Editura Paralela 45

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
PELIGRAD, SORIN
Geometrie în spațiu pentru Evaluarea Națională
și olimpiadele școlare / Sorin Peligrad. –
Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4390-2
51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ
EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Sorin Peligrad

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

pentru Evaluarea Națională și olimpiadele școlare

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Acest auxiliar este conceput pentru a sprijini elevii de clasa a VIII-a în pregătirea pentru Evaluarea Națională, dar și pe cei care doresc să participe la olimpiadele școlare.

Partea I reunește conținuturile de geometrie în spațiu prevăzute în programa pentru Evaluarea Națională, prezentate sintetic și însoțite de aplicații rezolvate, menite să faciliteze înțelegerea și fixarea noțiunilor.

Partea a II-a extinde aceste cunoștințe prin introducerea unor teoreme importante, care oferă elevilor instrumente suplimentare pentru abordarea problemelor cu un grad mai ridicat de dificultate. Tot aici sunt prezentate diverse metode de determinare a distanței dintre două drepte necoplanare, ilustrate prin aplicații practice.

EXTRAS DIN PROGRAMA PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A

Domeniul de conținut: Geometrie

Subdomeniul: Corpuri geometrice

- Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; prismă dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări
- Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele, aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept
- Perpendicularitate: drepte perpendiculare în spațiu, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prismei drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept; plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate; proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment; unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare; teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele
- Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate
- Arii și volume ale unor corpuri geometrice: piramidă regulată (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), prismă dreaptă (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), paralelipiped dreptunghic, cub, cilindru circular drept, con circular drept, trunchi de piramidă regulată, trunchi de con circular drept
- Sfera: arie, volum

PARTEA I

CONȚINUTURI DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

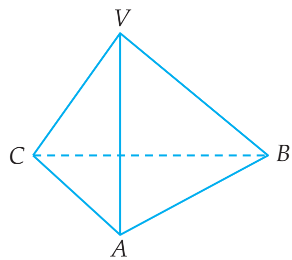
I.1. CORPURI GEOMETRICE

I.1.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat

Piramida este corpul geometric determinat de un poligon plan și un punct care nu aparține planului care conține acel poligon.

Poligonul plan este baza piramidei, laturile poligonului sunt muchiile bazei, punctul exterior este vârful piramidei, iar segmentele determinate de vârful piramidei și vârfurile bazei sunt muchiile laterale.

Piramida cu baza triunghi se numește piramidă triunghiulară sau tetraedru (figura 1), piramida cu baza un patrulater se numește piramidă patrulateră (figura 2), piramida cu baza un hexagon se numește piramidă hexagonală (figura 3) ș.a.m.d.



sau

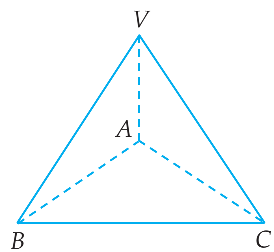


Fig. 1

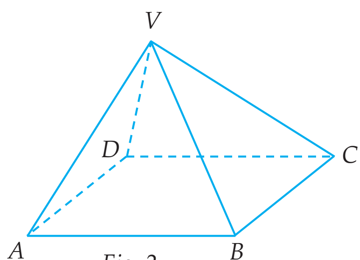


Fig. 2

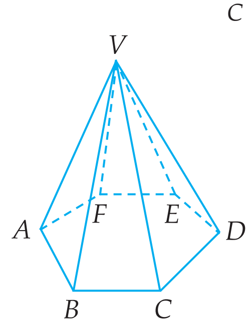


Fig. 3

Triunghiurile determinate de vârful piramidei și laturile poligonului de la bază sunt fețele laterale.

Piramida regulată este piramida care are baza poligon regulat și muchiile laterale congruente.

Într-o piramidă regulată fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.

Înălțimea unei fețe laterale într-o piramidă regulată se numește apotemă.

Piramida triunghiulară regulată are baza triunghi echilateral și muchiile laterale congruente (figura 4).

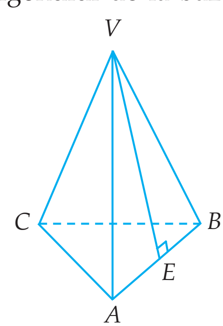


Fig. 4

TETRAEDRUL REGULAT este o piramidă triunghiulară regulată în care fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale (figura 5).

Tetraedrul regulat are toate fețele triunghiuri echilaterale.

Într-un tetraedru regulat muchiile laterale sunt congruente cu muchiile bazei.

În figurile 4 și 5 segmentul *VE* este apotema piramidei.

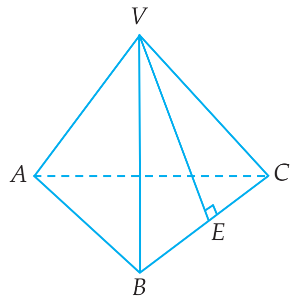


Fig. 5

PIRAMIDA PATRULATERĂ REGULATĂ este piramida regulată care are baza pătrat și muchiile laterale congruente (figura 6).

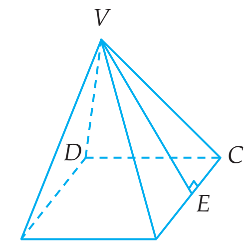


Fig. 6

PIRAMIDA HEXAGONALĂ REGULATĂ are baza hexagon regulat și muchiile laterale congruente (figura 7).

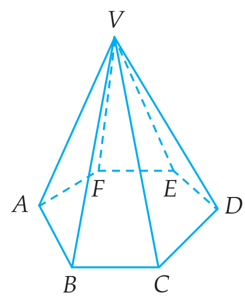


Fig. 7

Desfășurarea piramidelor regulate triunghiulare din figurile 4 și 5 sunt figurile 8, respectiv 9.

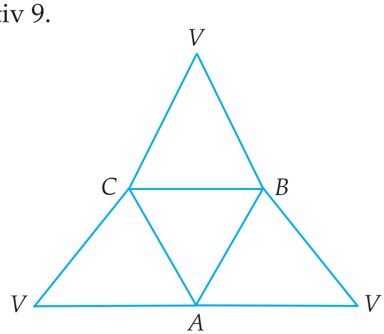


Fig. 8

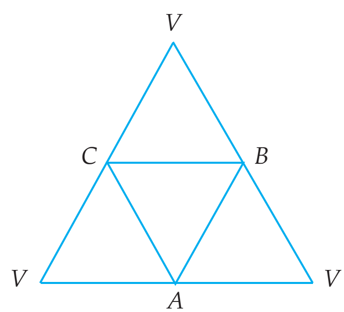


Fig. 9

Desfășurările piramidelor regulate din figurile 6 și 7 sunt reprezentate în figurile 10 și 11.

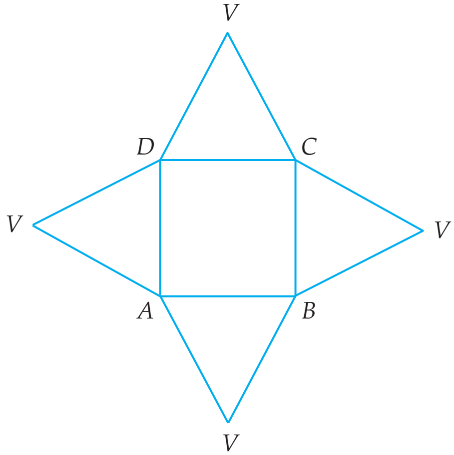


Fig. 10

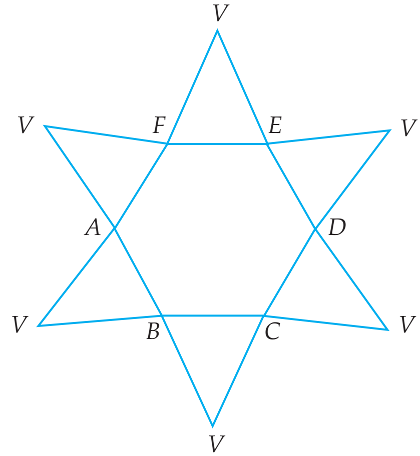


Fig. 11

Observație:

În figurile 8, 9, 10, 11 sunt reprezentate cele mai simple desfășurări ale corpurilor din figurile 4, 5, 6, respectiv 7.

Pentru fiecare corp există mai multe desfășurări, unele sunt mai greu de înțeles.

De exemplu, pentru tetraedrul din figura 5, o altă desfășurare este în figura 12.

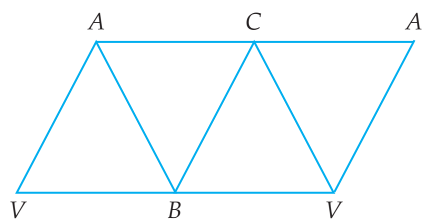


Fig. 12

I.1.2. PRISMA DREAPTĂ, PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC, CUBUL

PRISMA este corpul geometric determinat de două poligoane plane congruente, situate în plane paralele.

- poligoanele plane congruente sunt bazele prismei;
- laturile acestor poligoane sunt muchiile bazelor;
- segmentele care au extremități vârfuri corespunzătoare ale bazelor se numesc muchii laterale;
- fețele laterale sunt paralelograme.

Dacă fețele laterale sunt dreptunghiuri, atunci prisma se numește prismă dreaptă.

PRISMA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ

Prisma triunghiulară regulată este o prismă dreaptă cu baze triunghiuri echilaterale.

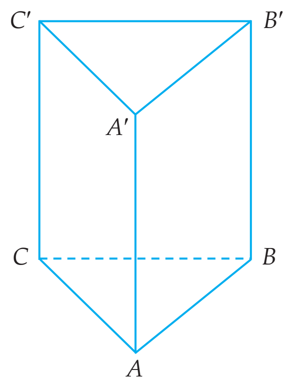


Fig. 1

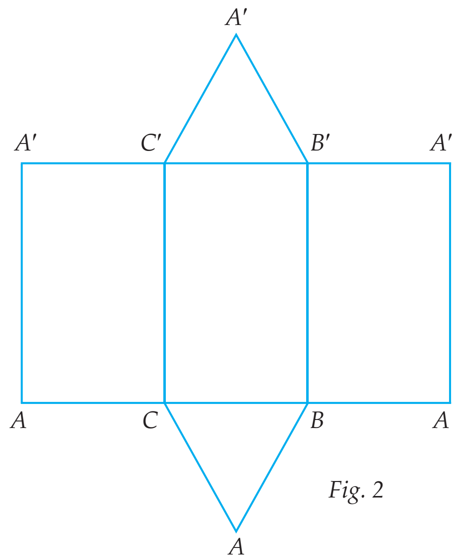


Fig. 2

În figura 1 este desenată o prismă triunghiulară regulată.

În figura 2 este reprezentată desfășurarea unei prisme triunghiulare regulate.

PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC este o prismă dreaptă care are bazele dreptunghiuri.

Paralelipipedul dreptunghic are toate fețele dreptunghiuri.

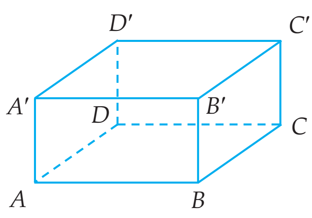


Fig. 3

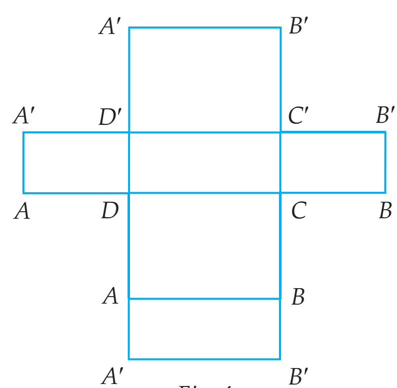


Fig. 4

În figura 3 este desenat un paralelipiped dreptunghic.

În figura 4 este reprezentată o desfășurare a unui paralelipiped dreptunghic.

PARTEA A II-A

COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU PENTRU OLIMPIADELE ȘCOLARE

II.1. DISTANȚA DINTRE DOUĂ DREPTE NECOPLANARE

Fiind date două drepte necoplanare, există o dreaptă și numai una care intersectează cele două drepte și este perpendiculară pe fiecare dintre ele. Această dreaptă se numește perpendiculara comună a celor două drepte.

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu lungimea perpendicularei comune.

În exemplul din figura 1 dreptele a și b sunt necoplanare, dreapta c este perpendiculara comună și distanța dintre dreptele a și b este egală cu lungimea segmentului AB.

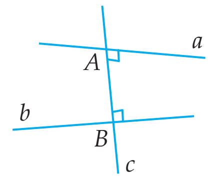


Fig. 1

Pentru aflarea distanței dintre două drepte necoplanare trebuie să determinăm perpendiculara comună și apoi să calculăm lungimea ei.

Sunt probleme în care perpendiculara comună este greu de determinat. Există teoreme care ne permit să aflăm distanța dintre două drepte necoplanare fără să determinăm perpendiculara comună.

Teorema 1:

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu distanța dintre două plane paralele care conțin cele două drepte.

Demonstrație:

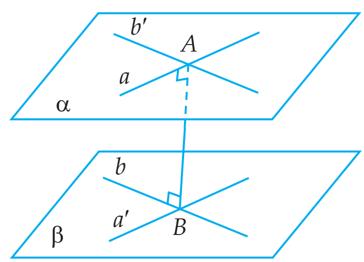
Fie AB perpendiculara comună a dreptelor necoplanare a și b. Deci $d(a, b) = AB$.

Fie $A \in a$ și $b' \parallel b$, $A \in b'$. Din $a \cap b' = \{A\} \Rightarrow \alpha = (a, b')$.

Fie $B \in b$ și $a' \parallel a$, $B \in a'$. Din $a' \cap b = \{B\} \Rightarrow \beta = (a', b)$.

$$\text{Din } \left.\begin{array}{l} a \parallel a',\ b \parallel b' \\ a,\ b' \subset \alpha, a \cap b' = \{A\} \\ a',\ b \subset \beta, a' \cap b = \{B\} \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

$$\text{Din } \left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ AB \perp \beta \\ A \in \alpha, B \in \beta \end{array}\right| \Rightarrow d(\alpha,\ \beta) = AB.$$



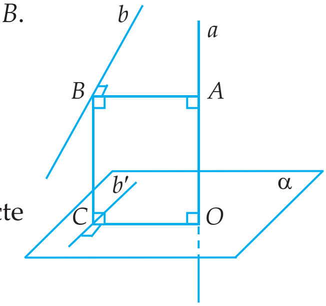
Din $d(a, b) = AB$ și $d(\alpha, \beta) = AB \Rightarrow d(a, b) = d(\alpha, \beta)$.

Teorema 2:

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu distanța de la punctul de intersecție dintre una din ele și un plan perpendicular pe ea la proiecția celeilalte drepte pe acel plan.

Demonstrație:

Fie a și b dreptele necoplanare, $a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = \{O\}$, $b' = pr_\alpha b$, $OC \perp b'$, $C \in b'$ și $\beta = (b, b')$.
Din $b' = pr_\alpha b$ și $\beta = (b, b') \Rightarrow \beta \perp \alpha$.



Din $b' = \mathrm{pr}_{\alpha}\, b$, $C \in b' \Rightarrow$ există $B \in b$, astfel încât $C = \mathrm{pr}_{b'}\, B$.

Din $b' = \mathrm{pr}_{\alpha}\, b$, $C = \mathrm{pr}_{b'}\, B \Rightarrow BC \perp \alpha$.

Ducem $BA \perp a$, $A \in a \Rightarrow \sphericalangle BAO = 90°$ (1).

Din $BC \perp \alpha$, $OC \subset \alpha \Rightarrow BC \perp CO \Rightarrow \sphericalangle BCO = 90°$ (2).

Din $AO \perp \alpha$, $OC \subset \alpha \Rightarrow AO \perp OC \Rightarrow \sphericalangle AOC = 90°$ (3).

Din $AO \perp \alpha$ și $BC \perp \alpha \Rightarrow AO \parallel BC \Rightarrow A, B, C, O$ sunt puncte coplanare (4).

Din (1), (2), (3) și (4) $\Rightarrow ABCO$ este dreptunghi.

Din $ABCO$ – dreptunghi $\Rightarrow AB \parallel OC$ și $AB \equiv OC$.

Din $BC \perp CO \Rightarrow OC \perp BC$.

Din $\left.\begin{array}{l} OC \perp BC,\ BC \subset \beta \\ OC \perp b',\ b' \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow OC \perp \beta$.

Din $OC \perp \beta$, $AB \parallel OC \Rightarrow AB \perp \beta$.

Din $AB \perp \beta$, $b \subset \beta \Rightarrow AB \perp b$.

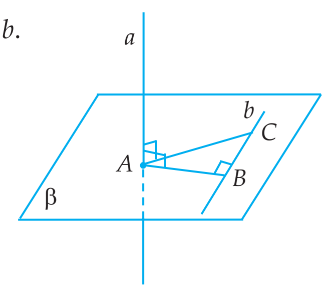
Din $AB \perp b$ și $AB \perp a \Rightarrow \mathrm{d}(a, b) = AB$.

Din $\mathrm{d}(a, b) = AB$ și $AB \equiv OC \Rightarrow \mathrm{d}(a, b) = OC$.

Teorema 3:

Distanța dintre două drepte necoplanare perpendiculare este egală cu distanța de la punctul de intersecție dintre una din ele și un plan perpendicular pe ea care conține cealaltă dreaptă. Perpendiculara din punctul de intersecție pe dreapta din plan este chiar perpendiculara comună.

Demonstrație:



Fie a și b drepte necoplanare perpendiculare, $C \in b$. Ducem $CA \perp a$, $A \in a$. Notăm $(b, CA) = \beta$.

Din $CA \perp a \Rightarrow a \perp AC$.

Din $\left.\begin{array}{l} a \perp AC,\ AC \subset \beta \\ a \perp b,\ b \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow a \perp \beta$.

Ducem $AB \perp b$, $B \in b$.

Din $a \perp \beta$, $AB \subset \beta \Rightarrow a \perp AB \Rightarrow AB \perp a$.

Din $AB \perp a$ și $AB \perp b \Rightarrow AB$ este perpendiculara comună.

Deci $\mathrm{d}(a, b) = AB$.

Situația din teorema 3 reprezintă un caz particular pentru dreptele necoplanare din teorema 2, când dreptele necoplanare sunt perpendiculare.

Teorema 4:

Volumul unui tetraedru este egal cu o șesime din produsul lungimilor a două muchii opuse înmulțit cu distanța dintre ele și cu sinusul unghiului format de cele două muchii.

CUPRINS