Capitolul 1

Matrice. Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare

1.1 Matrice şi determinanţi

Definiţie 1.1.1. *Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. O **matrice de dimensiune** $m \times n$ este o funcție:*

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R},$$

care asociază fiecărei perechi (i, j) un număr real a_{ij}. Această funcție poate fi reprezentată sub forma unei tabele cu m linii și n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \textit{sau} \quad A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}.$$

Mulțimea tuturor matricelor reale de ordin $m \times n$ se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Elementele a_{ij} se numesc *componente* sau *elemente ale matricei* A.

Cazuri particulare:

1. Dacă $m = n$, atunci A se numește **matrice pătratică**, iar spațiul acestor matrici se notează cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Dacă $m = 1$, A este o **matrice linie**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

3. Dacă $n = 1$, A este o **matrice coloană**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Dacă valorile elementelor aparțin corpului $\mathbb{C}$, vorbim despre o **matrice complexă**, iar spațiul acestora se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

În general, putem defini matrici peste orice corp $\mathbb{K}$, însă în cadrul acestui curs ne vom limita la matrici cu valori reale sau complexe.

O matrice în care toate componentele sunt nule se numește **matrice nulă**, și se notează cu $\mathcal{O}_{m,n}$ sau simplu $\mathcal{O}_n$, în cazul în care matricea este pătratică de ordin n. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Matricea pătratică definită astfel:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

se numește **matricea identitate de ordin** n.

Aceasta are valoarea 1 pe diagonală și zerouri în toate celelalte poziții. În cadrul înmulțirii matriciale, I_n are proprietatea de element neutru:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A, \quad \text{pentru orice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Teorema 1.1.2. *Mulțimea tuturor matricelor reale (sau complexe) de dimensiune $m \times n$, notată $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (sau $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$), formează un **grup abelian** (adică comutativ) în raport cu operația de adunare definită component cu component.*

Această structură algebrică este determinată de următoarele proprietăți:

(a) **Comutativitate:** $M + N = N + M, \quad \forall M, N \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
(b) **Asociativitate:** $(M + N) + P = M + (N + P), \quad \forall M, N, P \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
(c) **Element neutru:** există o matrice nulă $\mathcal{O}_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $M + \mathcal{O}_{m,n} = M$, pentru orice $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
(d) **Element opus:** pentru fiecare matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, există o matrice opusă $-M = (-m_{ij})$ astfel încât:

$$M + (-M) = \mathcal{O}_{m,n}.$$

Teorema 1.1.3. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ două matrici de același tip, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ doi scalari. Operația de înmulțire a unei matrici cu un scalar respectă următoarele relații fundamentale:*

(a) ***Distributivitatea față de adunarea matricelor:***

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

(b) ***Distributivitatea față de adunarea scalarilor:***

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A.$$

(c) ***Compatibilitatea înmulțirii scalare:***

$$\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) A.$$

(d) ***Elementul neutru multiplicativ:***

$$1 \cdot A = A.$$

Definiţie 1.1.4. *Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ două matrici compatibile pentru înmulțire, adică numărul de coloane al matricei A coincide cu numărul de linii al matricei B.*

Produsul acestor două matrici este o nouă matrice $C = AB = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, unde fiecare element c_{ik} este calculat astfel:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}, \quad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, p.$$

Prin urmare, fiecare element din produsul matricial este obținut ca produs scalar între linia i a matricei A și coloana k a matricei B.

Exemplul 1.1.5. *Fie matricea $M = \begin{pmatrix} m & n & p \end{pmatrix}$ și vectorul coloană*

$$N = \begin{pmatrix} t \\ z \\ q \end{pmatrix}.$$

Atunci produsul MN este:

$$MN = \begin{pmatrix} m & n & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \\ q \end{pmatrix} = (mt + nz + pq),$$

care este o matrice de tip $(1, 1)$, adică un scalar.

Pe de altă parte, produsul NM este:

$$NM = \begin{pmatrix} t \\ z \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tm & zm & qm \\ tn & zn & qn \\ tp & zp & qp \end{pmatrix},$$

care este o matrice de tip $(3, 3)$.

Definiţie 1.1.6. *Fie* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *o matrice reală. Matricea obținută prin conversia liniilor în coloane și a coloanelor în linii se numește* ***transpusa*** *lui* A *și se notează cu* A^{T}.

Această matrice are dimensiunea $n \times m$, *iar elementele sale sunt date de:*

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Explicit, dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

atunci transpusa sa este:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definiţie 1.1.7. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *o matrice pătratică de ordin* n. *Spunem că:*

1. A *este o* ***matrice simetrică*** *dacă este egală cu transpusa sa, adică:*

$$A^{\mathrm{T}} = A.$$

2. A *este o* ***matrice antisimetrică*** *dacă opusa ei este egal cu transpusa, adică:*

$$A^{\mathrm{T}} = -A.$$

Definiţie 1.1.8. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *o matrice pătratică. Determinantul acestei matrice, notat fie* $\det(A)$, *fie* $|A|$, *este o valoare reală definită recursiv astfel:*

1. Dacă $n = 2$, atunci:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Dacă $n > 2$, atunci determinantul se calculează prin dezvoltare după prima linie:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \cdot D_{1i},$$

unde D_{1i} este determinantul minorului de ordin $n-1$ obținut prin eliminarea liniei întâi și a coloanei i din matricea A.

Dezvoltarea explicită este:

$$\det(A) = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}D_{1n}.$$

Remarca 1.1.9. *Pentru o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

determinantul se poate calcula folosind dezvoltarea pe prima linie:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

*Aceasta este formula generală pentru dezvoltarea determinantului de ordin 3, dar se poate aplica și **regula lui Sarrus**, un mod grafic și rapid de a calcula determinantul, valabil doar pentru matrici 3×3:*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Această regulă presupune copierea primelor două linii ale matricei sub ea și însumarea produselor diagonale principale, apoi scăderea celor secundare:

Remarca 1.1.10. *În formula clasică pentru calculul determinantului unei matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, am folosit dezvoltarea după prima linie. Totuși, acest proces este perfect valabil și în cazul oricărei alte linii sau coloane din matrice.*

Pentru a generaliza această dezvoltare, introducem noțiunea de complement algebric A_{ij} asociat poziției (i, j), definit prin:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij},$$