

d) Un senzor de la bord declanșează semnalul de „Permisiune pentru deplasare în cabină" în momentul în care avionul atinge altitudinea de 8000 metri. Determinați după câte minute de la decolare pot pasagerii să își desfacă centurile de siguranță.

21. **Antrenament de alergare**. Graficul din figura 40 ilustrează evoluția vitezei de alergare v (exprimată în km/h) a unui atlet în funcție de timpul t (exprimat în minute), pe parcursul unei ședințe de recuperare musculară. Atletul execută mai întâi o încălzire pe loc de 1 minut , după care își începe alergarea, crescând treptat și liniar viteza până la 12 km/h . Menține această viteză constantă timp de 2 minute , iar în final reduce treptat viteza până la oprirea completă.

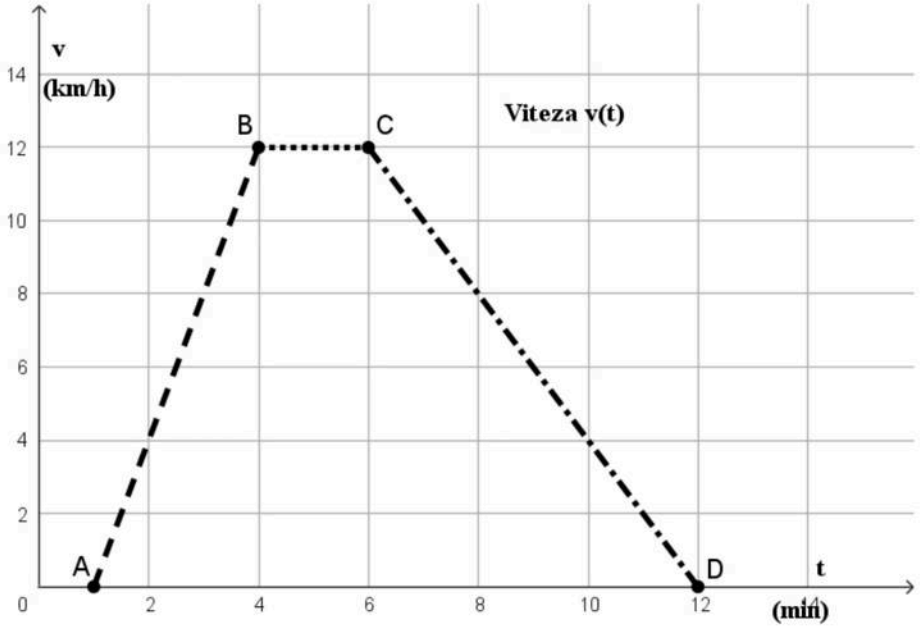


Figura 40.Viteza alergătorului

a) Citiți graficul și interpretați fizic:

i) Identificați coordonatele punctelor A,B,C,D de pe grafic și precizați semnificația lor în desfășurarea antrenamentului.

ii) Determinați durata totală a alergării (fără minutul de încălzire pe loc) și precizați intervalul de timp în care atletul a alergat cu viteză constantă.

b) În Figura 20, segmentele $[AB]$, $[BC]$ și $[CD]$ sunt reprezentările grafice a trei funcții afine f,g,h.

i) Privind viteza ca o funcție unitară $v:D\to\mathbb{R}$, precizați domeniul maxim de definiție D al acestei mișcări și imaginea funcției (mulțimea valorilor), $\operatorname{Im} v = v(D)$.

ii) Determinați domeniul de definiție, codomeniul și legea de corespondență pentru fiecare dintre funcțiile afine f,g,h corespunzătoare celor trei segmente.

iii) Scrieți legea funcției pe intervale $v:D\to\mathbb{R}$, care descrie viteza de alergare pe tot parcursul mișcării:

$$v(t)=\begin{cases}\ldots\ldots\ldots, & t\in[1,4]\\ \ldots\ldots\ldots, & t\in(4,6]\\ \ldots\ldots\ldots, & t\in(6,12]\end{cases}$$

c) Determinați răspunsurile la următoarele întrebări:

i)La ce momente de timp $t\in[1,12]$ viteza atletului este de exact 8 km/h ?

ii)Un senzor inteligent și activ emite un semnal sonor atunci când viteza atletului este de cel puțin 6 km/h . Care este intervalul de timp în care senzorul a fost activ.

d) Aplicație interdisciplinară (Matematică & Fizică - *Opțional*). Distanța totală parcursă S (în kilometri) este egală cu aria suprafeței delimitate de graficul vitezei și axa Ot (aria trapezului $ABCD$), cu condiția exprimării timpului în ore ($1\min=\frac{1}{60}$ h). Calculați distanța totală parcursă de atlet în timpul total de alergare.

22. **Confruntarea avatarelor (parabolă vs. exponențială).** Doi elevi, Alex și Bogdan, testează un joc video 2D și își programează evoluția avatarelor. În cadrul modulului de simulare (reprezentat în figura 9), este monitorizată altitudinea h (poziția pe verticală) a fiecărui avatar în funcție de timpul $t\geq 0$ (exprimat în secunde). Legile de mișcare pe verticală ale celor două avatare sunt descrise de funcțiile:

- Avatarul lui Alex (parabola):

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f(t)=\frac{t^2}{9}$$

- Avatarul lui Bogdan (exponențiala):

$$g:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\quad g(t)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^t$$

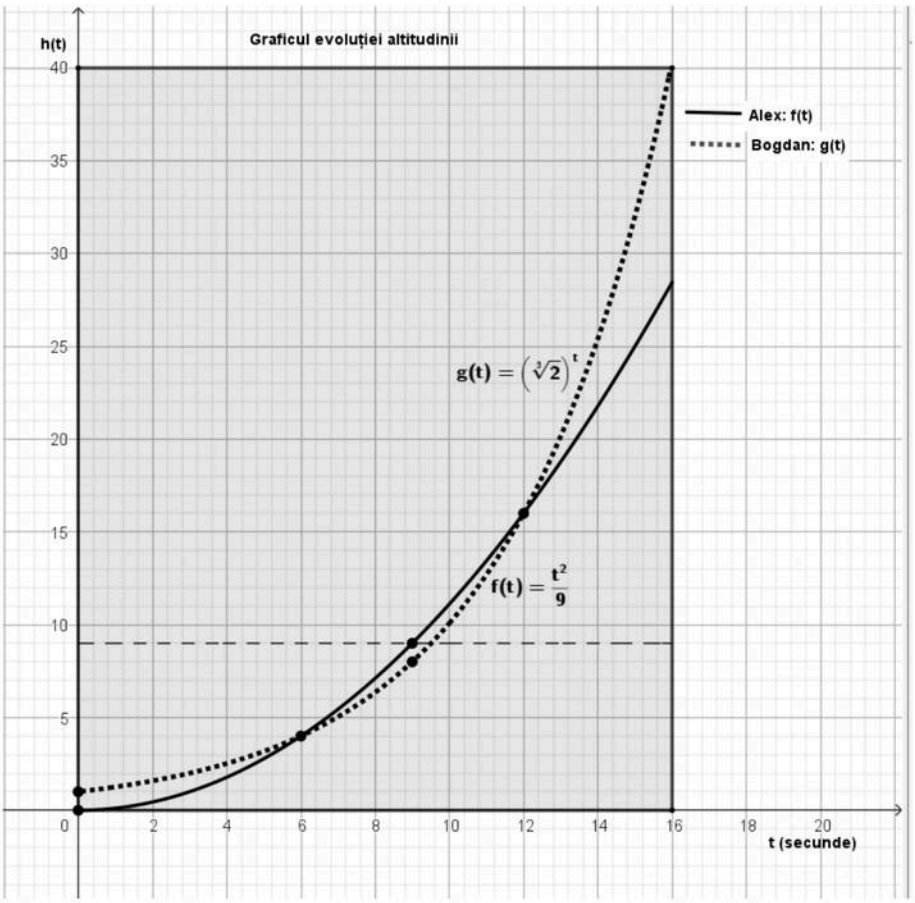


Figura 41. Parabola *versus* exponenţiala

Utilizând graficul din figura 41, rezolvați următoarele cerințe:
a) Precizați altitudinea de la care pleacă fiecare avatar la momentul startului ($t=0$).
b) Determinați prin calcul direct altitudinea ambelor avatare la momentele $t=3$ s și $t=6$ s. Care avatar conduce cursa în acest interval?
c)Identificați pe grafic momentele de timp $t\in[0,16]$ la care cele două avatare se află la aceeași altitudine și confirmați aceste valori prin calcul algebric.
d)Precizați intervalul de timp în care avatarul lui Alex se află strict deasupra avatarului lui Bogdan.
e) Pe ecran este marcată o barieră de energie la altitudinea $h=9$ (reprezentată prin linia întreruptă orizontală). Determinați momentele exacte de timp t la care fiecare avatar atinge această barieră.
f) Determinați momentul de timp t la care avatarul lui Bogdan ajunge la altitudinea $h=64$.
g) Determinați mulțimea soluțiilor inecuației $f(t)\geq 4$ pentru $t\geq 0$.
h) Formulați o concluzie privind evoluția celor două avatare pentru $t>12$ secunde.

23. **Trenuri pe hartă.** Harta feroviară a regiunii este raportată la un sistem de axe ortogonale xOy având originea $O(0,0)$ în Capitală (considerată kilometrul zero) (figura 42). Poziția oricărui oraș este definită în raport cu Capitala prin direcțiile cardinale: Vest ($x<0$), Est ($x>0$), Sud ($y<0$) și Nord ($y>0$). Două trenuri InterCity pleacă simultan, la ora $12:00$, pe rute fără oprire:

- Primul tren pleacă din orașul $A(-2,-5)$, aflat în sud-vestul capitalei, și merge spre orașul $B(4,13)$, aflat în nord-est, pe traseul descris de segmentul $[AB]$.
- Al doilea tren pleacă din orașul $C(-3,8)$, aflat în nord-vestul capitalei, și merge spre orașul $D(10,-5)$, aflat în sud-est, pe traseul descris de segmentul $[CD]$.

Ambele trenuri circulă cu o viteză constantă $v = 80$ km/h , iar 1 unitate pe hartă corespunde unei distanțe reale de 10 km .

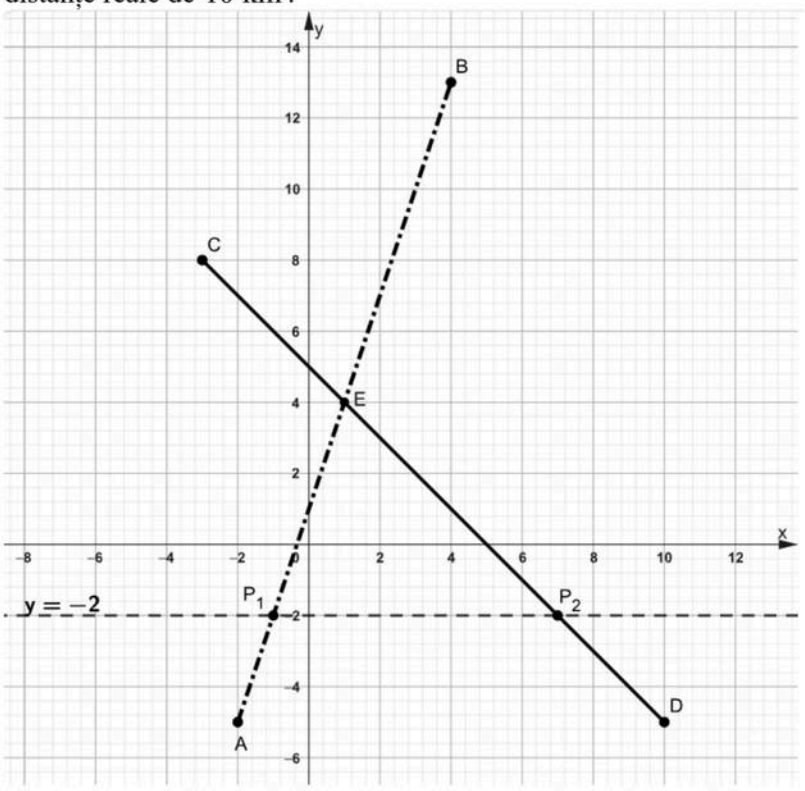


Figura 42. Harta feroviară

a) Identificarea nodului feroviar

Determinați prin citire grafică coordonatele punctului E în care se intersectează cele două căi ferate (nodul feroviar al regiunii).

b) Analiza de risc: Se ciocnesc cele două trenuri?

i) Calculați distanțele reale AE și CE parcurse de fiecare tren de la orașul de plecare până la nodul feroviar E.

ii) Determinați orele exacte la care fiecare tren trece prin nodul feroviar E. Formulați o concluzie privind riscul unei coliziuni.

c) Exprimarea analitică a segmentelor de drum. Determinați legile de corespondență și domeniile de definiție ale funcțiilor afine $f: D_f \to \mathbb{R}$ și $g: D_g \to \mathbb{R}$ ale căror reprezentări grafice sunt segmentele închise $[AB]$, respectiv $[CD]$.

d) Traversarea râului și distanța dintre poduri. Un râu rectiliniu situat la Sud de Capitală este modelat de dreapta de ecuație $y = -2$. Cele două căi ferate traversează râul prin podurile P_1 (pe traseul $[AB]$) și P_2 (pe traseul $[CD]$).

i) Determinați prin calcul algebric coordonatele punctelor P_1 și P_2.

ii) Calculați distanța reală în teren (exprimată în kilometri) dintre cele două poduri feroviare.

24. **Scara Richter: clasificarea cutremurelor și funcția logaritmică.** În seismologie, magnitudinea M a unui cutremur este definită de funcția logaritmică $M = \lg A$, unde A reprezintă

amplitudinea relativă a undelor seismice. Astfel, o creștere cu un grad (+1) pe scara Richter înseamnă o multiplicare cu 10 a amplitudinii ($A=10^M$).

Conform clasificării internaționale din figura 43, impactul seismelor este împărțit pe categorii:

Minor (1.0 – 4.9),
Moderat (5.0 – 5.9),
Puternic (6.0 – 6.9),
Major (7.0 – 7.9) și
Catastrofal (≥ 8.0).).

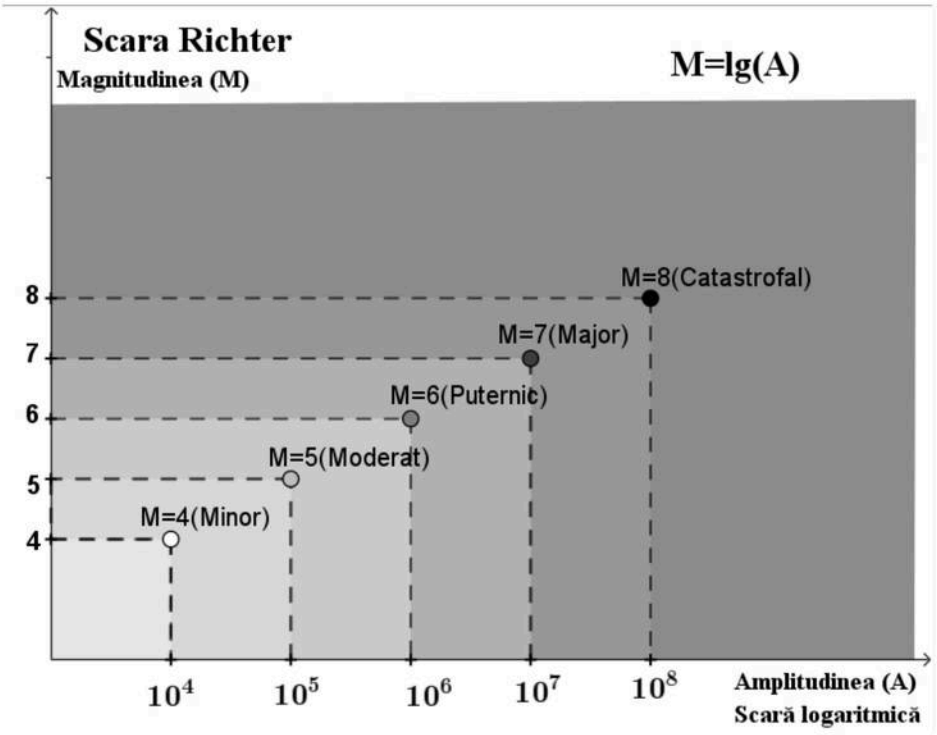


Figura 43. Scara Richter

a) Determinarea amplitudinilor de prag, adică cele corespunzătoare valorilor minime ale fiecărei categorii de magnitudine: calculați amplitudinile A_5, A_6, A_7 și A_8:

i. Cutremur moderat: $M_1 = 5$
ii. Cutremur puternic: $M_2 = 6$
iii. Cutremur major: $M_3 = 7$
iv. Cutremur catastrofal: $M_4 = 8$

b) Compararea categoriilor

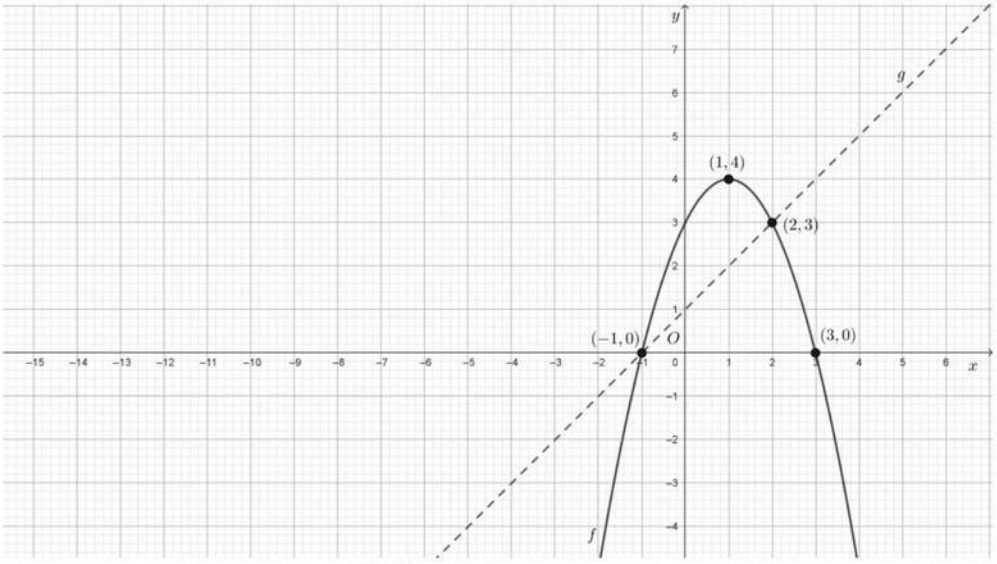
i. De câte ori este mai mare amplitudinea unui cutremur **puternic** ($M = 6$) față de un cutremur **moderat** ($M = 5$)?
ii. De câte ori este mai mare amplitudinea unui cutremur **catastrofal** ($M = 8$) față de un cutremur **moderat** ($M = 5$)?

c) Aplicație algebrică (zecimi pe scara Richter): Un seismolog analizează un cutremur moderat de magnitudine $M_A = 5,0$ și un altul din aceeași categorie, de magnitudine $M_B = 5,3$. Arătați că raportul amplitudinilor celor două cutremure este $\frac{A_B}{A_A} = 10^{0,3} \approx 2$ (amplitudinea se dublează).

Test de evaluare

Subiectul I ***Scrieți pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect.***

1 În figura următoare sunt reprezentate graficele funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ și $g(x) = x + 1$.



Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = g(x)$ este:

A $\{-1, 2\}$; **B** $\{-1, 3\}$; **C** $\{0, 2\}$; **D** $(-1, 2)$; **E** $\{1, 4\}$.

2 Pentru funcția f din figura anterioară, valorile sunt pozitive pentru:

A $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$; **B** $[-1, 3]$; **C** $(-1, 3)$; **D** $(-\infty, 1)$; **E** $(1, \infty)$.

3 Domeniul maxim de definiție al funcției $h(x) = \sqrt{2x - 4}$ este:

A $\mathbb{R}$; **B** $[2, \infty)$; **C** $(2, \infty)$; **D** $(-\infty, 2]$; **E** $[-2, \infty)$.

4 Dintre egalitățile următoare cea adevărată este:

A $\log_2 \sqrt[3]{8} = 2$; **B** $\log_3 9 = 3$; **C** $\log_{0,1} \sqrt{100} = 1$; **D** $\log_2 8 = 3$; **E** $\log_5 1 = 1$.

Subiectul al II-lea ***Scrieți pe foaia de rezolvare rezultatele pentru care următoarele enunțuri sunt adevărate.***

1 Vârful parabolei din figura anterioară este punctul $V(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$; valoarea maximă a funcției f este ……

2 Funcția $g(x) = x + 1$ este strict ……, iar graficul ei intersectează axa Oy în punctul $(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$.

3 Pentru $p(x) = x^2 + 1$ și $q(x) = 2x - 1$, valoarea $(p \circ q)(0) + (q \circ p)(-2)$ este ……

4 Imaginea funcției $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 3^x$ este …, iar axa …… este asimptotă a graficului.

5 Rezultatul calculului $\ln \frac{1}{e} - \lg 0,01$ este ……

978-606-528-853-9

www.cdpress.ro

Scanați codul QR, descoperiți **portofoliul complet de manuale** și de resurse digitale CD PRESS pe clasadigitala.ro și pe cdpress.ro.