Alina Paraschiv (coordonator)
Emilia Iancu
Florentina Enea
Gabriela Chircă
Oana Udrea
George Zidu
Daniela Minculeț
Mădălina Constantinescu
Vicențiu Rusu

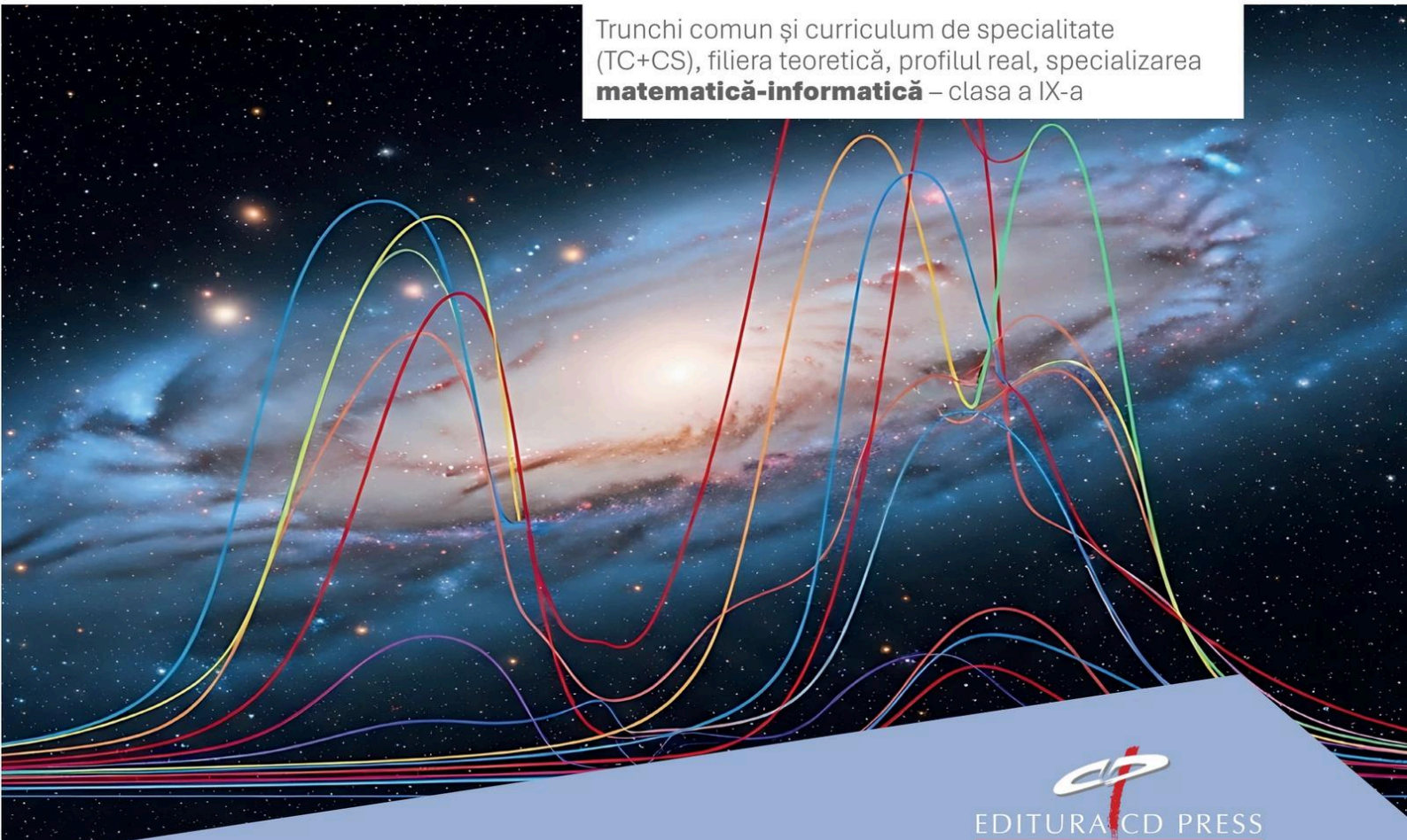
9

Matematică

Exerciții și probleme

✓ breviar teoretic ✓ rezolvări pas cu pas ✓ teste sumative
✓ răspunsuri și indicații

Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea **matematică-informatică** – clasa a IX-a



EDITURA CD PRESS
www.cdpress.ro

Cuprins

TESTE PREDICTIVE....6
ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ....9
- Breviar teoretic....,9
- Propoziții și predicate....12
- Operații logice cu propoziții și predicate....14
- Reguli de negare. Cuantificatori....19
- Metoda reducerii la absurd....21
- Metoda inducției matematice....23
- Calculul unor sume de numere reale....29
- Aplicații practice. Structuri algoritmice în activitatea zilnică și științe....30
- Test de evaluare....34

PROGRESII ARITMETICE ȘI PROGRESII GEOMETRICE....36
- Breviar teoretic....36
- Șiruri. Moduri de definire a unui șir....38
- Progresii aritmetice....41
- Progresii geometrice....49
- Aplicații ale formulei $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),\ n \geq 2$....60
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice....65
- Test de evaluare....71

FUNCȚII. PROPRIETĂȚI GENERALE....73
- Breviar teoretic....73
- Noțiunea de funcție....76
- Domeniu, codomeniu, imagine....79
- Funcții egale și restricții....81
- Grafic, axe, semn și ecuații....83
- Monotonie, mărginire, extreme....87
- Paritate și formă grafică....94
- Funcția modul..../....99
- Partea întreagă și partea fracționară....107
- Operații cu funcții afine....114
- Compunerea funcțiilor....120
- Funcții injective, surjective, bijective; inversabilitate....125
- Aplicații practice....138
- Test de evaluare....141

FUNCȚII. FUNCȚIA DE GRADUL AL II-LEA....142
- Definiție, repezentare grafică, intersecțiile graficului cu axele de coordonate, a xa de simetrie, monotonie, convexitate/concavitate, trasarea graficului....142
- Semnul funcției de gradul al II-lea....152
- Inecuații de gradul al II-lea....158
- Relațiile lui Viète....163
- Sisteme care conțin ecuații de gradul al II-lea....168
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice....175
- Test de evaluare....180

FUNCȚII. FUNCȚIA PUTERE, RADICALI.....181
- Funcția putere cu exponent întreg 181
- Radicali, oprații cu radicali, expresii conjugate 188
- Funcția radical de ordin n 197
- Aplicații practice.....204
- Ecuații și inecuații cu radicali.....204
- Aplicații practice..... 214
- Test de evaluare..... 215

FUNCȚII TRIGONOMETRICE. ECUAȚII TRIGONOMETRICE 216
- Breviar teoretic 216
- Cercul trigonometric..... 222
- Funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0,2\pi]$. Formule de reducere la primul cadran..... 225
- Funcțiile sinus, cosinus, tangentă, cotangentă definite pe $\mathbb{R}$ 228
- Relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă
- Formule trigonometrice pentru suma/diferența a două numere reale..... 233
- Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume.....238
- Test de evaluare.....244
- Funcții trigonometrice inverse.....245
- Ecuații trigonometrice fundamentale. Ecuații reductibile la ecuații trigonometrice fundamentale.....248
- Ecuații trigonometrice de forma sin $(f(x))$ = sin $(g(x))$, cos $(f(x))$ = cos $(g(x))$, tg $(f(x))$ = tg $(g(x))$, ctg $(f(x))$ = ctg $(g(x))$ 251
- Ecuații trigonometrice de forma $a\sin x + b\cos x = c$, unde a, b, c sunt numere reale.....256
- Exerciții și probleme de sinteză și aplicații practice.....260
- Test de evaluare.....265

APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE. RELAȚII METRICE. 266
- Breviar teoretic 266
- Teorema cosinusului. 269
- Teorema sinusurilor.....271
- Rezolvarea triunghiurilor 274
- Aria unui triunghi 277
- Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi.....280
- Teorema bisectoarei. Relația lui Stewart. Lungimile unor segmente importante din triunghi.....282
- Concurență și coliniaritate în geometria plană. Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva.....285
- Probleme de sinteză și aplicații practice..... 288
- Teste de evaluare 292

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII DE REZOLVARE 293

Testul dreptei verticale: O curbă din plan este graficul unei funcții dacă și numai dacă orice dreaptă verticală o intersectează în cel mult un punct.

• Intersecția cu Ox: se rezolvă $f(x)=0$; soluțiile se numesc zerourile funcției;

$G_f \cap Ox = \{(x,0) | \ f(x)=0\}$.

• Intersecția cu Oy: dacă $0 \in D$, punctul este $(0, f(0))$; o funcție intersectează Oy în cel mult un punct.

• Pentru funcția afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$: intersectează axele în $A\left(-\frac{b}{a},0\right)$ și $B(0,b)$.

• Dreptele $x=m$ (verticală, nu e grafic de funcție) și $y=m$ (orizontală, graficul funcției constante).

5. Semnul funcției. Interpretări geometrice

Considerăm $f, g: D\to\mathbb{R}$ funcții numerice.

• $f(x)=0 \Leftrightarrow$ graficul intersectează axa Ox; $f(x)>0 \Leftrightarrow$ graficul e deasupra axei Ox; $f(x)<0 \Leftrightarrow$ graficul e sub axa Ox.

• Soluțiile ecuației $f(x)=m$ reprezintă abscisele punctelor de intersecție dintre graficul lui f și dreapta $y=m$.

• Soluțiile ecuației $f(x)=g(x)$ reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale graficelor lui f și g.

• Soluția inecuației $f(x)\leq g(x)$ reprezintă mulțimea pe care G_f este sub G_g; soluția inecuației $f(x)\geq g(x)$ reprezintă mulțimea pe care G_f este deasupra lui G_g.

6. Monotonia funcțiilor

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție numerică, unde D este domeniul maxim de definiție.

Definiție: f este crescătoare pe D dacă $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ (strict, dacă inegalitatea e strictă); analog pentru descrescătoare.

Studiul monotoniei: I. Pentru $x_1, x_2 \in D$, oarecare, $x_1 < x_2$, se calculează $f(x_1)-f(x_2)$; dacă diferența este pozitivă, funcția este descrescătoare, iar dacă este negativă, funcția este crescătoare; **II.** Pentru $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, se calculează raportul $R=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$: dacă $R\geq 0$, f crescătoare ($R>0$: strict crescătoare); dacă $R\leq 0$, f descrescătoare ($R<0$: strict descrescătoare).

Proprietate: Funcția afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, este strict monotonă pe $\mathbb{R}$: strict crescătoare dacă $a>0$, strict descrescătoare dacă $a<0$.

Puncte de extrem: x_0 este punct de maxim (minim) global dacă $f(x)\leq f(x_0)$ ($f(x)\geq f(x_0)$), $\forall x \in D$.

$x_0 \in (a,b)$ este punct de maxim (minim) local dacă $f(x)\leq f(x_0)$ ($f(x)\geq f(x_0)$), $\forall x \in D\cap(a,b)$.

7. Funcții mărginite

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție numerică.

Definiție: f este mărginită pe D dacă $\exists M>0$ astfel încât $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in D$ (echivalent: $\exists m, M\in\mathbb{R}$ cu $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in D$).

• Funcția afină ($a\neq 0$) e nemărginită pe $\mathbb{R}$, dar mărginită pe orice interval mărginit.

• Funcția modul: mărginită inferior de 0, nemărginită superior.

• Partea întreagă: nemărginită inferior și superior. Partea fracționară: mărginită (are toate valorile în intervalul $[0,1)$).

8. Funcții pare / impare. Simetrie

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție numerică.

Mulțime simetrică: D este simetrică dacă $\forall x\in D \Rightarrow -x\in D$.

Funcție pară: $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in D$ — graficul e simetric față de axa Oy.

Funcție impară: $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in D$ — graficul e simetric față de originea $O(0,0)$.

• Axă de simetrie $x=m$: $f(x)=f(2m-x)$, $\forall x\in D$.

• Centru de simetrie $M(a,b)$: $f(x)+f(2a-x)=2b$, $\forall x\in D$.

9. Funcții convexe / concave

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție numerică și intervalul $I\subset D$.

Convexă pe I: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in I$, $\lambda\in[0,1]$ (graficul „ține apă").

Concavă pe I: inegalitate inversă (graficul „nu ține apă").

• Caz particular ($\lambda=1/2$): convexă $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ge f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

10. Operații cu funcții. Compunere

Considerăm $f,g:D\to\mathbb{R}$.

• Sumă: $f+g:D\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $\forall x\in D$. Diferență: $f-g:D\to\mathbb{R}$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $\forall x\in D$.

• Produs: $f\cdot g:D\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $\forall x\in D$. Raport: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x\in D$ cu condiția $g(x)\neq 0$.

Compunerea funcțiilor: Fie $f:A\to B$ și $g:C\to D$, $B\subset C$. Compusa $g\circ f:A\to D$ este $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, $\forall x\in A$.

• Compunerea este asociativă: $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$, dar în general NU este comutativă.

• Elementul neutru: funcția identică $1_A:A\to A$, $1_A(x)=x$ și $1_B:B\to B$, $1_B(x)=x$, cu $f\circ 1_A=f$ și $1_B\circ f=f$.

11. Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate

Fie funcția $f:A\to B$.

Injectivă: $\forall x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ (echivalent: $\forall x_1,x_2\in A$ cu $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$; pentru $\forall y\in B$ ecuația $f(x)=y$ are cel mult o soluție).

• Interpretare geometrică: orice paralelă la Ox prin valori din codomeniu, intersectează graficul în cel mult un punct.

Surjectivă: $\forall y\in B,\exists x\in A$ astfel încât $f(x)=y$ (echivalent: $\mathrm{Im}f=B$).

• Interpretare geometrică: orice paralelă la Ox prin punctele codomeniului intersectează graficul în cel puțin un punct.

Bijectivă: f este injectivă și surjectivă (echivalent: orice paralelă la Ox prin punctele codomeniului intersectează graficul în exact un punct).

• Orice funcție strict monotonă este injectivă.

• Funcția afină ($a\neq 0$) este bijectivă. Funcțiile modul, parte întreagă și parte fracționară NU sunt bijective.

12. Funcții inversabile

Definiție: $f:A\to B$ este inversabilă dacă $\exists g:B\to A$ cu $g\circ f=1_A$ și $f\circ g=1_B$; g se notează f^{-1}

Teoremă: O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă. Inversa, dacă există, este unică.

• Determinare practică: se rezolvă $f(x)=y$ în raport cu x; soluția unică $x=f^{-1}(y)$.

• Dacă f și g sunt inversabile: $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

• Interpretare geometrică: graficul lui f^{-1} este simetricul graficului lui f față de dreapta $y=x$.

• O funcție inversabilă și monotonă are inversa cu aceeași monotonie.

I. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE

Probleme rezolvate

1. Când o corespondență este funcție?

Se consideră mulțimile $A=\{a,b,c,d\}, B=\{1,2,3\}$.

În fiecare dintre diagramele următoare este reprezentată o corespondență de la A la B.

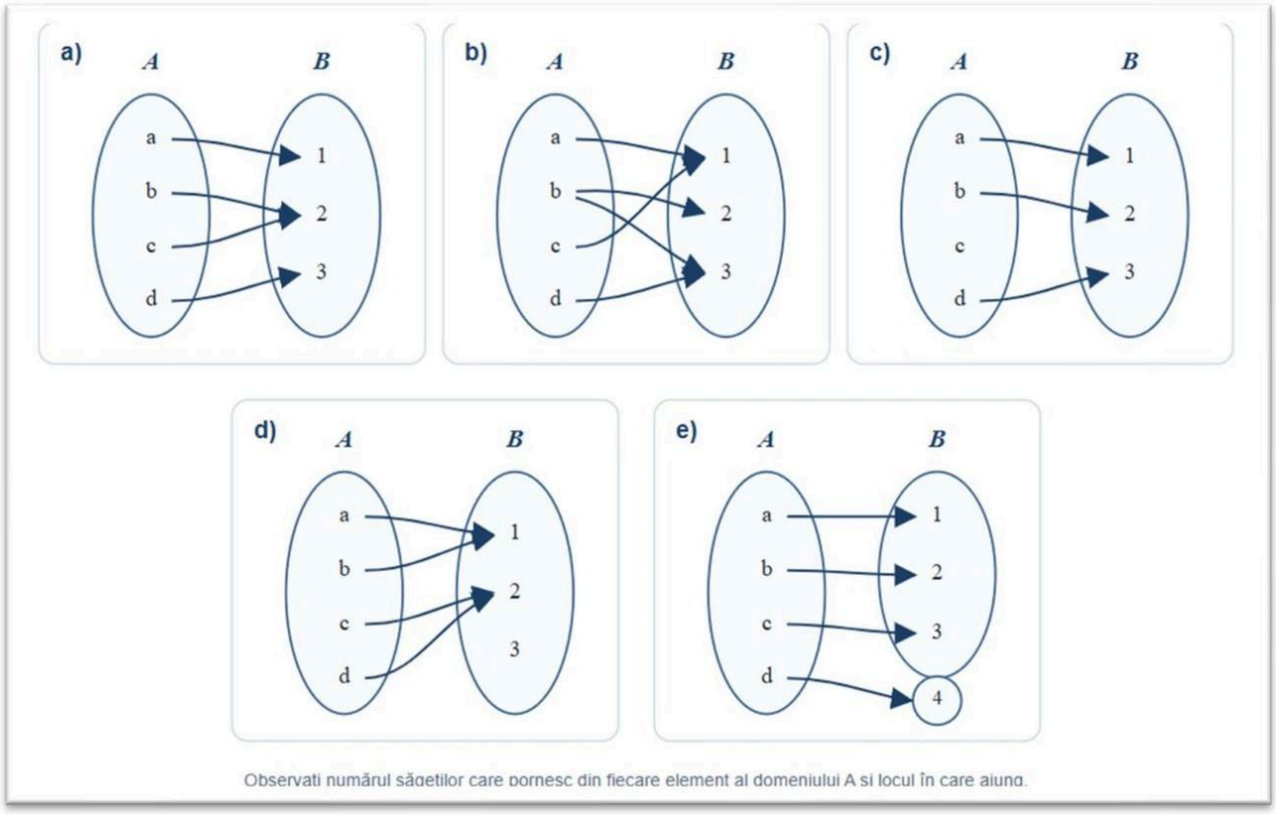


Figura 1. Diagrame corespondențe funcții

Cerințe:

a) Precizați, în fiecare diagramă, câte săgeți pornesc din fiecare element al mulțimii A.

b) Identificați diagramele în care:

i. dintr-un element al mulțimii A pornesc două săgeți;

ii. dintr-un element al mulțimii A nu pornește nicio săgeată;

iii. o săgeată ajunge la un element care nu aparține mulțimii B.

c) Care dintre corespondențele reprezentate sunt funcții bine definite?

d) Este posibil ca două elemente diferite din A să aibă aceeași imagine? Justificați folosind una dintre diagrame.

e) Este obligatoriu ca fiecare element din B să fie imaginea unui element din A? Justificați.

Rezolvare: Corespondențele din diagramele a) și d) sunt funcții bine definite. Corespondența din diagrama b) nu este funcție, deoarece elementului b îi corespund două elemente diferite din B. Corespondența din diagrama c) nu este funcție, deoarece elementului c nu îi corespunde niciun element din B. Corespondența din diagrama e) nu este funcție de la A la B, deoarece lui d îi este asociat numărul 4, care nu aparține codomeniului B. Diagrama d) arată că două elemente diferite din A pot avea aceeași imagine. De asemenea, nu este obligatoriu ca fiecare element din codomeniul B să fie atins.

Reținem:

*O corespondență de la A la B este o **funcție bine definită** dacă fiecărui element din domeniul A îi corespunde un singur element (unic) din codomeniul B.*

2. Funcții în limbaj cotidian

Scrieți, folosind notațiile specifice funcțiilor, modelul matematic corespunzător fiecărei situații cotidiene.

a) În funcție de ziua săptămânii, orele se termină la ora 14 sau 15.

b) Fiecare cetățean român are un Cod Numeric Personal (CNP) unic.

c) Dacă fac abonament lunar la sală, voi plăti după n luni suma egală cu costul lunar înmulțit cu n.

d) Dacă în România este ora h, atunci în Londra este ora $h-2$.

Rezolvare:

a) Formulare matematică: $f: A \to B$

- Domeniul de definiție: $A = \{\text{L, Ma, Mi, J, Vi}\}$ (zilele de școală)
- Codomeniul: $B = \{14,15\}$
- Legea de corespondență: $f = f_{\text{orar}}$, unde $\forall x \in A \ \to \ f_{\text{orar}}(x) \in B$.

b) Formulare matematică: $f: A \to B$

- Domeniul de definiție: $A = \{$ mulţimea cetăţenilor români $\}$
- Codomeniul: $B = \{\text{CNP} - \text{urilor cetăţenilor români }\}$
- Legea de corespondență: $\forall x \in A, f_{\text{CNP}}(x) = \text{CNP-ul lui } x$.

(Se atribuie în mod unic prin lege, conform unor reguli precise legate de sex, data și locul nașterii).

c) Formulare matematică: $f: \mathbb{N} \to (0,+\infty)$

- Fie $c > 0$ costul lunar al abonamentului.
- Legea de corespondență: $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n \cdot c$., unde n este numărul lunilor, $n \in \mathbb{N}$.

d) Formulare matematică: $f: A \to B$

- Domeniul și codomeniul reprezintă mulțimea orelor dintr-o zi: $A = [0,24), B = [0,24)$
- Legea de corespondență: $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{dacă } x \geq 2 \\ 22+\text{x}, & \text{dacă } x < 2 \end{cases}$

3. Recunoașterea funcțiilor

Precizați pentru fiecare dintre corespondențele următoare dacă este sau nu funcție:

a) $f: \mathbb{N} \to \{1,2\}$, $f(x) =$ restul împărțirii lui x la 3.

b) Corespondență dată prin tabelul:

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	3 sau2

c) Fie M mulțimea tuturor mulțimilor formate numai cu numere naturale și corespondența

$$f: \mathbb{N} \to M, f(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}.$$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 3x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Rezolvare:

a) La împărțirea unui număr natural la 3, resturile posibile pot fi $0,1,2$. Dacă un număr x se divide cu 3 (ex. $x = 3$), restul este 0. Însă $0 \notin \{1,2\}$ (codomeniul dat).

Concluzie: NU este funcție (deoarece pentru numerele divizibile cu 3, valoarea nu aparține codomeniului).

b) Elementului $x = 3$ îi sunt asociate două valori diferite, 3 și 2. Prin urmare, corespondența NU este funcție.

c) Pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$, $f(x)$ este o mulțime formată numai cu numere naturale. De exemplu, $f(2) = \{0,1,2\}$. Această mulțime este un element al codomeniului M. În plus, fiecărui număr natural x îi corespunde o singură astfel de mulțime. Concluzie: corespondența este o funcție bine definită.

d) Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, se aplică una și numai una dintre cele două ramuri, iar valoarea obținută este un număr real. Prin urmare, corespondența este o funcție bine definită.

e) $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\quad f(x)=|x|$.

Pentru $x=0$, $f(0)=0$, dar $0\notin(0,+\infty)$. Prin urmare, valoarea atribuită elementului 0 nu aparține codomeniului, deci corespondența NU este funcție de la $\mathbb{R}$ la $(0,+\infty)$..

4. Numărul de funcții

Câte funcții există definite pe $A=\{1,2,3\}$ cu valori în $B=\{1,2\}$?

Rezolvare: Pentru fiecare x din A există câte o alegere pentru fiecare valoare din B, deci $N=2^3=8$ funcții.

Numărul funcțiilor de la A la B

x	1	2	3
$f(x)$	f(1) ∈ {1, 2}	f(2) ∈ {1, 2}	f(3) ∈ {1, 2}
	2 alegeri	2 alegeri	2 alegeri

2 · 2 · 2 = 2³ = 8 funcții

Figura 2. Numărul funcțiilor

Reţinem: Numărul total de funcții de la o mulțime finită A la o mulțime finită B este dat de formula: $N=|B|^{|A|}$, unde $|A|=$ numărul de elemente din domeniul A, iar $|B|=$ numărul de elemente din codomeniul B.

Probleme propuse

1. Recunoașterea funcțiilor

Precizați pentru fiecare dintre corespondențele următoare dacă este sau nu este funcție. Justificați.

a) $f:\mathbb{N}\to\{1,2,3\}$, unde $f(x)$ este restul împărțirii lui x la 4.

b) Corespondența dată prin tabelul:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	2	2	3

c) Fie M mulțimea tuturor mulțimilor finite formate numai cu numere naturale. Considerăm corespondența $f:\mathbb{N}^*\to M$, care asociază fiecărui număr natural nenul mulțimea divizorilor săi naturali.

d) Corespondența descrisă astfel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

e) Fiecărui număr real pozitiv x i se asociază numărul real y pentru care $y^2=x$.

2. Numărul de funcții

Fie mulțimile $A=\{-1,0,1,2\}, B=\{0,1,2\}$.

a) Determinați numărul funcțiilor $f:A\to B$.

b) Determinați numărul funcțiilor $f:A\to B$ pentru care $f(-1)=2$.

c) Determinați numărul funcțiilor $f:A\to B$ pentru care $f(-1)=f(0)$.

3. Funcția CNP

La înregistrarea nașterii, fiecărei persoane i se atribuie un cod numeric personal format din 13 cifre. Putem privi această atribuire ca pe o corespondență:

$$f:\{\text{persoane înregistrate}\}\to\{\text{CNP-uri atribuite}\},\ f(\text{persoana})=\text{CNP-ul persoanei.}$$

CNP-ul are forma $S\ AA\ LL\ ZZ\ JJ\ NNN\ C$, unde:

- S indică sexul și secolul nașterii;
  Prima cifră S: valorile impare corespund sexului masculin, iar valorile pare sexului feminin.

S	sexul	secolul nasterii
1	masculin	1900–1999
2	feminin	1900–1999
3	masculin	1800–1899
4	feminin	1800–1899
5	masculin	2000–2099
6	feminin	2000–2099

- AA, LL, ZZ indică anul, luna și ziua nașterii;
- JJ este secvența atribuită județului sau sectorului;
- NNN este un număr de ordine;
- C este cifra de control.

Pentru calcularea cifrei de control, primele 12 cifre se înmulțesc, în ordine, cu cifrele numărului 279146358279. Produsele obținute se adună, iar suma se împarte la 11. Dacă restul este unul dintre numerele $0,1,\ldots,9$, acesta este cifra de control. Dacă restul este 10, cifra de control este 1.

Rezultatele acestor corespondențe sunt așezate unul după altul.

În această problemă se folosesc numai date fictive, în scop didactic.

1) Un băiat s-a născut la 17 aprilie 2009. Secvența județului este 40, iar numărul de ordine atribuit este 123.

a) Scrieți primele 12 cifre ale codului.

b) Calculați cifra de control și scrieți codul complet.

2) Citiți informațiile cuprinse în codul fictiv 6021122156780.

3) Explicați de ce corespondența care asociază fiecărei persoane CNP-ul său este o funcție bine definită.

Indicație: Calculați suma direct sau, dacă preferați, scrieți un program scurt ori folosiți un instrument AI strict pentru efectuarea calculului. Verificați rezultatul obținut.

II. DOMENIU, CODOMENIU, IMAGINE

Probleme rezolvate

1. Completați tabelele de valori

Completați tabelul de valori pentru fiecare funcție $f:D\to\mathbb{R}$, precizând domeniul de definiție D și imaginea funcției:

a) f asociază lui x semnul său (-1 pentru minus, $+1$ pentru plus, 0 pentru 0),

x	-5	-3	-1	0	2	4
$f(x)$						

b) $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{dacă } x \text{ este par}\\ 3x, & \text{dacă } x \text{ este impar}\end{cases}$,

x	-6	-5	-2	-1	0	3	4	6
$f(x)$								

Rezolvare:

a) Domeniul de definiție: $D=\{-5,-3,-1,0,2,4\}$

x	-5	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	-1	-1	-1	0	$+1$	$+1$

Imaginea funcției: $\operatorname{Im} f=\{-1,0,1\}$

b) Domeniul de definiție: $D=\{-6,-5,-2,-1,0,3,4,6\}$

x	-6	-5	-2	-1	0	3	4	6
paritate	par	impar	par	impar	par	impar	par	par
$.f(x).$	-12	-15	-4	-3	0	9	8	12

$\operatorname{Im} f=\{-15,-12,-4,-3,0,8,9,12\}$

2. Par sau impar?

Se consideră funcția

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\begin{cases}0, & \text{dacă } n \text{ este par},\\ 1, & \text{dacă } n \text{ este impar}.\end{cases}$$

Completați:

a) Domeniul de definiție al funcției este _____.

b) Codomeniul funcției este _____, iar imaginea funcției este _____.

c) Afirmația „Valoarea $f(3,15)$ este definită” este _____ . (adevărată sau falsă?)

d) Pentru $n\in\mathbb{N}$, calculați:

$$\text{i)}f(10)\cdot f(n);\quad \text{ii)}f(10n);\quad \text{iii)}f\left(f(10n)\right);\quad \text{iv)}f\left(f(n)\right).$$

Rezolvare:

a) $D_f=\mathbb{N}$; b) Codomeniul funcției este $\mathbb{N}$, iar imaginea funcției este $\operatorname{Im} f=\{0,1\}$.

c) Afirmația este falsă, deoarece $3,15\notin\mathbb{N}$. Prin urmare, $3,15$ nu aparține domeniului de definiție al funcției.

d)

i) Avem $f(10)=0$, deci $f(10)\cdot f(n)=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

ii) Numărul $10n$ este par, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Prin urmare, $f(10n)=0$.

iii) Din rezultatul anterior, $f\left(f(10n)\right)=f(0)=0$. Așadar, $f\left(f(10n)\right)=0$.

iv) Deoarece $f(n)\in\{0\,|\,1\}$, iar $f(0)=0, f(1)=1$, rezultă $f\left(f(n)\right)=f(n)$.

3. Imaginea unei funcții ($\operatorname{Im} f$)

Determinați imaginea fiecăreia dintre funcțiile următoare.

a) $f:[-2,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$

b) $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$.

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2|x|+1$

Rezolvare:

a) Funcția este strict descrescătoare pe intervalul $[-2,4]$ (coeficientul $a=-3<0$).

Calcul la capete: $f(-2)=-3(-2)+2=8$ (valoarea maximă), $f(4)=-3(4)+2=-10$ (valoarea minimă).

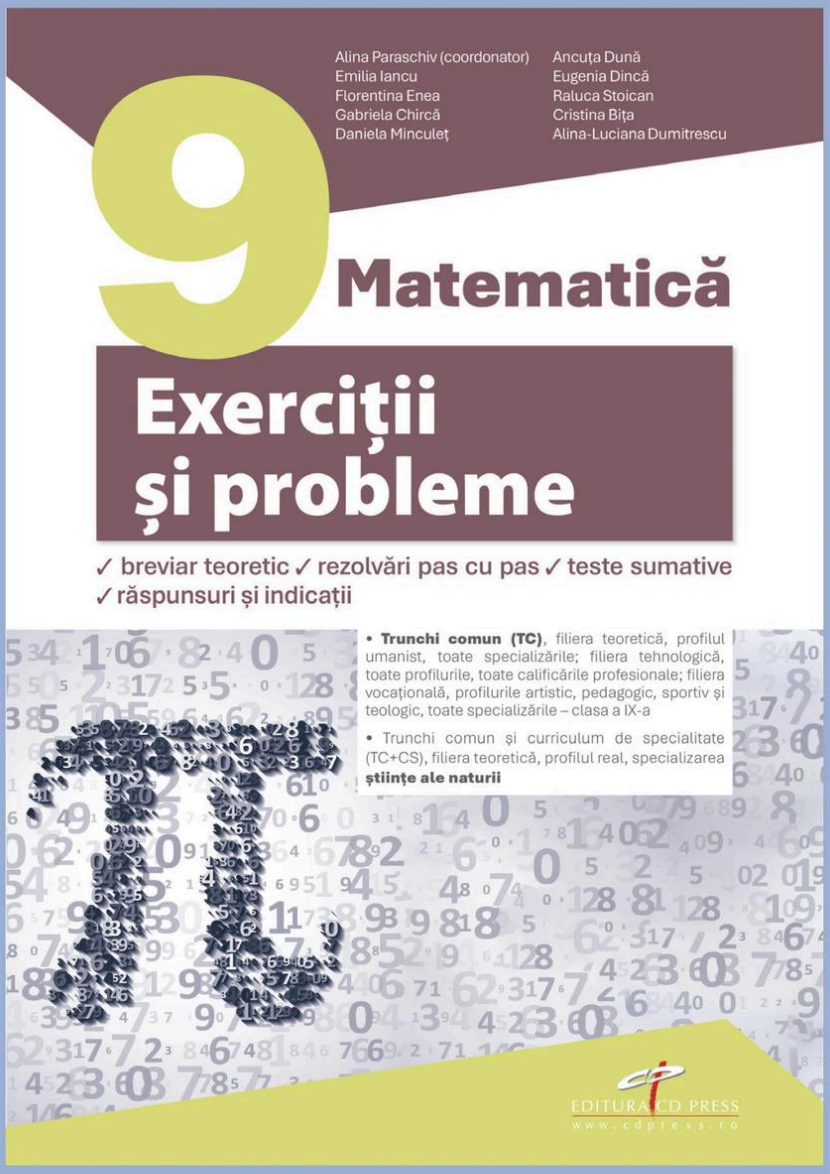
Imaginea funcției: $\operatorname{Im} f=[-10,8]$.

b) Funcția este strict crescătoare, deoarece coeficientul lui x este $a=2>0$.

Pentru $x>3$, $2x-1>2\cdot 3-1$, deci $f(x)>5$.

Valoarea 5 **nu** este atinsă, deoarece 3 nu aparține domeniului. Cum funcția crește nelimitat, $\operatorname{Im} f=(5,+\infty)$.

Din aceeași serie:



978-606-528-852-2
6 420620 010427
www.cdpress.ro

Scanați codul QR, descoperiți **portofoliul complet de manuale** și de resurse digitale CD PRESS pe clasadigitala.ro și pe cdpress.ro.