Irina Creţu

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE GEOMETRIE

PARALELA 45
EDITURA

Cuprins

capitolul

Metode generale folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor

1. Metoda sintezei

Cuvântul *sinteză* vine din grecescul *synthesis*, care înseamnă strângerea într-un întreg a părţilor componente care au fost despărţite. În logică, sinteza este o metodă de raţionament care constă în faptul că desfăşurarea gândirii se face de la simplu la compus sau de la cunoscut la necunoscut. Demonstraţia în care se porneşte de la propoziţii particulare spre propoziţii generale se numeşte *demonstraţie sintetică* (*metodă inductivă* sau *prin sinteză*). În acest tip de demonstraţie se porneşte de la *cunoscut spre necunoscut*, adică pornind de la o propoziţie despre care ştim că este adevărată, deducem propoziţii care, de asemenea, sunt adevărate şi ultima este cea care trebuie demonstrată. Aşadar, în această metodă, *gândirea elevului este dirijată pentru a se răspunde la întrebarea: Dacă ştiu ..., ce pot să aflu?*

1.1. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de calcul

Prin probleme de calcul înţelegem acele probleme care cer găsirea unor valori numerice atunci când se cunosc anumite date. Dacă mărimile din problemă nu sunt exprimate prin numere, rezultatul obţinut se exprimă, în mod general, printr-o formulă. Problemele de calcul se împart în:

a) exerciţii şi probleme cu conţinut geometric, dar pentru rezolvarea cărora se cere cunoaşterea rezolvării problemelor tip din aritmetică;
b) probleme care, pentru a le găsi rezultatul, cer folosirea mai multor propoziţii legate într-un raţionament.

Rezolvarea exerciţiilor nu cere din partea celui ce le face un efort mare de gândire, construcţia unor raţionamente complicate, ci numai cunoaşterea temeinică a regulilor, a formulelor sau a teoremelor studiate. Deşi rezolvarea exerciţiilor dezvoltă prea puţin gândirea logică, ele au o importanţă mare pentru studiul geometriei deoarece, pe de o parte, contribuie la formarea priceperilor şi deprinderilor pentru a aplica cunoştinţele teoretice în rezolvarea problemelor, ceea ce constituie, de fapt, primul pas în aplicarea teoriei în practică, iar pe de altă parte, formează, încetul cu încetul, încrederea în forţele proprii.

Prin metoda sintezei o problemă de calcul se rezolvă astfel: se iau două date cunoscute ale problemei între care există o legătură şi cu ajutorul lor se formulează o problemă ce ne dă posibilitatea să calculăm valoarea celei de-a treia mărimi, care devine astfel cunoscută. Se iau apoi alte două date cunoscute (fie date prin enunţul problemei, fie calculate anterior) şi cu ajutorul lor se formulează o problemă, care rezolvată ne dă valoarea unei alte mărimi. Se procedează în acest mod până găsim tocmai valorile mărimilor ce se cer în problemă.

Observăm că uneori ne putem folosi şi de o singură dată a problemei, dacă ea este legată de o formulă cunoscută mai demult. Alteori putem lua, în loc de două date, mai multe date dacă între ele există o legătură în aşa fel încât să putem formula cu ajutorul lor o problemă simplă.

În concluzie, această metodă se poate folosi cu succes la o problemă care necesită aplicarea directă a unei teoreme învăţate sau când avem destule indicaţii care să ne conducă spre rezultatul cerut.

Aplicăm metoda sintezei în rezolvarea următoarelor probleme de calcul.

PROBLEMA 1

Se dă piramida *SABC*, în care baza este un triunghi isoscel având laturile $AB = AC =$ $= 82$ cm, $BC = 36$ cm, iar muchia *SA*, perpendiculară pe planul bazei, are o lungime de 20 cm. Prin vârful *A* se duce un plan care intersectează muchiile *SB* şi *SC* în punctele M şi N, care sunt, respectiv, mijloacele lor. Se cere să se afle:

1^0) aria totală a piramidei;

2^0) volumul piramidei;

3^0) aria secţiunii AMN;

4^0) tangenta unghiului pe care îl face faţa *SBC* cu planul bazei.

SOLUŢIE

Construim figura, apoi ne fixăm atenţia asupra primei întrebări. Deoarece aceasta cere să aflăm aria totală a piramidei (fig. 1), trebuie să găsim ariile tuturor feţelor, apoi să le adunăm.

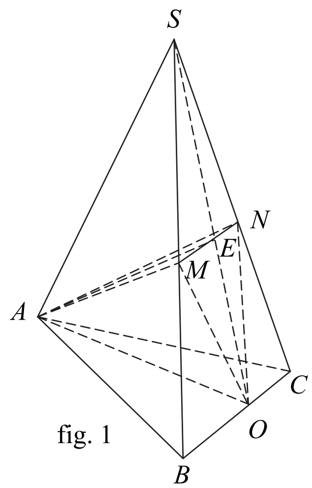

fig. 1

1°) Trebuie să aflăm aria bazei cu datele 82 cm, 36 cm şi vom formula o problemă prin rezolvarea căreia să calculăm înălţimea triunghiului *ABC*.

a) Dacă în triunghiul isoscel *BAC* se cunoaşte baza $BC = 36$ cm şi latura $AC = 82$ cm, se cere să se calculeze înălţimea triunghiului dusă din vârful *A* pe baza *BC*.

În triunghiul isoscel *ABC*, ducem înălţimea *AD*, şi se formează două triunghiuri dreptunghice egale, în care cunoaştem ipotenuzele şi câte o catetă, deci:

$AD^2 = AC^2 - DC^2$

$AD^2 = 82^2 - 18^2 = (82 + 18)(82 - 18) = 100 - 64$

$AD = \sqrt{100 \cdot 64} = 80$ cm.

Formulăm o altă problemă, a cărei întrebare trebuie să aibă în vedere răspunsul căutat la prima chestiune.

capitolul II

Metode particulare folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor

Metodele particulare sunt acelea care se pot folosi în rezolvarea unui număr restrâns de probleme. De multe ori, metodele particulare conduc mai uşor la soluţia problemei decât analiza şi sinteza, care în unele cazuri sunt foarte greu de aplicat. Dintre metodele particulare, amintim:

1. Metoda reducerii la absurd;
2. Metoda inducţiei complete;
3. Probleme de construcţii geometrice;
4. Probleme de locuri geometrice;
5. Metode de rezolvare a problemelor de coliniaritate;
6. Metoda de rezolvare a problemelor de concurenţă;
7. Metoda geometriei analitice;
8. Metoda calculului vectorial;
9. Metoda planului complex.

1. Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd este folosită şi în geometrie pentru demonstrarea unor teoreme sau a unor probleme care au caracter teoretic. În matematică, pentru a stabili valoarea de adevăr a unei propoziţii matematice, folosim două feluri de demonstraţii: *demonstraţia directă* şi *demonstraţia indirectă*. Numim *demonstraţie directă* un şir de implicaţii (silogisme) care se sprijină direct pe adevăruri stabilite în prealabil şi care conduc în mod direct la concluzia dorită sau la soluţia problemei. Dar acest lucru nu este întotdeauna posibil, astfel că în unele cazuri este mai uşor să demonstrăm *reciproca contrarei propoziţiei iniţiale*. În aceste cazuri avem de-a face cu o demonstraţie indirectă, metoda numindu-se *metoda reducerii la absurd.*

La baza acestei metode stă *legea terţului exclus*, una din legile fundamentale ale logicii clasice, care se enunţă astfel: *Din două propoziţii contradictorii, una este adevărată, cealaltă falsă, iar a treia posibilitate nu poate exista.*

Când la două propoziţii contradictorii aplicăm legea terţului exclus, este suficient să stabilim că una din ele este falsă pentru a deduce că cealaltă este adevărată. *Aşadar, din regula implicaţiei inverse ştim că are loc echivalenţa:* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$. Uneori demonstraţia teoremei directe ($p \Rightarrow q$) este mai dificilă decât demonstraţia teoremei ($\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$), numită *teorema reciprocă a contrarei* (sau *contrara reciprocei*). *Metoda reducerii la absurd constă în demonstrarea acestei de-a doua teoreme.*

Practic, această metodă se aplică astfel: se presupune că ceea ce trebuie să demonstrăm nu este adevărat, cu alte cuvinte, se neagă concluzia teoremei date. Apoi se efectuează, pornind de la ipoteza teoremei şi ipoteza contrară reciprocei, $p \wedge \overline{q}$, un şir de raţionamente corecte şi în urma acestor raţionamente se fac o serie de deducţii logice, care scot în evidenţă faptul că presupunerea făcută duce la o absurditate. Aceasta duce la concluzia că presupunerea făcută nu este posibilă şi rămâne ca adevărată concluzia teoremei date.

La *geometrie*, metoda reducerii la absurd se aplică, cu succes, pentru a demonstra propoziţii matematice (teoreme) începând chiar din clasa a VI-a, când elevii întâlnesc noţiunea de teoremă. Pe parcursul anilor de gimnaziu şi liceu se întâlnesc multe situaţii de aplicare a acestei teoreme, atât la geometrie, cât şi în aritmetică, algebră, trigonometrie şi analiză matematică. Metoda reducerii la absurd se întrebuinţează de mai multe ori în demonstrarea *teoremelor reciproce.*

Urmează exemple de probleme în care se arată cum se aplică metoda reducerii la absurd.

PROBLEMA 1

Dacă pe laturile *AB*, *BC*, *CD*, *DA* ale unui patrulater strâmb *ABCD* se iau punctele *M*, *N*, *P*, *Q*, în aşa fel încât să existe relaţia: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = +1,$ atunci punctele *M*, *N*, *P*, *Q* sunt coplanare. (*Teorema reciprocă a lui Menelaus din spaţiu*)

SOLUŢIE

Prin ipoteză se cunoaşte că patrulaterul *ABCD* este strâmb. Punctele *M*, *N*, *P*, *Q* (fig. 19), luate pe laturile *BC*, *CD*, respectiv *DA*, satisfac egalitatea:

1. $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = +1.$

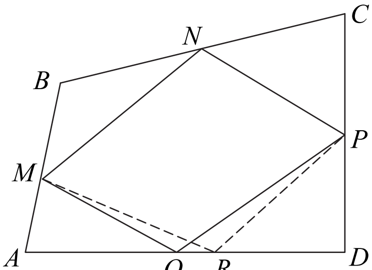

fig. 19

În demonstraţie vom folosi segmente orientate. Propoziţia din concluzia teoremei afirmă că, în acest caz, punctele *M*, *N*, *P*, *Q* sunt în acelaşi plan. Pentru a demonstra această teoremă, aplicăm raţionamentul prin reducere la absurd.

a) Presupunem că concluzia teoremei date nu este adevărată, adică cele patru puncte *M*, *N*, *P*, *Q* nu sunt în acelaşi plan.

Cu alte cuvinte, am negat concluzia teoremei. Să vedem ce rezultat se poate deduce din presupunerea făcută. Procedăm astfel: punctele *M*, *N*, *P* determină un plan. Cum noi am presupus că *Q* nu este conţinut şi el în acest plan, rezultă că planul determinat de punctele *M*, *N*, *P* intersectează latura *DA* în alt punct, de exemplu, *R*. Aplicând