

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Roxana Pietreanu

Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

PELIGRAD, SORIN

**Geometrie plană pentru gimnaziu și liceu : construcții
geometrice auxiliare, proprietăți, teoreme, aplicații,
puncte, drepte și cercuri remarcabile / Sorin Peligrad. –**

Pitești : Paralela 45, 2025

ISBN 978-973-47-4388-9

51

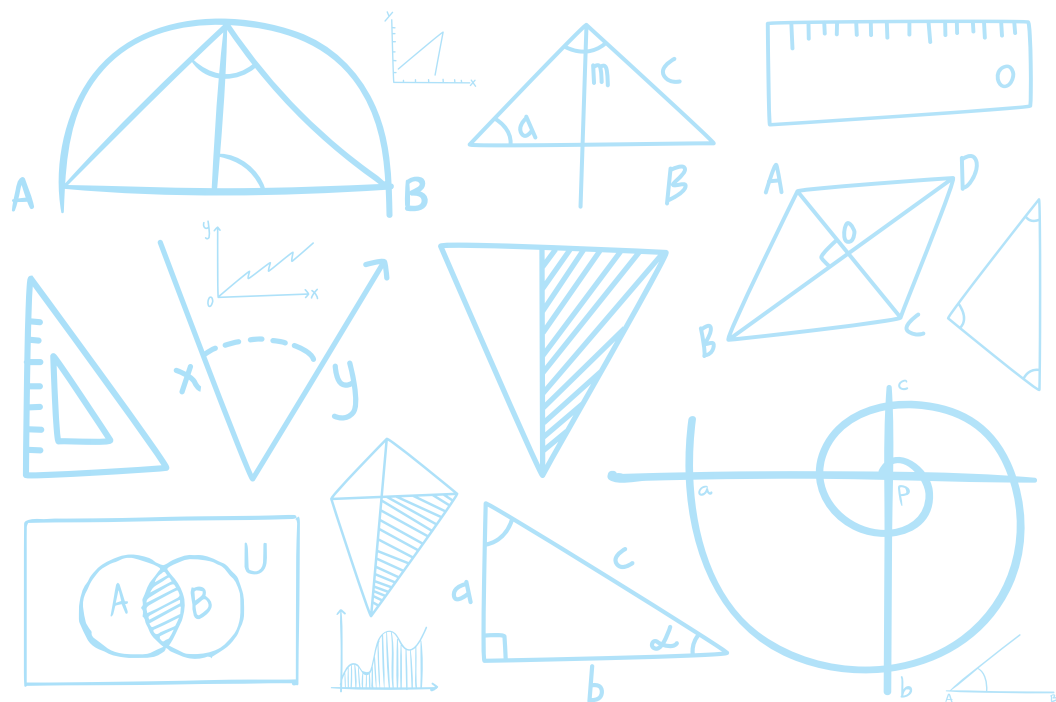
Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

Sorin Peligrad



GEOMETRIE PLANA

pentru gimnaziu și liceu

- ————— Construcții geometrice auxiliare ————— •
- ————— Proprietăți, teoreme, aplicații ————— •
- ————— Puncte, drepte și cercuri remarcabile ————— •

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Prezenta lucrare este structurată în trei capitole.

Primul capitol reunește principalele tipuri de construcții geometrice auxiliare utilizate în rezolvarea problemelor, incluzând și construcții realizate exclusiv cu rigla negradată, probleme cu legături, tipuri deosebite de probleme, precum și exerciții propuse la diverse olimpiade de matematică. Tot aici sunt selectate câteva dintre cele mai reprezentative probleme, însoțite de soluții elementare.

În capitolul al doilea sunt prezentate teoreme și proprietăți esențiale, alături de aplicațiile lor practice. O parte dintre problemele din primul capitol sunt reluate, fiind rezolvate prin intermediul acestor teoreme. De asemenea, sunt incluse exemple suplimentare de construcții geometrice realizabile doar cu rigla negradată.

Capitolul al treilea este dedicat unor configurații geometrice deosebite: puncte conciclice, puncte coliniare și drepte concurente. Tot aici sunt analizate puncte, drepte și cercuri celebre din geometria triunghiului, utile în abordarea și rezolvarea problemelor.

Lucrarea poate fi utilizată și ca o mică culegere de probleme. Cititorul este încurajat să încerce mai întâi rezolvarea acestora pe cont propriu, iar apoi să compare soluțiile proprii cu cele prezentate în lucrare.

CAPITOLUL I

CONSTRUCȚII GEOMETRICE AUXILIARE

A. Construcții geometrice auxiliare

- A.1. Construcția unor unghiuri ajutătoare – problemele: 1, 2, 4, 8, 43, 24, 52, 42
- A.2. Construcția unor triunghiuri echilaterale – problemele: 1, 9, 12, 13, 14
- A.3. Construcția unor perpendiculare – problemele: 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 16, 39, 40, 41, 48
- A.4. Construcția unor triunghiuri isoscele – problemele: 9, 11, 13, 43
- A.5. Prelungirea unor segmente – problemele: 13, 15, 16, 17, 32, 33, 34, 50
- A.6. Folosirea mijloacelor unor segmente – problemele: 13, 18, 31, 33, 39, 49
- A.7. Construcția unor paralele – problemele: 19, 20, 21, 23, 34, 51
- A.8. Construcția cercului circumscris unui triunghi – problemele: 20, 38, 35, 46
- A.9. Prelungirea medianei cu un segment congruent cu ea – problemele: 21, 23, 28
- A.10. Construcția unor pătrate – problemele: 52, 17

B. Construcții geometrice efectuate numai cu rigla negradată (partea I) – problemele: 22, 23

C. Probleme cu legături – problemele: 9, 10 și 11; 20, 23 și 24; 21, 25 și 26

D. Tipuri deosebite de probleme – problemele: 39, 40, 41, 51

E. Probleme date la diverse olimpiade – problemele: 43, 44, 45, 47

1. Fie triunghiul ABC în care $AB \equiv AC$ și $\angle BAC = 20^\circ$. Se consideră $E \in AB$, $D \in AC$, astfel încât $\angle ACE = 30^\circ$ și $\angle ABD = 20^\circ$. Aflați măsura unghiului BDE .

Soluția 1:

Construim $\angle FBC$, $F \in AC$, astfel încât $\angle FBC = 20^\circ$.

$$\text{Din } AB \equiv AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ;$$

$$\angle BFC = 180^\circ - (20^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \angle BFC \equiv \angle BCF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BF \equiv BC. (1)$$

$$\angle BCE = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ \Rightarrow \angle BEC = 180^\circ - (50^\circ + 80^\circ) = 50^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BEC \equiv \angle BCE \Rightarrow BE \equiv BC. (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow BE \equiv BF. (3) \angle EBF = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ. (4)$$

$$\text{Din (3) și (4)} \Rightarrow \triangle EBF \text{ este echilateral} \Rightarrow EF \equiv BF. (5)$$

$$\angle DBF = 80^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 40^\circ; \angle BFD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ;$$

$$\angle BDF = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ = \angle DBF \Rightarrow \angle BDF \equiv \angle DBF.$$

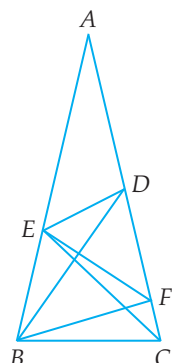
$$\text{Din } \angle BDF \equiv \angle DBF \Rightarrow BF \equiv FD. (6)$$

$$\text{Din (5) și (6)} \Rightarrow FD \equiv EF. (7) \text{ Din } \triangle EBF \text{ echilateral} \Rightarrow \angle BFE = 60^\circ.$$

$$\text{Deci } \angle EFD = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ.$$

$$\text{Din (7)} \Rightarrow \angle FED \equiv \angle FDE \Rightarrow \angle FDE = \frac{180^\circ - \angle EFD}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

$$\text{Deci } \angle BDE = \angle FDE - \angle BDF = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$



Soluția 2:

Construim triunghiul echilateral ACF , cu AB în interiorul unghiului CAF .

Notăm $CE \cap AF = \{I\}$.

Ducem $DL \perp AB$, $L \in AB$ și notăm $DC \cap CI = \{H\}$.

Din $\angle ACE = 30^\circ \Rightarrow CI$ este bisectoare în triunghiul echilateral $ACF \Rightarrow CI$ este înălțime și mediană.

Deci $CI \perp AF$ și $IA \equiv IF$.

$$\text{Din } IA \equiv IF \Rightarrow IA = \frac{AF}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{AB}{2}. (1)$$

Din $\angle BAD = \angle ABD = 20^\circ \Rightarrow DA \equiv DB$. Din $DA \equiv DB$, $DL \perp AB \Rightarrow AL \equiv LB$, $\angle ADL \equiv \angle BDL$.

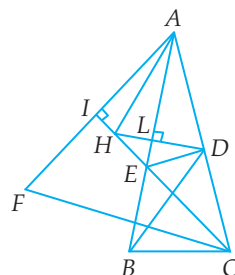
$$\text{Din } AL \equiv LB \Rightarrow AL = \frac{AB}{2}. (2) \text{ Din (1) și (2)} \Rightarrow AL \equiv IA. (3)$$

$$\angle ADB = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ; \angle ADL \equiv \angle BDL = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Din $CI \perp AF$ și $DL \perp AB \Rightarrow \angle AIH = \angle ALH = 90^\circ$.

Din $\angle AIH = \angle ALH = 90^\circ$, $AI \equiv AL$, $AH \equiv AH \Rightarrow \triangle AIH \equiv \triangle ALH \Rightarrow \angle IAH = \angle LAH$.

$$\angle IAL = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$



$$\text{Din } \angle IAH \equiv \angle LAH \Rightarrow \angle IAH \equiv \angle LAH = \frac{\angle IAL}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

$$\text{Deci } \angle LAH = \angle LAD = 20^\circ \Rightarrow \angle LAH \equiv \angle LAD.$$

$$\text{În } \triangle HAD \text{ avem } \angle LAH \equiv \angle LAD, AL \perp HD \Rightarrow AH \equiv AD.$$

$$\text{Din } AH \equiv AD, AL \perp HD \Rightarrow LH \equiv LD.$$

$$\text{Din } LH \equiv LD, EL \perp HD \Rightarrow EH \equiv ED.$$

$$\text{Din } EH \equiv ED \Rightarrow \angle EDH \equiv \angle EHD.$$

$$\text{În } \triangle EIA \text{ avem } \angle AIE = 90^\circ \Rightarrow \angle AEI = 90^\circ - 40^\circ \Rightarrow \angle AEI = 50^\circ.$$

$$\text{În } \triangle ELH \text{ avem } \angle ELH = 90^\circ \Rightarrow \angle EHL = 90^\circ - 50^\circ \Rightarrow \angle EHL = 40^\circ \Rightarrow \angle EHD = 40^\circ \Rightarrow \angle EDH = 40^\circ.$$

$$\text{Dar } \angle BDE = \angle BDL - \angle EDH = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

Soluția 3:

Construim triunghiul echilateral ABF , cu AC în interiorul unghiului BAF .

Notăm $FD \cap AB = \{I\}$; notăm intersecția dintre ED și bisectoarea unghiului DAF cu L și $AL \cap FI = \{H\}$.

$$\text{Din } \angle BAD = \angle ABD = 20^\circ \Rightarrow DA \equiv DB. (1)$$

$$\text{Din } \triangle ABF \text{ triunghi echilateral} \Rightarrow FA \equiv FB. (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow FD$ este mediatoarea lui $AB \Rightarrow IA \equiv IB$ și $FI \perp AB$.

$$\text{Din } \triangle ABF \text{ triunghi echilateral, } FI \perp AB \Rightarrow \angle AFI \equiv \angle BFI \Rightarrow \angle AFI = \angle BFI = 30^\circ \Rightarrow \angle AFH = 30^\circ \Rightarrow \angle ACE \equiv \angle AFH.$$

$$\text{Din } AH \text{ bisectoarea unghiului } DAF \Rightarrow \angle DAH \equiv \angle HAF; \angle DAF = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

$$\text{Deci } \angle DAH = \angle HAF = 20^\circ \Rightarrow \angle EAC \equiv \angle HAF.$$

$$\text{Din } AB \equiv AC, AB \equiv AF \Rightarrow AC \equiv AF.$$

$$\text{Din } \angle EAC \equiv \angle HAF, AC \equiv AF, \angle ACE \equiv \angle AFN \Rightarrow \triangle EAC \equiv \triangle HAF.$$

$$\text{Din } \triangle EAC \equiv \triangle HAF \Rightarrow AE \equiv AH.$$

$$\text{Din } \angle EAD = \angle HAD = 20^\circ \Rightarrow \angle EAD \equiv \angle DAH.$$

$$\text{Din } \angle EAD \equiv \angle HAD, AE \equiv AH, AD \equiv AD \Rightarrow \triangle EAD \equiv \triangle HAD.$$

$$\text{Din } \triangle EAD \equiv \triangle HAD \Rightarrow \angle AED \equiv \angle AHD. (3)$$

$$\text{Cum } \angle AHD \text{ este unghi exterior } \triangle AHF \Rightarrow \angle AHD = \angle HAF + \angle HFA = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ. (4)$$

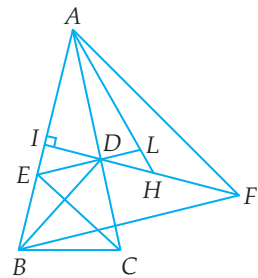
$$\text{Din (3) și (4)} \Rightarrow \angle AED = 50^\circ \Rightarrow \angle IED = 50^\circ. \text{ Din } DI \perp AB \Rightarrow \angle DIE = 90^\circ.$$

$$\text{Din } \angle DIE = 90^\circ \Rightarrow \angle EDI = 90^\circ - \angle IED = 90^\circ - 50^\circ \Rightarrow \angle EDI = 40^\circ.$$

$$\angle ADB = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ.$$

$$\text{Din } DA \equiv DB, DI \perp AB \Rightarrow \angle BDI \equiv \angle ADI \Rightarrow \angle BDI = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

$$\text{Deci } \angle BDE = \angle BDI - \angle EDI = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$



CAPITOLUL III

PUNCTE, DREPTE ȘI CERCURI

REMARCABILE

- III.1. Cercul lui Euler. Dreapta lui Euler
- III.2. Relația lui Euler. Inegalitatea lui Euler
- III.3. Forma algebrică a inegalității lui Euler
- III.4. Inegalitatea lui Ptolemeu. Teoremele lui Ptolemeu
- III.5. Punctul izogon al unui triunghi. Punctul lui Torriceli
- III.6. Punctul lui Miquel. Cercul lui Miquel
- III.7. Dreapta lui Gauss
- III.8. Dreapta lui Newton
- III.9. Dreapta lui Simson
- III.10. Punctul lui Gergonne
- III.11. Cercurile exînscrie. Punctul lui Nagel. Punctele adjuncte ale lui Gergonne.
Razele cercurilor exînscrie
- III.12. Punctul lui Lemoine. Punctul lui Lemoine al unui triunghi dreptunghic
- III.13. Dreapta lui Lemoine
- III.14. Punctul lui Mathot
- III.15. O corespondență între puncte și drepte în plan
- III.16. Teorema lui D. Pompeiu
- III.17. Teorema lui Gh. Țițeica

III.1. CERCUL LUI EULER, DREAPTA LUI EULER

Cercul lui Euler

Într-un triunghi oarecare picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfurile triunghiului sunt 9 puncte concidice. Cercul care conține aceste nouă puncte este cunoscut sub denumirea de **cercul lui Euler** sau **cercul celor 9 puncte**.

Soluție:

$$\text{Din } AH' - \text{diametru} \Rightarrow \angle ACA' = \frac{\widehat{ABA'}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

$$\text{Din } \angle ACA' = 90^\circ \Rightarrow A'C \perp AC. \text{ Din } A'C \perp AC, \\ BE \perp AC \Rightarrow A'C \parallel BE. \text{ Din } A'C \parallel BE \Rightarrow A'C \parallel BH.$$

$$\text{Din } AA' \text{ diametru} \Rightarrow \angle ABA' = \frac{\widehat{ACA'}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

$$\text{Din } \angle ABA' = 90^\circ \Rightarrow A'B \perp AB.$$

$$\text{Din } A'B \perp AB, CF \perp AB \Rightarrow A'B \parallel CF \Rightarrow A'B \parallel CH.$$

Din $A'C \parallel BH, A'B \parallel CH \Rightarrow A'BHC$ este paralelogram $\Rightarrow MB \equiv MC$ și $MH \equiv MA'$, unde $HA' \cap BC = \{M\}$.

Din $MH \equiv MA', OA \equiv OA' \Rightarrow OM$ este linie mijlocie în $\triangle AA'H \Rightarrow OM \parallel AH$ și $OM = \frac{AH}{2}$. Notăm mijlocul segmentului AH cu $S \Rightarrow AS \equiv SH$.

$$\text{Din } AS \equiv SH \Rightarrow SH = \frac{AH}{2} \Rightarrow SH = OM \Rightarrow SH \equiv OM.$$

$$\text{Din } OM \parallel AH \Rightarrow OM \parallel SH.$$

$$\text{Din } OM \parallel SH, SH \equiv OM \Rightarrow SHMO \text{ este paralelogram.}$$

$$\text{Din } SHMO \text{ paralelogram} \Rightarrow QH \equiv QO, QS \equiv QM, \text{ unde } OH \cap SM = \{Q\}.$$

$$\text{În } \triangle SDM \text{ avem: } \angle SDM = 90^\circ, QS \equiv QM \Rightarrow QD = \frac{SM}{2}.$$

$$\text{Din } QS = QM \Rightarrow QS = QM = \frac{SM}{2}. \text{ Deci } QD = QM = QS = \frac{SM}{2}.$$

Din $HS \equiv SA, HM \equiv MA' \Rightarrow SM$ este linie mijlocie în $\triangle AHA' \Rightarrow SM = \frac{AA'}{2} = \frac{2R}{2} = R \Rightarrow SM = R$, unde R este raza cercului circumscris $\triangle ABC$.

$$\text{Deci } QD = QM = QS = \frac{R}{2}.$$

Analog, $QN = QE = QT = \frac{R}{2}$ și $QP = QF = QR = \frac{R}{2}$. Deci $QD = QE = QF = QM = QN = QP = QS = QT = QR = \frac{R}{2}$, unde D, E și F sunt picioarele înălțimilor, M, N și P

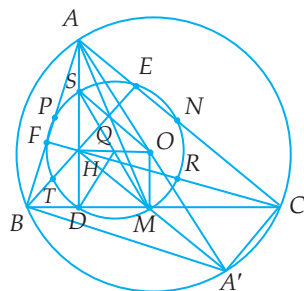


Fig. 1

sunt mijloacele laturilor și S , T și R sunt mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfurile triunghiului, iar Q este mijlocul segmentului OH . Deci D , E , F , M , N , P , S , T și R sunt situate pe un cerc cu centrul în Q și raza egală cu jumătate din raza cercului circumscris triunghiului, numit cercul lui Euler.

Centrul cercului lui Euler este mijlocul segmentului OH .

Raza cercului lui Euler este jumătate din raza cercului circumscris triunghiului.

Dreapta lui Euler

Într-un triunghi ortocentru, centrul cercului lui Euler, centrul de greutate și centrul cercului circumscris sunt patru puncte coliniare. Dreapta care conține aceste puncte se numește **dreapta lui Euler**.

Soluție:

Deoarece centrul cercului lui Euler este mijlocul segmentului OH , rezultă că ortocentru, centrul cercului Euler și centrul cercului circumscris sunt coliniare.

Notăm $AM \cap OH = \{G\}$ (figura 1).

$$\text{Din } OM \parallel AH \Rightarrow \triangle OGM \sim \triangle HGA \Rightarrow \frac{OM}{HA} = \frac{OG}{HG} = \frac{GM}{GA}.$$

$$\text{Din } OM = \frac{AH}{2} \Rightarrow \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Din } \frac{OM}{HA} = \frac{GM}{GA} \Rightarrow \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{GA}{GM} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{GA}{GA+GM} = \frac{2}{2+1} \Rightarrow \frac{GA}{AM} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Din } AM - \text{mediană}, G \in AM \text{ și } \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow G \text{ este centrul de greutate al triunghiului.}$$

$$\text{Din } AM \cap OH = \{G\} \Rightarrow G \in OH.$$

$$\text{Din } Q \in OH, G \in OH \Rightarrow H, Q, G \text{ și } O \text{ sunt coliniare.}$$

CUPRINS

CUVÂNT-ÎNAINTE	5
----------------------	---

CAPITOLUL I CONSTRUCȚII GEOMETRICE AUXILIARE	7
--	---

CAPITOLUL II

PROPRIETĂȚI, TEOREME, APLICAȚII.....	58
II.1. Proprietăți generale în triunghi	59
II.2. Ortocentru. Proprietăți. Aplicații	60
II.3. Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 15° , 75° , $22^\circ 30'$ și $67^\circ 30'$	62
II.4. Teorema lui Pitagora generalizată.....	68
II.5. Teorema cosinusului (forma trigonometrică a teoremei lui Pitagora generalizată). Aplicații	69
II.6. Teorema sinusului. Aplicații	72
II.7. Relația lui Stewart. Calculul lungimii mediane	74
II.8. Teorema lui Euler	76
II.9. Teorema bisectoarei. Calculul lungimii bisectoarei. Aplicații	77
II.10. Calculul lungimii înălțimii unui triunghi. Formula lui Heron	81
II.11. Teorema lui Menelaus. Reciproca pentru triunghi. Aplicații. Teorema lui Menelaus pentru patrulater.....	82
II.12. Relația lui Van Aubel. Aplicație	86
II.13. Tipuri speciale de rapoarte.....	88
II.14. Teorema lui Ceva. Reciproca pentru triunghi. Aplicații. Teorema lui Ceva pentru patrulater	90
II.15. Aplicații la teorema lui Menelaus și la teorema lui Ceva.....	96
II.16. Construcții geometrice efectuate numai cu rigla negradată (partea a II-a).....	97
II.17. Teorema lui Carnot. Aplicații	99
II.18. Teorema lui Steiner. Aplicații	101
II.19. Puterea punctului față de cerc. Aplicații	103

CAPITOLUL III

PUNCTE, DREPTE ȘI CERCURI REMARCABILE.....	106
III.1. Cercul lui Euler. Dreapta lui Euler	107
III.2. Relația lui Euler. Inegalitatea lui Euler.....	109
III.3. Forma algebrică a inegalității lui Euler.....	110
III.4. Inegalitatea lui Ptolemeu. Teoremele lui Ptolemeu	111
III.5. Punctul izogon al unui triunghi. Punctul lui Torricelli	113
III.6. Punctul lui Miquel. Cercul lui Miquel. Punctul lui Miquel al unui triunghi. Punctul lui Miquel al unui patrulater	116
III.7. Dreapta lui Gauss.....	120
III.8. Dreapta lui Newton.....	121
III.9. Dreapta lui Simson	123
III.10. Punctul lui Gergonne	124

III.11. Cercurile exînscrise. Punctul lui Nagel. Punctele adjuncte ale lui Gergonne. Razele cercurilor exînscrise.....	125
III.12. Punctul lui Lemoine. Punctul lui Lemoine al unui triunghi dreptunghic.....	128
III.13. Dreapta lui Lemoine	131
III.14. Punctul lui Mathot	132
III.15. O corespondență între puncte și drepte în plan	133
III.16. Teorema lui D. Pompeiu.....	135
III.17. Problema lui Gh. Țițeica.....	136

BIBLIOGRAFIE.....	137
--------------------------	------------